

## 1. Estudio de funciones - Estudi de Funcions

1.- **Dominio** (domini) de una función: Todos los valores horizontales de la **x** donde exista la **y**

Casos:

1º- Si es **polinómica**: todo  $\mathbb{R}$  (números reales) ejem:  $f(x) = x^2 + 2x + 3$

2º- Si es **racional** (fracción): todo  $\mathbb{R}$  menos donde se anule el denominador:  $y = \frac{x+1}{x-1}$  Dom:  $\mathbb{R} - \{1\}$

3º- Si hay una **raíz** par: el radicando  $\geq 0$  ex:  $y = \sqrt{x-1} \rightarrow$  Dom:  $[1, +\infty)$

4º- Si es **logarítmica**: el interior  $> 0$  ex:  $y = \log(x-1) \rightarrow$  Dom:  $(1, +\infty)$

5º- Si es por partes o trozos: debe existir **x** en todo el intervalo:  $\rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & ; \text{ si } x < 1 \\ 4x - 3 & ; \text{ si } x > 2 \end{cases}$

2.- **Recorrido** (recoregut): Todos los valores verticales que puede tomar la **y** ó **f(x)**

3.- **Continuidad** (continuitat): Donde exista dominio y además en las funciones por partes o trozos cuando en los extremos de **x** en el intervalo, el **límite** sea igual por la izquierda que por la derecha y exista la **y**.

4.- **Derivabilidad/derivabilitat**: Donde sea continua y además en las funciones por partes o trozos cuando en los extremos de **x** en el intervalo su **derivada** sea igual por la izquierda que por la derecha.

5.- Puntos de **corte**:  
 - Horizontal con eje OX: cuando  $y = 0 \rightarrow$  hallamos  $\exists x?$  ;  $P_H(0, x)$   
 (Punts de tall) - Vertical con el eje OY: cuando  $x = 0 \rightarrow$  hallamos  $\exists y?$  ;  $P_V(0, y)$

6.- **Signos / signes**: - Intervalos donde la función es positiva o negativa  
 (posibles cambios de signos en puntos de corte o asíntotas)

7.- **Asíntotas**:  
 - **Horizontal**: cuando  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = n^o$   
 (asíntotes) - **Vertical**: cuando  $\lim_{x \rightarrow n^o} f(x) = \infty$  (se anula el denominador)  
 - **Oblicua**: cuando  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/x = m$  ;  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - x = n$  ; recta:  $y = mx + n$   
 (si hay horizontal, no hay oblicua)

8.- **Crecimiento/creixement**: - Creciente:  $f'(x) > 0$  ( $\Delta y \oplus$  sube) Decreciente:  $f'(x) < 0$  ( $\Delta y --$  baja)

9.- **Concavidad/concavitat**:  
 - Cóncava:  $\cup \rightarrow$  Cuando pase de decreciente a creciente o la  $f''(x) < 0$   
 - Convexa:  $\cap \rightarrow$  Cuando pase de creciente a decreciente o la  $f''(x) > 0$

10.- **Máximos y mínimos**:  
 - Absolutos: Los valores de **y** más altos o bajos de todo el dominio  
 - Relativos: Los valores de **y** más altos o bajos de la gráfica local, **x** cercanos.  
 - Máximo:  $f'(x) = 0$  y es convexa o  $f''(x) > 0$   
 - Mínimo:  $f'(x) = 0$  y es cóncava o  $f''(x) < 0$

11.- Punto de **inflexión**: - Si  $f'' = 0$  y  $f''' \neq 0$  (p. inflexión singular si  $y' = 0$ )

12.- **Simetría**:  
 - Respecto del eje de ordenadas: Si  $f(-x) = f(x)$   
 - Respecto del origen: Si  $f(-x) = -f(x)$

13.- **Periódicidad/periodicitat**: - Cuando  $f(x+T) = f(x)$  ; **T** es el periodo que se repite.

### Tipos de función básicas

- **Función de 1er grado**: Recta con ecuación:  $y = mx + n$  de pendiente  $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y-y_0}{x-x_0}$  y  $n$  ordenada del origen

- **Función de 2º grado**: parábola de ecuación  $y = ax^2 + bx + c$ , ceros:  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  vértice:  $x_v = \frac{-b}{2a}$

- **Función inversa**  $f(x) = 1/x$ : (**x** en el denominador) Siempre decreciente, Dom:  $\mathbb{R} - \{0\}$  Asíntota vertical en 0

- **Función racional**  $f(x) = x^2/x-1$ : Fracción con posibles asíntotas verticales, horizontales y/o oblicuas.

