

## Distribución binomial

Para que sea una distribución binomial:

1. Sólo son posibles **dos** resultados: el suceso A (éxito) y su contrario suceso contrario. (var. dicotómica)
2. La probabilidad del suceso A  $P(A)$  es constante y se representa por  $p$ .
3. El resultado de cada prueba es independiente de los anteriores

Se representa por  $B(n, p)$ .

- $n$  es el número de pruebas de que consta el experimento.
- $p$  es la probabilidad de éxito.

La probabilidad de suceso contrario es  $1 - p$ , y la representamos por  $q$ .

### Variable aleatoria binomial:

Es una variable discreta que expresa el número de éxitos obtenidos en  $n$  pruebas del experimento.

Función de la distribución binomial: 
$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}$$

- $n$  es el número total de pruebas.
- $k$  es el número de éxitos.
- $p$  es la probabilidad de éxito.
- $q$  es la probabilidad de fracaso.
- El número combinatorio  $\binom{n}{k} = C_{n,k} = \frac{\text{Variaciones } n,k}{\text{Permutaciones } k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ , en la calculadora nCr: 10C3

**Ejemplo1:** La probabilidad de que un hombre acierte en el blanco es  $\frac{1}{4}$ . Si dispara 10 veces

a) ¿Cuál es la probabilidad de que acierte exactamente en tres ocasiones?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que acierte por lo menos en una ocasión?

Sol:  $B(10, \frac{1}{4})$   $p = 0,25$ ;  $q = 3/4$ ;  $n = 10$ ;  $k = 3$  a) En tres ocasiones:  $P(x = 3) = \binom{10}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^7 = 0,25$

b) Por lo menos en una ocasión:  $p(x \geq 1) = 1 - P(\text{no acierte ninguna})$ :  $P(x \geq 1) = 1 - \binom{10}{0} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{10} = 0,9437$

**Ejemplo2:** Se lanza una moneda cuatro veces. Calcular la probabilidad de que salgan más caras que cruces:

Sol:  $P(x \geq 3) = p(x = 3) + p(x = 4) = \binom{4}{3} \cdot 0,5^3 \cdot 0,5^1 + \binom{4}{4} \cdot 0,5^4 \cdot 0,5^0 = 0,3125$

**Ejemplo3:** La última novela de un autor ha tenido un gran éxito, hasta el punto de que el 80% de los lectores ya la han leído. Un grupo de 4 amigos son aficionados a la lectura:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que del grupo hayan leído la novela 2 personas?:

Sol:  $n = 4$   $p = 0.8$   $q = 0.2$   $B(4, 0.8) \rightarrow P(X = 2) = \binom{4}{2} 0,8^2 \cdot 0,2^2 = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cdot 0,64 \cdot 0,04 = 0,1536$

b) Y como máximo 2:  $P(X \leq 2) = \binom{4}{0} 0,8^0 \cdot 0,2^4 + \binom{4}{1} 0,8^1 \cdot 0,2^3 + \binom{4}{2} 0,8^2 \cdot 0,2^2 = 0,1808$

### Media y desviación típica:

- En una muestra binomial: Media:  $\bar{x} = \sum fi \cdot xi / n = \sum hi \cdot xi$ ; Varianza  $s^2 = \sum hi \cdot xi^2 - \bar{x}^2$ ; Desviación:  $s = \sqrt{\text{varianza}}$
- En una población binomial: Media (esperanza):  $\mu = n \cdot p$ ; Varianza:  $\sigma^2 = npq$ ; Desviación típica:  $\sigma = \sqrt{npq}$

**Ejemplo 1:** La probabilidad de que un artículo producido por una fábrica sea defectuoso es 0.02. Se envió un cargamento de 10.000 artículos a unos almacenes. Hallar el número esperado de artículos defectuosos, la varianza y la desviación típica. Sol:  $\mu = 10000 \cdot 0,02 = 200$ ;  $\sigma^2 = 10000 \cdot 0,02 \cdot 0,98 = 196$ ;  $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{196} = 14$

**Ejemplo 2:** La probabilidad de que un TV sea defectuoso es del 5%. En un lote de 1000 Tv, hallar el valor esperado de TV defectuosos y desv. típica: Sol:  $\mu = n \cdot p = 1000 \cdot 0,05 = 50$ ;  $\sigma = \sqrt{1000 \cdot 0,05 \cdot 0,95} = 6,8$

### Ejercicios:

1. Supongamos que la probabilidad de tener una unidad defectuosa en una línea de ensamblaje es de 0,05.

Si el conjunto de unidades terminadas constituye un conjunto de ensayos independientes:

- a) ¿cuál es la probabilidad de que, entre diez unidades, dos se encuentren defectuosas?
- b) ¿y de que a lo sumo dos se encuentren defectuosas?
- c) ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos una se encuentre defectuosa?

