

Porcentajes. Porcentajes encadenados.

- **Porcentaje** es una forma de expresar un número como una fracción de 100
- **Disminución porcentual:** Descuento es el porcentaje que se resta del precio inicial $C_f = C_o - C_o \cdot i$
- **Aumento porcentual:** Incremento es el porcentaje que se suma al precio inicial $C_f = C_o + C_o \cdot i$
- **Porcentajes encadenados:** Son sucesivos aumentos o disminuciones porcentuales $C_f = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \dots \cdot C_o$ **Interés bancario**
- **Interés simple:** No se acumula o se tiene en cuenta los intereses de años anteriores $C_f = C_o + C_o \cdot i/100 = C + I$ en varios años: $C_f = C_o + I \cdot n$ i = tasa de interés ; I = Interés generado
- **Interés compuesto:** Se acumula o se tiene en cuenta los intereses de años anteriores $C_f = C_o + (C_o \cdot i/100)^n$ o $C_f = C_o \cdot (1+r)^n$

$$C_f = C_o \cdot (1+r)^n$$

Capital final
Capital inicial
rédito num periodos o años
inglés: FV = PV · (1+r)ⁿ
Future Value
Present Value
Interest Rate
Number of Periods

Nota: sumar el 6% de interés es como multiplicar por 1,06 : $(1 + 6/100) = 1,06$

Periodos de interés compuesto: si los pagos no son anuales (semestrales $p=2$; trimestrales; $p=4$) $C_f = C_o (1+r/p)^{n \cdot p}$ siendo p los pagos anuales, n los años y r el interés anual o equivalente anual.
 Si el interés es el mismo plazo que los pagos: $C_f = C_o (1+i/n)^n$

Anualidades

- **Anualidades de capitalización:**

Cantidad fija A que se aporta cada año para tener un capital C

$$C = A \frac{(1+i)^{n+1} - (1+i)}{i} \quad \text{ó} \quad C_f = a(1+i) \frac{(1+i)^t - 1}{i}$$

- **Anualidades de amortización:**

Cantidad fija A que se aporta cada año para pagar una deuda D : $A = \frac{D(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1}$
 Viene de la suma de una progresión geométrica ($S_n = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1}$ ó $S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - r^n)}{1 - r}$) $\rightarrow Q = \frac{C_o(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1}$

Tasa Anual Equivalente (T.A.E.)

Es el interés producido por 1 euro en un año.

Es decir, si f es el número de veces al año que se hace la liquidación: $TAE = (1 + \frac{r}{f})^f - 1$

Tabla de amortización:

Ejemplo: Pido un préstamo al banco de 10.000 € a devolver al 4% anual durante 2 años.

- a) ¿Cuál es la cuota semestral? b) Hacer el cuadro de amortización.

Sol: 2 años x 4 semestres= 8 pagos o cuotas. El tipo interés semestral es: $0.04/2=0,02$

$$\text{Cuota: } Q = \frac{C(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1} \rightarrow Q = \frac{10.000 \cdot 1,02^4 \cdot 0,02}{1,02^4 - 1} = \frac{216,4864}{0,0824} = 2.627 \text{ €}$$

Tabla de amortización:

Pago	Deuda	Cuota	Intereses	Amortizado	Deuda final
1º sem	10.000	2.627	10000*0,02= 200,00	2.627-200,00=2.427,00	10000-2427=7.573
2º sem	7.573	2.627	7.573*0,02=151,46	2.627-151,46 =2.475,54	7.573-2475.54=5.097,46
3º sem	5.097,46	2.627	5.097,46*0,02=102	2.627-101,95=2.525,05	5.097,46-2.525,05=2.572,41
4º sem	2.572,41	2.627	2.572,41*0,02=51,5	2.627-51,5=2.572	2.574,74-2.572=0,01

Ejercicios (soluciones al final).

- En un depósito en el que los intereses anuales se añaden al capital invertido, tenemos los siguientes casos: A) Si el depósito ofrece el 4,5% anual e invertimos 12.000 €, ¿cuánto dinero recibiremos en 5 años?
B) Y si queremos tener 15.000 € dentro de 4 años al 4,5% anual, ¿qué cantidad inicial deberé invertir? Si ingresamos 2.000 € cada año durante 15 años al 5% anual, ¿qué capital final obtenemos?
- En el contrato de trabajo de un empleado se establece una subida anual del 7,2 %. Si empieza ganando 900 € al mes, ¿cuántos años tienen que pasar para que gane 1700 €?
- Ingreso 15.000 € en un banco y se comprometen a pagarme un 3,7 % anual, abonando los intereses semestralmente. ¿Cuánto dinero tengo al cabo de 4 años?
- Un préstamo de 120.000 € con un interés anual del 6% se ha de devolver en 20 cuotas anuales. ¿Cuál será el importe de cada cuota?
- Un préstamo de 120.000 € con un interés anual del 6% se ha de devolver en 20 cuotas anuales. ¿Cuál será el importe de cada cuota?