- **Función irracional**  $\sqrt{x-1}$ : Raíces. Sin dominio si es par y el discriminante  $\leq 0$ . Curva puntiaguda

- **Función logarítmica**  $f(x) = \ln x$ : sin dominio si el discriminante  $< 0$ . Curva chata. Ejem:

- **Función exponencial**, ejemplo  $f(x) = 2^x$ : es inversa a la logarítmica

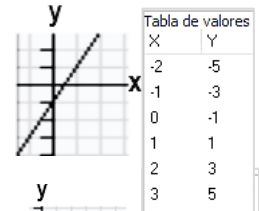
- **Función trigonométrica**, ejemplo  $f(x) = \cos 2x$ : suele ser periódica.  $\sin(x)$  y  $\cos(x)$  son senoidales.

### Función polinómica de 1er grado

Son rectas del tipo  $y = m \cdot x + n$  donde  $m$  es la pendiente y  $n$  la ordenada o salida vertical del origen.

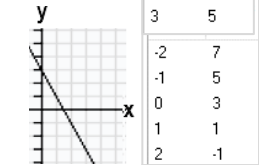
Ejemplo 1:  $y = 2x - 1$

- tiene pendiente  $m = 2 \rightarrow$  es creciente, con pendiente  $\arctan(2) = 63^\circ$
- sale del eje vertical en  $y = -1$  es una recta afín porque no pasa por el origen
- Puntos de corte: H(1/2,0) V( 0, -1)



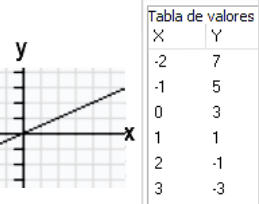
Ejemplo 2:  $y = -2x + 3$

- tiene pendiente  $m = -2 \rightarrow$  es decreciente, con pendiente  $\arctan(-2) = -63^\circ$
- sale del eje vertical en  $y = 3$  es una recta afín porque no pasa por el origen
- Puntos de corte: H(3/2,0) V(0, 3)



Ejemplo 3:  $y = \frac{1}{2}x$

- tiene pendiente  $m = \frac{1}{2} \rightarrow$  es creciente suave, con pendiente  $\arctan(0,5) = 27^\circ$
- no tiene n sale del origen. Es una recta lineal.
- Puntos de corte: H/V (0,0)



#### Ejercicios se funciones de 1er grado:

a) Indica pendiente, dominio, recorrido, ptos. de corte, crecimiento, tipo de recta, haz la tabla y representa:

a)  $y = -3x + 5$       b)  $y = x - 4$       c)  $y = -2x$       d)  $y = 1/3x - 4$       e)  $2x - y = 3$

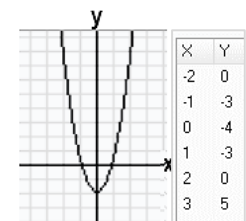
b) Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos P = (1, 1) y Q = (-4, 2). Graficar.  $y = -1/5 x + 1/5$

### Función polinómica de 2º grado (función cuadrática)

- Son parábolas del tipo  $y = ax^2 + bx + c$
- El signo de  $a$  representa la concavidad: Si es + es cóncava (∪ sonríe) si es - es convexa (∩ enfadada)
- Punto de corte vertical: Hacer  $x = 0$ . Si  $c = 0$  pasa por el origen.
- Puntos de corte horizontales: hacer  $y = 0$  obteniendo la ecuación y resolviendo con:  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- Discriminante  $\Delta = b^2 - 4ac$  (interior de la raíz) +: tiene dos puntos de corte horiz, -: no tiene, 0: tiene uno
- Vértice: Se encuentra en  $x_v = \frac{-b}{2a}$ : Si la función es cóncava es el mínimo si es convexa es el máximo
- Dominio: Todo  $\mathbb{R}$  porque es polinómica
- Recorrido: desde el vértice  $Y_v$  hacia  $\infty$  si es cóncava, desde el vértice  $Y_v$  hacia  $-\infty$  si es convexa
- Crecimiento: desde el vértice  $X_v$  hacia  $\infty$  es creciente y hacia  $-\infty$  es decreciente si es cóncava, y a la inversa.
- Simetría: Si falta el término  $b$  es simétrica par ya que  $f(x) = f(-x)$

Ejemplo 1:  $y = x^2 - 4$

- Concavidad: cóncava (∪) porque  $a > 0$
- Puntos de corte: Vertical ( $x=0$ ): en (0, -4) ; Horizontal ( $x = \frac{0 \pm \sqrt{16}}{2}$ ): en (2,0) y (-2,0)
- Vértice ( $x_v = \frac{-b}{2a}$ ): en (0, -4)
- Dominio: Todo  $\mathbb{R}$  ; Recorrido:  $[-4, \infty)$  ;
- Crecimiento: Decreciente de  $(-\infty, 0)$  , Creciente de  $(0, +\infty)$  ;
- Extremos: Un mínimo en (0, -4)
- Simetría: Sí porque  $f(-x) = (-x)^2 - 4 = f(x)$  ; ejemplo:  $f(-1) = f(1)$