a)  $P(x = 2) = \binom{10}{2} \cdot 0,05^2 \cdot (1 - 0,05)^8 = 0,0476$

b) (para  $i = 0,1,2$ ):  $P(x \leq 2) = \sum_{i=0}^2 \binom{10}{i} \cdot 0,05^i \cdot (1 - 0,05)^{10-i} = 0,9984$

c)  $P(x \geq 1) = 1 - P(x = 0) = 1 - \binom{10}{0} \cdot 0,05^0 \cdot (1 - 0,05)^{10-0} = 1 - 0,5987 = 0.4013$

2. Supóngase que la producción de un día de 850 piezas manufacturadas contiene 50 piezas que no cumplen con los requerimientos del cliente. Se seleccionan del lote dos piezas al azar y sin reemplazo. Sea la variable aleatoria X igual al número de piezas de la muestra que no cumplen. ¿Cuál es la función de distribución acumulada de X?

Sol: Encontrando primero la función de probabilidad de X:

$P(x=0) = (800/850)(799/849) = 0,886$ ;  $P(x=1) = 2(800/850)(50/849) = 0,111$ ;  $P(x=2) = (50/850)(49/849) = 0,003$

Por lo tanto:  $F(0) = P(x \leq 0) = 0.886$ ;  $F(1) = P(x \leq 1) = 0.886 + 0,111 = 0,997$ ;  $F(2) = P(x \leq 2) = 1$

3.- Un laboratorio afirma que una droga causa efectos secundarios en una proporción de **3** de cada **100** pacientes. Para contrastar esta afirmación, otro laboratorio elige al azar a **5** pacientes a los que aplica la droga.

¿Cuál es la probabilidad de los siguientes sucesos?:

**a.** Ningún paciente tenga efectos secundarios. **b.** Al menos dos tengan efectos secundarios. **c.** ¿Cuál es el número medio de pacientes que espera el laboratorio que sufran efectos secundarios si elige 100 pacientes al azar?

$$a: \text{Binom}(100, 0,03); P(x=0) = \binom{5}{0} \cdot 0,03^0 \cdot 0,97^5 = 0,8587 = 85,87 \%$$

$$b: P(x \geq 2) = 1 - P(x < 2) = 1 - \left[ \binom{5}{0} \cdot 0,97^5 + \binom{5}{1} \cdot 0,03 \cdot 0,97^4 \right] = 0,0086 = 0,86\% \quad c: \mu = n \cdot p = 100 \cdot 0,03 = 3$$

4. En un proceso de fabricación de tornillos se sabe que el 2% son defectuosos. Los empaquetamos en cajas de 50 tornillos. Calcula la probabilidad de que en una caja haya este número de tornillos defectuosos:

**a)** Ninguno. **b)** Uno. **c)** Más de dos. ¿Cuántos tornillos defectuosos habrá, por término medio, en cada caja?

$$\text{Sol: a) } P[x = 0] = 0,98^{50} = 0,364 \quad b) P[x = 1] = 50 \cdot 0,02 \cdot 0,98^{49} = 0,372 \quad c) P[x > 2] = 1 - P[x \leq 2] = 1 - [P(0) + P(1) + P(2)] = 1 - (0,364 + 0,372 + 0,186) = 1 - 0,922 = 0,078, \text{ Por término medio, habrá: } \mu = n \cdot p = 50 \cdot 0,02 = 1 \text{ tornillo defectuoso en cada caja.}$$

5. Un tratamiento contra el cáncer produce mejoría en el 80 % de los enfermos a los que se le aplica. Se suministra a 5 enfermos. Se pide: **a)** Calcula la probabilidad de que los 5 pacientes mejoren. **b)** Calcula la probabilidad de que, al menos, tres no experimenten mejoría. **c)** ¿Cuántos pacientes se espera que mejoren?.

$$p = 0,8 \Rightarrow q = 0,2 \quad a) P(x=5) = \binom{5}{5} 0,8^5 \cdot 0,2^0 = 0,328$$

$$b) P(x < 3) = P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) = C_{5,0} 0,8^0 \cdot 0,2^5 + C_{5,1} 0,8^1 \cdot 0,2^4 + C_{5,2} 0,8^2 \cdot 0,2^3 = 0,0579 \quad c) E(x) = \mu = n \cdot p = 5 \cdot 0,8 = 4 \text{ pacientes}$$

6. El departamento de control de calidad de una empresa que fabrica pañuelos sabe que el 5% de su producción tiene algún tipo de defecto. Los pañuelos se empaquetan en cajas con 15 elementos. Calcular la probabilidad de que una caja contenga: **a)** 2 elementos defectuosos. **b)** Menos de 3 elementos defectuosos **c)** Entre 3 y 5 elementos defectuosos (ambos incluidos)