Soluciones:

- En un depósito en el que los intereses anuales se añaden al capital invertido, tenemos los siguientes casos:
C) Si el depósito ofrece el 4,5% anual e invertimos 12.000 €, ¿cuánto dinero recibiremos en 5 años? $r = 4,5\%$
; $C_0 = 1.200 \text{ €}$; $t = 5 \text{ años}$ $\rightarrow C_f = C_0 \cdot (1+r)^n = 1200 \cdot (1,045)^5 = 14.954,18 \text{ €}$
D) Y si queremos tener 15.000 € dentro de 4 años al 4,5% anual, ¿qué cantidad inicial deberé invertir?
 $r = 4,5\%$; $t = 4 \text{ años}$; $C_f = 15.000 \text{ €}$ $\rightarrow 1500 = C_0 \cdot (1,045)^4 \rightarrow C_0 = 1500 / 1,045^4 = 12.578,42 \text{ €}$
- Si ingresamos 2.000 € cada año durante 15 años al 5% anual, ¿qué capital final obtenemos?
 $C_0 = 2.000 \text{ €}$; $i = 0,05$; $t = 15 \text{ años}$; $A = 2000$ $\rightarrow C_f = A \cdot (1+i) \cdot (1+i)^{15} - 1 / 0,05 = 45.314,98 \text{ €}$
- En el contrato de trabajo de un empleado se establece una subida anual del 7,2 %. Si empieza ganando 900 € al mes, ¿cuántos años tienen que pasar para que gane 1700 €?
 $1700 = 900 \cdot \left(1 + \frac{7,2}{100}\right)^t \rightarrow \frac{1700}{900} = (1,072)^t \rightarrow 1,8889 = 1,072^t \rightarrow \text{Log } 1,8889 = t \cdot \text{Log } 1,072 = 9,14 \text{ años}$
- Ingreso 15.000 € en un banco y se comprometen a pagarme un 3,7 % anual, abonando los intereses semestralmente. ¿Cuánto dinero tengo al cabo de 4 años?
 $C = 15000 \left(1 + \frac{3,7}{2 \cdot 100}\right)^{4 \cdot 2 \text{ semestres}} \rightarrow C = 15000 \cdot (1,0185)^8 \rightarrow C = 17368,5 \text{ €}$
- Un préstamo de 120.000 € con un interés anual del 6% se ha de devolver en 20 cuotas anuales. ¿Cuál será el importe de cada cuota?
D) = 120.000 € ; $i = 0,06$; $t = 20$ $A = \frac{D(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1} \rightarrow A = 10.462,15 \text{ €}$

EJERCICIOS PROPUESTOS CON SOLUCIÓN:

1. Se deposita en un banco 3000 € al 6 % de interés simple. ¿En qué capital se habrá convertido al cabo de 10 años? *Solución:* 4800 €.
2. Abrimos una cuenta con 1500 € en un banco a un rédito anual del 3%, y los intereses que general al final de cada año se reinvierten en dicha cuenta. Si al final del segundo año cancelamos la cuenta, ¿cuánto dinero nos deben dar? (Convocatoria 2004) (0,5 puntos) *Solución:* 1591,35 €
3. Un capital de 600 € ha producido, al 5 % de interés compuesto, 694,57 euros. ¿Cuánto tiempo ha estado en el banco? *Solución:* 3 años.
4. Se sabe que al cabo de 5 años un capital depositado al 3,5 % de interés compuesto se ha convertido en 902,64 €. Halla el capital inicial ingresado. *Solución:* 760 €.
5. Determina el tanto por ciento de interés compuesto a que se ha de colocar un capital de 100 000 €, durante dos años, para que produzca una ganancia de 18 810 €. *Solución:* 9 %.
6. Halla el capital conseguido si se depositan 12000 € durante 15 años al tipo de interés compuesto anual del 8 % pagadero por semestres.
7. Un empleado desea conocer qué cantidad recibirá después de 20 años si al principio de cada uno de ellos entrega 2000 € para ser colocados a interés compuesto al 8 %. Halla la cantidad que percibirá al cabo de ese tiempo. *Solución:* 98.846 €.
8. El ayuntamiento de una ciudad ha emitido un empréstimo de 300.000 €, que abona al 6 % de interés compuesto y que desea amortizar en 30 plazos anuales iguales. ¿Qué anualidad habrá de pagar? *Sol:* 21.795
9. Queremos contratar un préstamo al 6% de interés anual y no estamos seguros de cómo pagar las cuotas: mensuales, trimestrales, semestrales o anuales. ¿Qué opción nos conviene más, pago trimestral o mensual? calcula el TAE Pagos mensuales: TAE=6,17 trimestral: TAE = 6,14 anual; TAE = 6%

Ejemplo 1: Usted adquiere su crédito de \$ 10.000 pagaderos en 3 años con cuotas semestrales iguales del 12% capitalizarse semestralmente. Hallar el pago semestral y construir el cuadro de amortización.

Datos

A = 10.000
 n= 3 años x 2= 6sem
 i = 12% cap. sem. → 0.12/2 = 0,06
 R = ?

$$R = \frac{A \cdot i}{1 - (1+i)^{-n}}$$

$$R = \frac{10.000 \times 0,06}{1 - (1 + 0,06)^{-6}}$$

$$R = 2.033,63$$

ESTADO DE AMORTIZACIÓN DE LA DEUDA

PERIODO	RENTA	INTERES	AMORTIZACIÓN	SALDO
0	--	--	--	10.000
1	2033,63	600	1433,63	8566,37
2	2033,63	513,98	1519,65	7046,76
3	2033,63	422,80	1610,83	5435,93
4	2033,63	326,15	1707,48	3728,45
5	2033,63	223,71	1809,92	1918,53
6	<u>2033,64</u>	<u>115,11</u>	<u>1918,53</u>	0