#### Ejercicio se funciones de 2º grado:

Indica el dominio, recorrido, puntos de corte, concavidad, crecimiento, extremos, simetría y representa:

a)  $y = x^2 + 3x - 4$       b)  $y = -x^2 + 6x - 5$       c)  $y = -2x^2 + 8$       d)  $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x$   
 e)  $f(x) = -x^2 - 4x + 12$  (-6,0)(2,0)(0,12) f)  $h(x) = -2x^2 + 6x - 4$ (1,0)(2,0) g)  $f(x) = (x + 2)^2 + 2$

**Prob:** El beneficio de una empresa viene dado en función del número de elementos fabricados con arreglo a la función:  $B(x) = -2x^2 + 10x - 8$  a) ¿Entre qué intervalos de producción la empresa tendrá beneficio positivo? b) El número de elementos para tener el beneficio máximo y cuál es ese beneficio.  
 S:(1,4) ;(2,5, 4,5)

**Ejercicios de funciones /exercicis de funcions.**

• **Dominios:** Determinar el dominio de las siguientes funciones /troba el domini de les següents funcions:

1)  $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-9}$  → Sol: El denominador no puede ser cero:  $x^2 - 9 \neq 0 \rightarrow x \neq \pm 3 \rightarrow \text{Dom}(f): \mathbb{R} - \{3, -3\}$

2)  $f(x) = \sqrt{x-5}$  → Sol: La raíz debe ser  $\geq 0 \rightarrow x-5 \geq 0 \rightarrow x \geq 5 \rightarrow \text{Dom}(f): [5, +\infty)$  ó  $5 \leq x < \infty$

3)  $f(x) = \frac{\sqrt{16-x^2}}{x}$  → Sol: a) Por la raíz par:  $16 - x^2 \geq 0 \rightarrow -x^2 \geq -16 \rightarrow x \leq \pm 4 \rightarrow -4 \leq x \leq 4$

b) Por el denominador:  $x \neq 0 \rightarrow$  Uniendo ambas:  $\text{Dom}(f): [-4, 4] - \{0\}$  ó  $[-4, 0) \cup (0, 4]$

a. $f(x) = 9 - 4x^2$	$\text{Dom } f = \mathbb{R}$	k. $g(x) = \sqrt[4]{x^2 + 5x + 8}$	$\text{Dom } g = \mathbb{R}$
b. $g(x) = \frac{x}{7-x^2}$	$\text{Dom } g = \mathbb{R} - \{\sqrt{7}, -\sqrt{7}\}$	l. $l(x) = \sqrt{3+2x-x^2}$	$\text{Dom } l = [-1, 3]$
c. $h(x) = \frac{x-1}{x^3-2x^2-5x+6}$	$\text{Dom } h = \mathbb{R} - \{-2, 1, 3\}$	m. $m(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x+1}$	$\text{Dom } m = [-3, 3] - \{-1\}$
d. $y = 1 + \frac{1}{x} - \frac{x}{x-1}$	$\text{Dom } y = \mathbb{R} - \{0, 1\}$	n. $y = e^{1/x} + 2^{-1/x-7}$	$\text{Dom } y = \mathbb{R} - \{0, 7\}$
e. $f(x) = \sqrt{\frac{x}{7-x^2}}$	$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{\sqrt{7}, -\sqrt{7}\}$	ñ. $\tilde{n}(x) = \ln(2x+3)$	$\text{Dom } \tilde{n} = \left(-\frac{3}{2}, +\infty\right)$
f. $f(x) = x - \frac{2}{\sqrt{x}}$	$\text{Dom } f = (0, +\infty)$	o. $k(x) = \ln(2x+3) + \frac{1}{x}$	$\text{Dom } k = \left(-\frac{3}{2}, +\infty\right) - \{0\}$
g. $y = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$	$\text{Dom } y = (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$	p. $f(x) = \text{sen}\sqrt{1-x^2}$	$\text{Dom } f = [-1, 1]$
h. $y = \frac{-2}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$	$\text{Dom } y = (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$	q. $f(x) = x^2 - 3x + \ln 5^{\cos x}$	$\text{Dom } f = \mathbb{R}$
i. $y = \frac{-2}{\sqrt[3]{x^2 - 5x + 6}}$	$\text{Dom } y = \mathbb{R} - \{2, 3\}$	r. $h(x) = \frac{\log(25-x^2)}{\sqrt{x^2+3x-4}}$	$\text{Dom } h = (-5, -4) \cup (1, 5)$
j. $f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{3x-5}}$	$\text{Dom } f = (-\infty, -2] \cup \left(\frac{5}{3}, +\infty\right)$	s. $y = \text{tg}(2x-3)$	$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2} + (2k+1)\frac{\pi}{4}\right\}$