1 pañuelo,  $p(d)=0,05=p$   $n=15$  pañuelos,  $X = \#$ pañuelos defectuosos  $\rightarrow \text{Bi}(15, p=0,05)$

$$a) P(X=2) = C_{15,2} \cdot 0,05^2 \cdot 0,95^{15-2} = 0,135 \quad b) P(X < 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = C_{15,0} 0,05^0 \cdot 0,95^{15} + C_{15,1} 0,05^1 \cdot 0,95^{14} + C_{15,2} 0,05^2 \cdot 0,95^{13} = 0,463 + 0,3657 + 0,135 = 0,9637 \quad c) P(3 \leq X \leq 5) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) = C_{15,3} 0,05^3 \cdot 0,95^{12} + C_{15,4} 0,05^4 \cdot 0,95^4 + C_{15,5} 0,05^5 \cdot 0,95^{10} = 0,03536$$

7. Una prueba de inteligencia consta de diez cuestiones cada una de ellas con cinco respuestas de las cuales una sola es verdadera. Un alumno responde al azar ¿Cuál es la probabilidad de que responda al menos a dos cuestiones correctamente? ¿Cuál la de que responda bien a seis? ¿Cuál la de que responda bien como máximo a dos cuestiones?

$$p = P(A) = 1/5 = 0,2 \quad n = 10 \text{ preguntas} \quad a) X \rightarrow \text{Bi}(10, 0,2): P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(0) + P(1)] = 1 - [C_{10,0} 0,2^0 \cdot 0,8^{10} + C_{10,1} 0,2^1 \cdot 0,8^9] = 1 - [0,1073 + 0,2684] = 0,6242 \quad b) P(X=6) = C_{10,6} 0,2^6 \cdot 0,8^4 = 0,0055 \quad c) P(X \leq 2) = f(0) + f(1) + f(2) = 0,1073 + 0,2684 + C_{10,2} 0,2^2 \cdot 0,8^8 = 0,1073 + 0,2684 + 0,3019 = 0,6776$$

8. La probabilidad de que el Banco "Riu Sec" reciba un cheque sin fondos es 1%. **a)** Si en una hora reciben 20 cheques, ¿cuál es la probabilidad de que se tenga algún cheque sin fondos? **b)** El banco dispone de 12 sucursales en la ciudad, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 4 de las sucursales reciban algún cheque sin fondos? **c)** Si la media del valor de los cheques sin fondos es de 580 € y el banco trabaja 6 horas diarias, ¿qué cantidad total de euros no se espera pagar? **d)** Si se computaran los primeros 500 cheques, ¿cuál es la probabilidad de recibir entre 3 y 6 (inclusive) cheques sin fondos?

Sol: **a)**  $n = 20$  cheques  $q = P(\text{fondos}) = 0,99$   $p = P(\text{no fondos}) = 0,01$   $X = \text{número de cheques sin fondos} \rightarrow \text{Bi}(20, 0,01)$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \binom{20}{0} \cdot 0,01^0 \cdot 0,99^{20} = 1 - 0,8179 = 0,182$$

**b)**  $n = 12$  sucursales  $p = P(\text{al menos 1 cheque sin fondos}) = 0,182$   $q = P(\text{no recibir 1 cheque sin fondos}) = 0,812$   $X = \text{número de sucursales que reciben al menos 1 cheque} \rightarrow \text{Bi}(12, 0,182)$   $P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - [p(0) + p(1) + p(2) + p(3)] = 0,2054$  **c)** 1 hora  $\rightarrow$  20 cheques, 6 horas  $\rightarrow$   $x = 120$  cheques  $E(x) = n \cdot p = 120 \cdot 0,01 = 1,2$  cheques sin fondos, y por tanto  $1,2 \cdot 580 = 696$  € no se espera pagar **d)**  $n = 500$  cheques  $p = P(\text{fondos}) = 0,9$   $q = P(\text{sin fondos}) = 0,1$   $X = \text{número de cheques sin fondos} \rightarrow \text{Bi}(500, 0,1)$  -

$$n \cdot p \leq 5; n \cdot p = 500 \cdot 0,01 = 5 \rightarrow P(0) P(3 \leq X \leq 6) = p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = 0,1404 + 0,1755 + 0,1755 + 0,1462 = 0,6376$$

9. Determinar la probabilidad de realizar cierto tipo de experimento con éxito si se sabe que si se repite 24 veces es igual de probable obtener 4 éxitos que 5

$$P(A) = p \quad n = 24 \text{ veces}, X \rightarrow \text{Bi}(24, p) \quad p(x=4) = p(x=5) = C_{24,4} \cdot p^4 \cdot q^{20} = C_{24,5} \cdot p^5 \cdot q^{19}$$

$$10626 \cdot p^4 \cdot q^{20} = 42504 \cdot p^5 \cdot q^{19} \Rightarrow q^{20}/q^{19} = 42504 \cdot p^5 / 10626 \cdot p^4 \Rightarrow q = 4p \text{ Como } q = 1 - p: p = 0,2$$

10. Aproximació a la normal: Una màquina fabrica cargols, el 5% dels quals són defectuosos. S'empaqueten en capsos de 400. Calcula la probabilitat que en una capsa n'hi hagi més de 30 de defectuosos.