• **Ecuación de la recta:**

a) Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos P = (1, 1) y Q = (-4, 2). Graficar.  $y = -1/5 x + 1/5$

b) Dada la recta  $g(x) = \frac{1}{2}x - 4$ , obtener la ecuación de la recta perpendicular a  $g$  que corta al eje de las abscisas en  $x = 1$ . Graficar. Pista: Pendiente perpend.  $m_p = -\frac{m}{2} = -2 \rightarrow y = -2x + 2$

• **Ecuación de la recta tangente / equació de la recta tangent**

a) Dada la parábola  $f(x) = x^2 - 5x + 6$ . Halla la ec. de la recta tangente y pasa por el origen Sol:  $n=0 \rightarrow y = -5x$

b) Encuentra la ecuación de la recta que es tangente a la parábola  $x^2 - 5x + 6$  en  $x=1$  Pista:  $m=-3$

c) Encuentra la ecuación de la recta paralela a la tangente a esa curva en  $x=1$ , que pasa por el punto (2,3)

d) Encuentra la ecuación de la recta normal a la anterior y que pasa por el punto (2,3)

e) Hallar la ecuación de la recta tangente a la parábola anterior y paralela a la recta:  $3x + y - 2 = 0$ .

f) Ecuación de la recta tangente a la parábola anterior, paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

Sol.:  $y=2x$  ;  $y=2x-1$  ;  $y=-x/2+4$  ;  $y=-3x+5$  ;  $y=x-3$

g) Calcular los puntos en que la tangente a la curva  $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$  es paralela al eje OX.

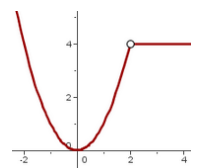
Sol:  $y' = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \rightarrow x_1 = 3$  ;  $x_2 = -1 \rightarrow A(3, -22) B(-1, 10)$

h) Determinar los valores del parámetro  $b$ , para que las tangentes a la curva de la función

$f(x) = b^2x^3 + bx^2 + 3x + 9$  en los puntos de abscisas  $x = 1$ ,  $x = 2$  sean paralelas. Sol:  $b = 0$   $b = -2/9$

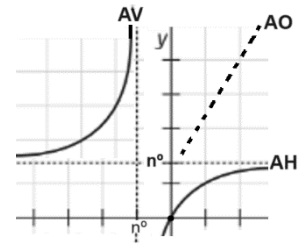
• **Funciones por partes / trozos: Dominio, continuidad y derivabilidad de las funciones definida a trozos:**

$$y = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ 4 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 2 \\ 4 & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 2 \\ 4 & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 3 \\ 4 & \text{si } x > 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 2 \\ 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$



## Asíntotas

- **Horizontal:** cuando  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = n^\circ$  tendrá una AH en  $y = n^\circ$
- **Vertical:** cuando  $\lim_{x \rightarrow n^\circ} f(x) = \infty$  (se anula el denominador) tendrá una AV
- **Oblicua:** cuando  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/x = m$  ;  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - x = n$  ; recta:  $y = mx + n$   
 Nota: Si tiene Oblicua no tiene Horizontal



### Ejercicios:

Encuentra las asíntotas oblicuas de las siguientes funciones:

1)  $f(x) = \frac{x^2+2x+3}{x+1}$       2)  $f(x) = \frac{2x^2-5}{x+3}$       3)  $f(x) = \frac{3x^3-1}{x^2-2x}$

Encuentra todas las asíntotas de las siguientes funciones:

4)  $f(x) = \frac{3x^2}{2x+2}$       5)  $f(x) = \frac{-x^2+1}{x^2-4}$       6)  $f(x) = \frac{-x+1}{3x+6}$       7)  $f(x) = \frac{2x^3}{x^2-4}$   
 8)  $y = \frac{4x^2}{x^2-4}$       9)  $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$       10)  $f(x) = \frac{1}{x+3}$       11)  $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Soluciones:

- 1:  $y = x + 1$  ; 2:  $y = 2x - 6$  ; 3:  $y = 3x + 6$   
 4: A.V:  $x = -1$  A.H: No n'hi ha A.O:  $y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$   
 5: A.V:  $x = \pm 2$  A.H:  $y = -1$  A.O: No n'hi ha  
 6: A.V:  $x = -2$  A.H:  $y = -\frac{1}{3}$  A.O: No n'hi ha  
 7: A.V:  $x = \pm 2$  A.H: No hay A.O:  $y = 2x$  ;  
 8: A. Vert:  $x=2$  y  $x=-2$  A. Horiz:  $y=4$   
 9) A. Vert:  $x=1$  y  $x=-1$  A. Oblicua:  $m=1$   
 10) A. Vert:  $x=-3$  A. Horiz.  $y=0$  ; 11) A. Vert:  $x=0$  A. Horiz.  $y=0$

## Continuidad de funciones

Estudiar de los puntos fuera de dominio de la función, los puntos de cambio de pedazo y el tipo de discontinuidad.

a)  $f(x) = \frac{2x^2+2x}{x-x^3}$       b)  $g(x) = \begin{cases} \frac{-5x}{x+1} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2}{x-1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$       c)  $h(x) = \frac{-2x^2+6x-4}{1-x^4}$   
 d)  $f(x) = \begin{cases} x-1 & x < -2 \\ -3 & -2 < x \leq 2 \\ 2x & x > 2 \end{cases}$       e)  $f(x) = \frac{x-2}{x^2+2x-8}$       f)  $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x-1}{x-2} & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ 2x-4 & \text{si } x > 3 \end{cases}$   
 g)  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x^2+3x+2} & \text{si } x < -2 \\ \frac{2x^2}{x^2+x} & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ \frac{3x+1}{x+2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$       h)  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3x+1}{x+2} & \text{si } x < -1 \\ \frac{x^2-1}{x-1} & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ \frac{x+1}{2-x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Sol: a)  $x = -1 \rightarrow$  Evitable  $x = 0 \rightarrow$  Evitable  $x = 1 \rightarrow$  Asimptòtica

b)  $x = -1 \rightarrow$  Asimptòtica  $x = 0 \rightarrow$  Continua  $x = 1 \rightarrow$  Asimptòtica

c)  $x = -1 \rightarrow$  Asimptòtica  $x = 1 \rightarrow$  Evitable

d)  $x = -2 \rightarrow$  Continua  $x = 2 \rightarrow$  Salt

e)  $x = -4 \rightarrow$  Asimptòtica  $x = 2 \rightarrow$  Evitable

f)  $x = 0 \rightarrow$  Salt  $x = 2 \rightarrow$  Asimptòtica  $x = 3 \rightarrow$  Continua

g)  $x = -2 \rightarrow$  Continua  $x = -1 \rightarrow$  Asimptòtica  $x = 0 \rightarrow$  Salt

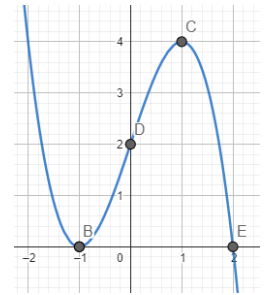
h)  $x = -2 \rightarrow$  Asimptòtica  $x = -1 \rightarrow$  Salt  $x = 1 \rightarrow$  Continua  $x = 1 \rightarrow$  Asimptòtica

Sea:  $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 1 & x \leq 2 \\ 3x + a & x > 2 \end{cases}$  Determina el valor del parámetro  $a$  para que sea continua. (Sol  $a=1$ )

## Ejercicios resueltos

### 0.- Estudio de La función: $y = -x^3 + 3x + 2$

- Dominio:  $\mathbb{R}$
- Recorrido:  $\mathbb{R}$
- Continuidad: Sí, porque es polinómica
- P de corte:  $(-1,0)$ ,  $(2,0)$ ,  $V(0,2)$
- Signos: posit:  $(-\infty, -1) \cup (1,2)$  negat:  $(2, +\infty)$
- Extremos:  $y' = -3x^2 + 3 = 0 \rightarrow y = \pm\sqrt{1} = 1, -1$
- Crecimiento: C;  $(-1,1)$  D  $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
- Máx/min: Máximo:  $(1,4)$  Mínimo:  $(-1,0)$
- Concavidad: Cóncava  $(-\infty, 0)$ ; Convexa  $(0, +\infty)$
- Asíntotas: No tiene porque es polinómica
- Simetría: No,  $f(x) \neq f(-x)$
- Periodicidad: No se repite  $f(x) = f(x + T)$



OFIMEGA

### 1.- Crecimiento y decrecimiento.

Halla intervalos de crecimiento y decrecimiento de  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$

Intervalos	$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, +\infty)$
Signo de la derivada	+	-	+
Función	↗	↘	↗

### 2.- Máximos y mínimos.

Halla los máximos y mínimos de la función  $f(x) = 3x - x^3$

$$f'(x) = 3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \quad 2^a \text{ derivada: } f''(x) = -6x$$

$$f''(-1) = -6(-1) = 6 > 0 \Rightarrow \text{mínimo para } x = -1$$

$$f''(1) = -6(1) = -6 < 0 \Rightarrow \text{máximo para } x = 1$$

### 3.- Concavidad y convexidad.

Halla los intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión de  $f(x) = x^4 - 6x^2 + 4$

$$f'(x) = 4x^3 - 12x \quad f''(x) = 12x^2 - 12 \rightarrow 12x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

Intervalos	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
Signo de la 2ª derivada	+	-	+
Función	∪	∩	∪