Sol:  $x$  és binomial, amb  $n = 400$  i  $p = 0,05$ :  $P[x > 30] = P(31) + P(32) + P(33) + \dots$  si son molts valors, aproximar-lo a la normal i cercar a la taula:  $\mu = 400 \cdot 0,05 = 20$ ;  $\sigma = \sqrt{400 \cdot 0,05 \cdot 0,95} = 4,36$  La distribució  $B(400, 0,05)$  se aproxima a la normal:  $\rightarrow \mu \approx \bar{x} \quad N(20, 4,36)$   
 $\rightarrow P[x > 30] = P[z > (30-20)/4,36] = P[z > 2,29] \rightarrow$  Busquem a la tabla  $N(0,1)$ :  $P(z < 2,29) = 0,9890 \rightarrow P(z > 2,29) = 1 - 0,9890 = 0,011$

**11. Aproximació a la normal:** Un operador elige al azar entre “n” chips de una caja. La probabilidad de que sea defectuoso es 0,2. **a)** Si  $n = 7$ , ¿cuál es la probabilidad de que al menos 3 chips sean defectuosos? **b)** Si  $n = 50$ , ¿cuál es la probabilidad de tener entre 9 y 12 chips defectuosos? **c)** ¿Cuántos chips hay en la caja si la varianza es 32?

Sol: a)  $p = P(\text{defectuoso}) = 0,2$   $q = P(\text{no defectuoso}) = 0,8$   $n = 7$   $X = \text{chips defectuosos} \rightarrow \text{Bi}(7, 0,2)$

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - [p(0) + p(1) + p(2)] = 1 - 0,852 = 0,148$$

b)  $n = 50$   $X \rightarrow \text{Bi}(500, 0,2) \rightarrow N(10, 2,828)$   $\mu = n \cdot p = 50 \cdot 0,2 = 10$   $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = 2,828$   $P(9 \leq X \leq 12) = P((9-10)/2,828 \leq z \leq (12-10)/2,828) = P(-0,35 \leq z \leq 0,707) = P(z \leq 0,707) - P(z \leq -0,35) = 0,7580 - (1 - 0,6368) = 0,3948$

c)  $n = ?$   $\text{Var}(X) = 32 \rightarrow n \cdot p \cdot q = 32$ ;  $n \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 32$   $N = 200$  chips

**12. Aproximació a la normal:** En un quiosco de periódicos se supone que el número de ventas diarias se distribuye normalmente con media 30 y varianza 2. Determinar: **a)** Probabilidad de que en un día se vendan entre 13 y 31 periódicos **b)** Determinar el máximo número de periódicos que se venden en el 90% de las ocasiones **c)** Supongamos que en una ciudad hay 10 quioscos independientes del mismo tipo y con las mismas características. Determinar la probabilidad de que más de dos quioscos vendan entre 13 y 31 periódicos.

Sol: a)  $N(30, 2)$ :  $P(13 \leq X \leq 31) = P((13-30)/\sqrt{2} \leq z \leq (31-30)/\sqrt{2}) = P(-12,02 \leq z \leq 0,707) = P(z \leq 0,707) - P(z \leq -12,02) = 0,7580$

b)  $P(X \leq a) = 0,90 \rightarrow P(z \leq (a-30)/\sqrt{2}) = 0,90$  (tablas),  $(a-30)/2 = 1,28 \rightarrow a = 31,81$  periódicos

c)  $n = 10$  quioscos;  $p = P(\text{vender entre 13 y 31}) = 0,7580$   $q = P(\text{no vender entre 13 y 31}) = 0,242$   $X = \text{quioscos que venden entre 13 y 31} \rightarrow \text{Bi}(10, 0,7580)$ :  $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - [p(0) + p(1) + p(2)] = 0,99972$

**13. Aproximació a la normal:** Una máquina fabrica tornillos cuyas longitudes se distribuyen normalmente con media 20 mm y varianza 0.25 mm. Un tornillo se considera defectuoso si su longitud difiere de la media más de 1 mm. Los tornillos se fabrican de forma independiente. ¿Cuál es la probabilidad de fabricar un tornillo defectuoso? Si los envasamos en envases de 15 tornillos, probabilidad de que en un envase no tenga más de 2 defectuosos.

Sol: a)  $P(\text{defectuoso}) = P(x > 21) + P(x < 19) = P(z > 0,5 \cdot 21 - 20) + P(z < 0,5 \cdot 19 - 20) = P(z > 2) + P(z < -2) = [1 - P(z \leq 2)] + [1 - P(z \leq 2)] = [1 - 0,9773] + [1 - 0,9773] = 0,0452$  tornillos defectuosos  $n = 15$  tornillos  $p = P(\text{def.}) = 0,0452$   $q = P(\text{no def.}) = 0,9548$   $X = \text{tornillos defectuosos} \rightarrow \text{Bi}(15, 0,0452)$   $P(x \leq 2) = f(0) + f(1) + f(2) = 0,972$

**14. Distribución Hipergeométrica:** Se sabe que de un lote de 40 semillas no está en buenas condiciones la cuarta parte. Se toman al azar 8 semillas y se analizan en el laboratorio. ¿Cuál es la probabilidad de que 3 de las analizadas estén en malas condiciones?

Sol: a)  $n = 40$  semillas,  $k = 40 \cdot 1/4 = 10$  semillas en malas condiciones,  $n = 8$  semillas:  $P(X = 3) = \frac{\binom{10}{3} \binom{30}{5}}{\binom{40}{8}} = 0,22$

**Model de PAU'S 2024**

**PAU P24 M1** Els components electrònics produïts per una determinada empresa són defectuosos amb una certa probabilitat  $p$  (independentment els uns dels altres). L'empresa ven els components en paquets de 10 i es compromet a retornar els diners si el paquet conté 2 o més components defectuosos. **(a)** Calcula, en funció de  $p$ , la probabilitat que et retornin els diners si compres un paquet de components. **(b)** Si  $p = 0.01$ , quina és la probabilitat de que, comprant 3 paquets de components, et retornin els diners de, com a mínim, un dels paquets? Aquest resultat augmenta o disminueix quan  $p$  augmenta? Raona la resposta. **(c)** Si  $p = 0.01$ , calcula la probabilitat que comprant 4 paquets et retornin els diners d'exactament dos d'ells.

*Sol:* Per tal que no ens retornin els diners, tots deu components siguin bons,  $P(1-p)^{10}$ , o un defectuós,  $10p(1-p)^9$ . Probabilitat que ens retornin els diners:  $\alpha = 1 - (1-p)^{10} - 10p(1-p)^9$ . **(b)** ens retornaran els diners amb probabilitat  $\alpha = 1 - (1-0.01)^{10} - 10 \cdot 0.01 \cdot (1-0.01)^9 = 0,0043$ . Per tant, no ens retornaran els diners de cap d'ells amb probabilitat  $(1-\alpha)^3 = (0.9957)^3 = 0.9872$ , i ens en retornaran almenys un amb probabilitat  $1 - 0.9872 = 0,0128$ . Clarament, si  $p$  augmenta, llavors  $\alpha$  augmenta, i el resultat  $1-(1-\alpha)^3$  també augmenta. **(c)**  $P$  retornin diners d'exactament dos:  $\binom{4}{2} \alpha^2 (1-\alpha)^2 = 6 \cdot (0.0043)^2 \cdot (0.9957)^2 = 0,0001$

**PAU P24 M2** Considera l'experiment següent: tirem un dau equilibrat i, a continuació, tirem tantes monedes (equilibrades també) com indiqui el resultat del dau. **(a)** Calcula la probabilitat que obtinguem exactament 3 cares. **(b)** Calcula la probabilitat que obtinguem exactament 3 cares sabent que el resultat del dau ha estat un nombre parell. **(c)** Calcula la probabilitat que obtinguem exactament 3 cares sabent que la primera moneda ha donat creu.

**(a)** Cal que al dau hi hagi sortit, prèviament un 3, 4, 5 ó 6. Si surt un 3: probabilitat d'obtenir 3 cares és:  $0,5^3$

si surt un 4:  $\binom{4}{3} 0,5^4$ , si surt un 5:  $\binom{5}{3} 0,5^5 = 10/32$  i si surt un 6:  $\binom{6}{3} 0,5^6 = 5/16$ .

Per la llei de la probabilitat total:  $1/6 \cdot 1/8 + 1/6 \cdot 1/4 + 1/6 \cdot 5/16 + 1/6 \cdot 5/16 = 0,1666$

**(b)**  $P$  que al tirar el dau surti parell:  $1/3$  per cadascun dels possibles resultats 2, 4, i 6. Probabilitat d'obtenir exactament 3 cares:

$$\frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot \binom{4}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \binom{6}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12} + \frac{5}{48} = 0.1875.$$

*Alternativament:*  $P(3 \text{ cares} | \text{parell}) = P(3c \cap \text{parell})/P(\text{parell}) = 0,1875$

**(c)** 3 cares, havent donat creu la primera moneda, cal que al dau hi hagi sortit un 4, un 5, ó un 6.

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \binom{4}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \binom{5}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{48} + \frac{1}{24} + \frac{5}{96} = 0.1146.$$

*Alternativament:*  $P(3 \text{ cares} | 1a \text{ creu}) = P(3c \cap \text{creu})/P(\text{creu}) = P(3c \cap \text{creu})/0,5 = 0,0573/0,5 = 0.1146$ .