### 4 Crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a)  $f(x) = \frac{2}{x}$  en  $x = -1$ ;

b)  $f(x) = \frac{5x-4}{2x+1}$  en  $x = 1$

Sol: a)  $f(x) = \frac{2}{x} = 2x^{-1}$ ;  $f'(x) = -2x^{-2} = \frac{-2}{x^2}$   $f'(-1) = \frac{-2}{(-1)^2} = \frac{-2}{1} = -2 < 0 \rightarrow$  decrec. en  $x = -1$

b)  $f(x) = \frac{5x-4}{2x+1} \rightarrow f'(x) = \frac{5(2x+1) - 2(5x-4)}{(2x+1)^2} = \frac{13}{(2x+1)^2} \rightarrow f'(1) = \frac{13}{(2 \cdot 1 + 1)^2} = \frac{13}{9} > 0 \rightarrow$  creciente en  $x=1$

### 5.- Estudia el crecimiento de la función $y = xe^x$

Sol:  $y' = 1 \cdot e^x + e^x \cdot x = e^x(1+x) \rightarrow e^x(1+x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^x = 0 \\ \text{ó} \\ 1+x = 0 \end{cases}$

Como  $e^x$  es siempre mayor que cero, la única solución posible en  $1+x=0 \Rightarrow x=-1$

Obtenemos los intervalos  $(-\infty, -1)$  y  $(-1, +\infty)$  y estudiamos el signo de la derivada en cada intervalo:

- Para  $x = -2$ ,  $y'(-2) = e^{-2}(1-2) = \frac{1}{e^2} \cdot (-1) = -\frac{1}{e^2} < 0$  (negativa)
- Para  $x = 0$ ,  $y'(0) = e^0(1+0) = 1 > 0$  (positiva)

Se obtienen así los siguientes intervalos:

Intervalos	$(-\infty, -1)$	$(-1, +\infty)$
Signo de la derivada	-	+
Función	↘	↗

**Hoja de ejercicios. Representación y estudio de funciones.** Soluciones al final

Dominio, Recorrido, Continuidad, P. Corte, Signos, Extremos, Crecimiento, Concavidad, Asíntotas, Simetría

Hoja 1:

1.-  $f(x) = x^3 - 3x - 2$

2.-  $f(x) = x \cdot \sqrt{4 - x^2}$

3.-  $f(x) = \frac{4x^2}{x^2 - 4}$

4.-  $f(x) = \frac{x+4}{2-2x}$

5.-  $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$

6.-  $f(x) = \frac{x^2-5x+4}{x-5}$

Hoja 2:

1.  $f(x) = x^3 - 3x + 2$

2.  $f(x) = x^4 - 2x^3$

3.  $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$

4.  $f(x) = |x^2 - 4x|$

5.  $f(x) = \frac{1}{x^2}$

6.  $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

7.  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

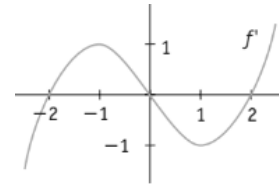
8.  $f(x) = \frac{1}{x+3}$

9.  $f(x) = \frac{2x}{x+1}$

10.  $f(x) = \frac{x^2+x-3}{x}$

11.- **TVM:** Halla la tasa de variación media en el intervalo [1, 4] de la función:  $f(x) = -x^2 + 8x$

12.- Dibuja la gráfica aproximada de  $f(x)$  sabiendo que pasa por los puntos (-2, -2), (0, 1) y (2, 0) y la de su derivada es: →



14.- Halla los valores de a y b en la función  $f(x) = x^2 + ax + b$  sabiendo que pasa por el punto P(-2, 1) y tiene un extremo relativo en el punto de abscisa x = -3

15.- Halla a, b y c en la función  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  sabiendo que el punto P(0,4) es un máximo y el punto Q(2,0) un mínimo.

**Soluciones 1.**

**1.- Representa y estudia la función:  $f(x) = x^3 - 3x - 2$**

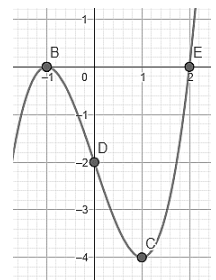
Dominio:  $\mathbb{R}$  Recorrido:  $\mathbb{R}$  Continuidad: Sí P. Corte: (-1,0) y (2,0)

Signos: posit:  $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$  negat:  $(-1, 2)$  Extremos:

Crecimiento: D (-1,1) C  $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$  Máx/min: Máximo: (1,4) Mínimo: (-1,0)

Concavidad: Cóncava  $(0, +\infty)$ ; Convexa  $(-\infty, 0)$

Asíntotas: No tiene porque es polinómica ; Simetría: No,  $f(x) \neq f(-x)$  Periodicidad: No



**2.- Representa y estudia la función:  $f(x) = x \sqrt{4 - x^2}$**

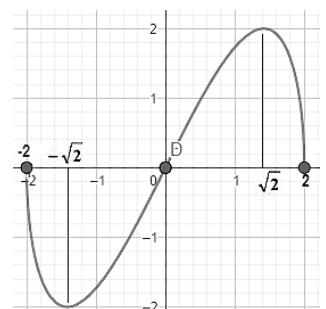
Dominio: [-2,2] Recorrido: [-2, 2]; Continua: No. Sí en el dominio