**PAU 24 M3** L'Anna i el Blai juguen al joc següent: començant per l'Anna, s'alternen tirant una moneda equilibrada fins a un màxim de 4 cops cadascú; el primer que obtingui cara guanya, i si els hi surten vuit creus empaten. **(a)** Calcula la probabilitat que guanyi l'Anna i la probabilitat que guanyi el Blai. Qui té més possibilitats de guanyar? **(b)** Aquestes dues quantitats han de sumar 1? Justifica la resposta. **(c)** Ara suposem que la moneda està trucada i que la probabilitat que surti cara en una tirada és  $0 < p < 1$ . Quan ha de ser  $p$  per tal que l'Anna tingui el triple de possibilitats de guanyar el joc?

**(a)** La moneda la tira primer l'Anna, després el Blai, etc, fins que surt la primera cara, que fa guanyar a qui l'hagi tret; si a la vuitena tirada encara no ha sortit cap cara s'acaba el joc i empaten. Per tant, l'Anna guanyarà el joc si surt cara a la primera tirada, o si surten dues creus i cara a la tercera tirada, o quatre creus i cara a la cinquena, o sis creus i cara a la setena. La probabilitat que això passi és  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0.6641$ . Anàlogament, el Blai guanyarà el joc si surt creu a la primera tirada i cara a la segona, o si surten tres creus i cara a la quarta tirada, o cinc creus i cara a la sisena, o set creus i cara a la vuitena. La probabilitat que això passi és  $\frac{1}{2}^2 + \frac{1}{2}^4 + \frac{1}{2}^6 + \frac{1}{2}^8 = 0.3320$ . Té doncs més possibilitats de guanyar l'Anna que el Blai (de fet, exactament el doble si no tenim en compte els arrodoniments). **(b)** Aquestes dues probabilitats no han de sumar 1 perquè hi ha una petita possibilitat que empatin i no guanyi ningú el joc. Això passarà quan surtin 8 creus, cosa que té una probabilitat de  $\frac{1}{2}^8 = 0.0039$ . I, efectivament, la suma  $0.6641 + 0.3320 + 0.0039$  ara sí que dóna 1. **(c)** Repetint el càlcul en funció de  $p$ , les probabilitats que guanyi l'Anna i el Blai són:  $P(\text{Anna}) = p + (1-p)^2 p + (1-p)^4 p + (1-p)^6 p$ ,  $P(\text{Blai}) = (1-p)p + (1-p)^3 p + (1-p)^5 p + (1-p)^7 p$ . Com que traient factor comú tenim que  $P(\text{Blai}) = (1-p)P(\text{Anna})$ , el que ens demanen passarà quan  $1-p = 1/3$  és a dir  $p = 2/3$ .

**PAU 24 M4** Tirem un dau equilibrat repetides vegades fins que surti un sis, moment en el qual parem. **(a)** Quina és la probabilitat que després de  $n$  tirades encara no hagi sortit cap sis? **(b)** Quantes tirades hem de fer, com a mínim, per tal que la probabilitat que surti un sis sigui igual o superior a 0.95? **(c)** Sabent que ens ha sortit el primer sis a la cinquena tirada, quina és la probabilitat que no hagi sortit cap sis ni cap quatre?

**(a)** Probabilitat no hagi sortit cap sis després de  $n$  tirades:  $(1-1/6)^n = (5/6)^n$  **(b)** Volem que l'esdeveniment contrari al de l'apartat anterior tingui probabilitat igual o superior a 0.95:  $(1-1/6)^n \geq 0.95 \rightarrow 0.05 \geq (5/6)^n \rightarrow \log 0.05 \geq n \log(5/6) \rightarrow 16.43 \leq n$ . Per tant, calen com a mínim 17 tirades. **(c)** Sabent que a les quatre primeres tirades no ha sortit cap sis, la probabilitat que tampoc hagin sortit ni el cinc ni el quatre és:  $(3/5)^4 = 0,1296$

**PAU 2024** L'Andreu posa les nou boles que es mostren a continuació dins d'una bossa. →



a) A continuació, treu de la bossa dues boles a l'atzar, una

darrere l'altra i sense reemplaçament (és a dir, no retorna a la bossa la primera bola abans de treure la segona). — Calculeu la probabilitat que la primera bola sigui una A o una E. — Calculeu la probabilitat que les dues boles siguin diferents.

b) L'Andreu torna a posar totes les boles a la bossa i en treu cinc a l'atzar, una darrere l'altra, però ara amb reemplaçament (és a dir, ara sí que retorna a la bossa cada bola extreta abans d'agafar la següent). — Calculeu la probabilitat que no hagi tret cap A. — Calculeu la probabilitat que hagi tret almenys dues A

$$\text{dues A i una E. } \frac{3}{9} = \frac{1}{3}. \quad P(\text{dues A}) = P(\text{primera A i segona A}) = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{36} = P(\text{dues S}).$$

$$P(\text{dues diferents}) = 1 - P(\text{dues iguals}) = 1 - 2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{17}{18} = 0.944 \dots$$

$$P(\text{dues diferents}) = P(\text{primera no és ni A ni S}) + P(\text{primera A i segona no A}) + P(\text{primera S i segona no S}) = \frac{5}{9} + \frac{2}{9} \cdot \frac{7}{8} + \frac{2}{9} \cdot \frac{7}{8} = \frac{17}{18}$$

$$\text{b) binomial amb } n = 5 \text{ i } p = \frac{2}{9}. \quad - \quad P(\text{cap A}) = (1 - p)^5 = \left(\frac{7}{9}\right)^5 = 0.284 \dots$$

$$P(\text{almenys 2 A}) = 1 - P(\text{una A}) - P(\text{cap A}) = 1 - \binom{5}{1} \left(\frac{2}{9}\right) \left(\frac{7}{9}\right)^4 - \left(\frac{7}{9}\right)^5 = 0.308$$

**PAU 24 Sep** S'estima que el 20 % dels habitants d'una regió pateix algun tipus d'arrítmia. Per a diagnosticar-la, hi ha la possibilitat de col·locar al pacient un monitor Holter, que detecta l'arrítmia en un 95 % dels casos de persones que la pateixen, però que també dona falsos positius, per motius elèctrics, en persones que no pateixen arrítmies en un 0,5 % dels casos. a) Si escollim 4 persones a l'atzar, quina és la probabilitat que almenys una d'elles pateixi arrítmies? b) Quina és la probabilitat que una persona escollida a l'atzar obtingui un diagnòstic positiu d'arrítmia? c) Si una persona obté un diagnòstic negatiu a la prova del Holter, quina és la probabilitat que realment pateixi arrítmies?

$$P(N \geq 1) = 1 - P(0) = 1 - \binom{4}{0} \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^4 = 1 - 0,4096 = 0,5904 = 59,04 \%$$

$$\text{(a) } P(A) = 0.2. \text{ binomial amb } n = 4 \text{ i } p = 0.2. \quad P(N \geq 1) = 1 - P(N = 0) = 1 - (1 - 0.2)^4 = 0.5904$$

$$\text{(b) } P(\bar{A}) = 0.8, \quad P(H | A) = 0.95 \text{ i } P(H | \bar{A}) = 0.005.$$

$$\text{probabilitat total: } P(H) = P(H | A) \cdot P(A) + P(H | \bar{A}) \cdot P(\bar{A}) = 0.95 \cdot 0.2 + 0.005 \cdot 0.8 = 0.194.$$

$$\text{(c) Bayes: } P(A | \bar{H}) = \frac{P(A \cap \bar{H})}{P(\bar{H})} = \frac{P(A) \cdot P(\bar{H} | A)}{1 - P(H)} = \frac{0.2 \cdot (1 - 0.95)}{1 - 0.194} = 0.012 \dots$$

**23 UNI SOC.** Quatre persones d'edats i estat de salut semblants han contractat una pòlissa de vida. Les taules de mortalitat preveuen un 0,7 de probabilitat que aquests assegurats continuïn vius al cap de 25 anys. Troba la probabilitat que, passat aquest període de temps: a) Siguin tots vius. b) No en visqui cap. c) N'hagin mort la meitat. Calcula també el nombre mitjà de supervivents.

**Exercicis amb solució:**

9 S'ha comprovat que d'un grup de deu alumnes d'un centre educatiu, cada un d'ells falta a classe un 5 % dels dies.

Calcula la probabilitat que un dia determinat:

- No falti cap alumne a classe
- Faltin a la classe més de 5 alumnes
- No vagi a classe cap alumne.

Sol: a) 0.599 b)  $2.75 \cdot 10^{-6}$  c)  $9.8 \cdot 10^{-14}$

10 En una illa de cases hi ha deu aparcaments. A cada aparcament hi pot haver o no un cotxe, independentment que els altres aparcaments estiguin ocupats. Si la probabilitat que un aparcament estigui ocupat és 0.4:

- Identifica i descriu aquest model de probabilitat.
- Calcula la probabilitat que un cert dia hi hagi vuit cotxes aparcats.

11 La probabilitat que l'Òscar guanyi a en Jaume un partit de tennis és  $2/3$ . Si juguen 4 partits, calcula la probabilitat que l'Òscar guanyi: a) Alguna vegada. b) Més de la meitat dels partits.