P. Corte: (0,0); (-2,0) y (2,0), Signos: Positiva(-2,0) Negativa (0,2)

Extremos:  $f'(x) = \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

Mínimo en:  $x = -\sqrt{2}$  Máximo en:  $x = +\sqrt{2}$

Intervalos	$(-2, -\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$	$(\sqrt{2}, 2)$
Signo de $f'(x)$	-	+	-
Función	↘	↗	↘



**3.- Representa y estudia la función:**  $y = \frac{4x^2}{x^2 - 4}$

Dom=  $\mathbb{R} - \{-2,2\}$  ; Corte: (0,0) ; Discontinuidad: asíntota

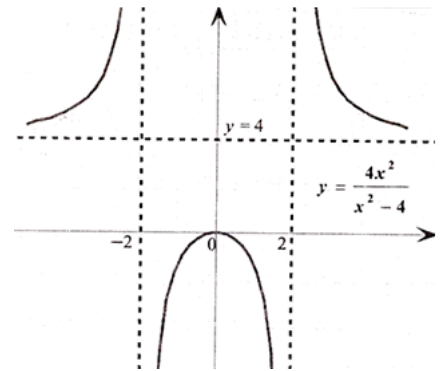
Simétrica par  $f(-x)=f(x)$

Asíntotas: A. Vert: en  $x = 2$  y  $x = -2$  A. Horiz:  $y = 4$

Extremos:  $f'(x) = \frac{-32x}{(x^2-4)^2} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow$  Máximo: (0,0)

Crecimiento:

Intervalos	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
Signo de $f'(x)$	+	+	-	-
Función	↗	↗	↘	↘



**4.- Representa y estudia la función:**  $y = \frac{x+4}{2-2x}$

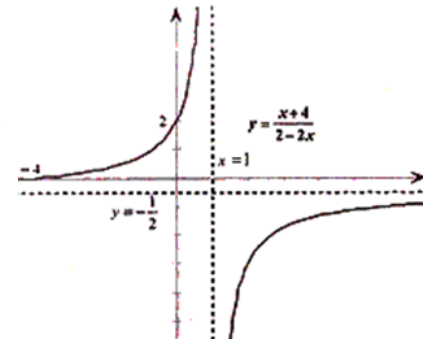
Dom=  $\mathbb{R} - \{1\}$  ; Recorrido:  $\mathbb{R} - \{-1/2\}$ ; Discontinuidad asíntota

P corte: Vert( $x=0$ ) en: (0,2) Horiz( $y=0$ ) en: (-4,0)

Asíntotas: A.Vertical ( $\lim x \rightarrow 1$ ):  $x = 1$  ; A.Horiz ( $\lim x \rightarrow \infty$ ):  $y = -1/2$

Extremos: No tiene extremos ( $y' = 10/(2-2x)^2 \neq 0$ )

Monotonía: Siempre creciente ( $y' > 0$ ) en todo su dominio



**5.- Representa y estudia la función:**  $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$

Dom=  $\mathbb{R} - \{-1,1\}$ ; Recorrido:  $\mathbb{R}$  Discontinuidad asíntota; P corte: (0,0);

Extremos:  $y' = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} = 0 \rightarrow x = 0$ ;  $x = \sqrt{3}$ ;  $x = -\sqrt{3}$

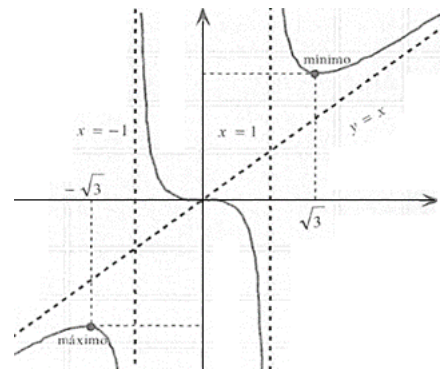
Simétrica impar  $f(-x) = -f(x)$

Crecimiento:

Intervalos	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
$f'(x)$	+	-	-	-	-	+
$f(x)$	↗	↘	↘	↘	↘	↗

Concavidad:

Intervalos	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
Signo de $f''(x)$	-	+	-	+
Función	∩	∪	∩	∪



Máximos/mínimos: Máx  $-\sqrt{3}$ ; Min  $\sqrt{3}$ ; P. inflexión en  $x = 0$

Simetría:  $f(-x) = -f(x) \rightarrow$  simetría impar.