Sol: a)  $P(a) + P(b) + P(c) = 1 \Rightarrow 0.2 + 0.3 + P(c) = 1 \Rightarrow P(c) = 1 - 0.2 - 0.3 = 0.5$  b)  $P(\{a,c\}) = P(a) + P(c) = 0.2 + 0.5 = 0.7$

12 Una màquina produeix disquets. S'ha comprovat que el 5% són defectuosos. Agafem 10 disquets a l'atzar i ens demanen pel nombre de defectuosos:

- És una distribució binomial?
- Calcula  $P[x = 0]$ ,  $P[x > 0]$  i  $P[x = 2]$

Sol: a) 0.6 b) 0.25 c) 0.65 d) 0.15 e) 0.95

13 Un examen tipus test consta de 20 preguntes, cadascuna de les quals té 5 respostes possibles. Si es respon a l'atzar, calculeu: a) La probabilitat d'encertar exactament 6 preguntes.

- La probabilitat d'encertar-les totes.
- La probabilitat de no encertar-ne cap.

Sol: a) 0.109 b)  $1.049 \cdot 10^{-14}$  c) 0.012

14 El 5% dels bombons de licor que produeix una fàbrica són defectuosos i es buiden. Calculeu la probabilitat que en una caps de 10 bombons:

- Tots estiguin en bones condicions.
- N'hi hagi un de buit.
- N'hi hagi dos o més en mal estat.

Si la capsa és de 30 bombons, calculeu la probabilitat que:

- Tots estiguin en bones condicions.
- N'hi hagi dos en mal estat.
- N'hi hagi tres o més en mal estat.

Sol: a) 0.5987 b) 0.3151 c) 0.0861 d) 0.2146 e) 0.2586 f) 0.1878

15 Llancem un dau perfecte 4 cops seguits.

- Trobeu la probabilitat d'obtenir exactament dues vegades un nombre parell.
- Trobeu la probabilitat d'obtenir exactament dues vegades un nombre més gran que quatre.

Sol: a) 0.375 b) 0.296

16 En una caps de 10 boles, de les quals només una és blanca. Quina és la probabilitat de treure-la almenys un cop, en deu extraccions fetes a l'atzar, si tornem la bola després d'haver-la mirada?

0.65132

17 La probabilitat que un estudiant obtingui el títol de llicenciat en Geografia i Història és 0.3. Trobeu la probabilitat que d'un grup de set estudiants matriculats en primer curs:

- Cap dels set acabi la carrera.
- L'acabin tots.
- Com a mínim dos estudiants acabin la carrera.

a) 0.0824 b) 0.000219 c) 0.6706

18 A un estudi realitzat per TVE, se ha sabut que només el 15% dels espanyols són partidaris que hi hagi combats de boxa per televisió. Si escollim una mostra de 10 persones, es demana:

- Quina és la probabilitat que la meitat sigui favorable?
- La probabilitat que només una persona sigui favorable.

a) 0.0085 b)  $3.268 \cdot 10^{-7}$

19 Calculeu la probabilitat que el sis aparegui més d'una vegada en 10 llançaments d'un dau.

$X = B(10, 1/6)$ ,  $P(X > 1) = 1 - (P(0) + P(1)) = 1 - (0.1615 + 0.3230) = 0.5155$

20 Calculeu la probabilitat d'obtenir al menys una cara en llançar deu vegades una moneda.

$X = B(10, 1/2)$ ,  $P(X > 0) = 1 - P(0) = 1 - 0.0010 = 0.999$

21 En general el 30% dels que pateixen certa malaltia moren. Quina és la probabilitat que, en un grup de 10 pacients, en morin 4 o més?

$X = B(10, 0.3)$ ,  $P(X > 3) = 1 - (P(0) + P(1) + P(2)) = 1 - (0.0282 + 0.1211 + 0.2335 + 0.2668) = 0.3504$

22 Expliqueu raonadament quin dels dos fets següents us sembla més probable.

a) Treure exactament un 6 amb sis llançaments d'un dau.

b) Treure exactament dos 6 amb dotze llançaments d'un dau.

a)  $X = B(6, 1/6)$ ,  $P(6) = 0.4019$  b)  $X = B(12, 1/6)$ ,  $P(2) = 0.2961$  És molt més probable treure un sis amb sis llançaments.

23 Llanceu una moneda 20 vegades. Quina és la probabilitat que surti cara tantes vegades com que surti creu? Quina és la probabilitat que surti cara més vegades que creu?

$X = B(20, 1/2)$ , a)  $P(10) = 0.1762$  b)  $P(11) + P(12) + P(13) + P(14) + P(15) + P(16) + P(17) + P(18) + P(19) + P(20) = 0.4119$

24 El 85% de les persones d'una població són Rh positives i la resta Rh negatives. Se n'escullen 8 a l'atzar. Quina és la probabilitat que exactament 6 persones d'aquest grup siguin Rh positives?

$X = B(8, 0.85)$ ,  $P(6) = 0.2376$ .