**6.- Representa y estudia la función:**  $f(x) = \frac{x^2-5x+4}{x-5}$

Dom=  $\mathbb{R} - \{5\}$ ; Recorrido:  $\mathbb{R}$  Discontinuidad asíntota

Asíntota: H. Vertical ( $x=5$ )

A. Oblicua en:  $m = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2-5x+4}{x(x-5)} = 1$ ;  $n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2-5x+4}{x-5} - x \right) = 0 \rightarrow y = x$

P corte: PH: (1,0) y (4,0) PV (0, -4/5)

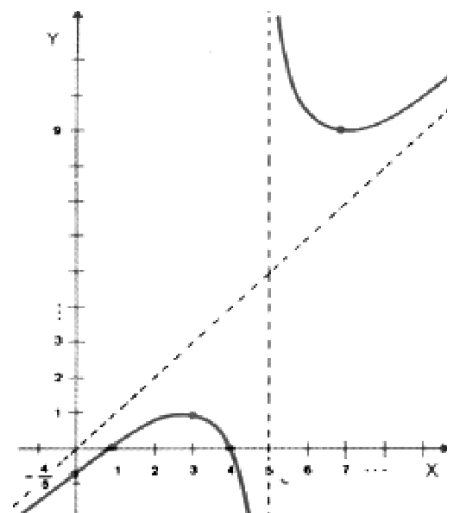
Extremos:  $y' = \frac{(x-3)(x-7)}{(x-5)^2} = 0 \rightarrow x_1=3$  y en  $x_2=7$

Concavidad, máximos y mínimos:

$y'' = \frac{8}{(x-5)^3}$ ;  $y''(3) = -1 < 0$  Máx;  $y''(-1) = 1 > 0$  Min

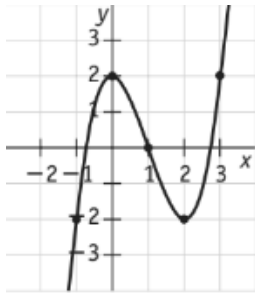
Crecimiento:

$x$	$-\infty$	0	1	3	4	5	7	$+\infty$
$y'$		+	0	-			0	+
$y''$				∩			∪	
$f(x)$	$-\infty$	$-\frac{4}{5}$	0	1	0	$-\infty$	$+\infty$	9
				máx.				mín.



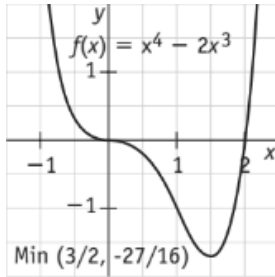
Hoja de Soluciones 2.

1.-  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$



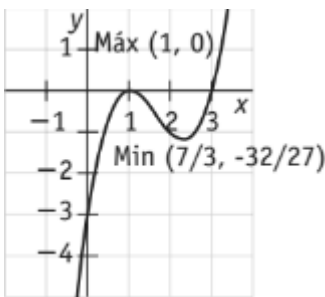
$f'(x) = 3x^2 - 6$ ;  
 si  $f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$  y  $x = 2$   
 Crecimiento:  $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$   
 Decrecimiento:  $(0, 2)$   
 Máximo en  $(0, 2)$   
 Mínimo en  $(2, -2)$   
 Asíntotas: No

2.-  $f(x) = x^4 - 2x^3$

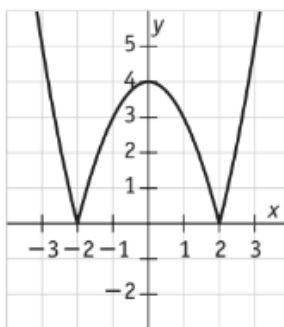


$f'(x) = 4x^3 - 6x^2$   
 Asíntotas: No  
 (no es racional)  
 Min. en:  $(3/2, -27/16)$   
 $f''(x) = 12x^2 - 12x$   
 Punt. Inf:  $(0, 0)$

3.-  $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$

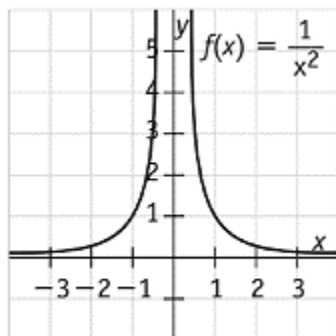


4.-  $f(x) = |x^2 - 4|$

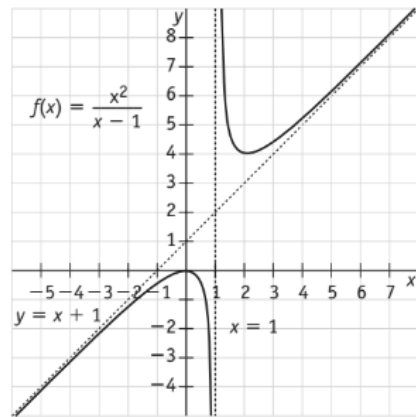


Domínio:  $\mathbb{R}$   
 Recorrido:  $[0, \infty)$   
 (Siempre es positiva)

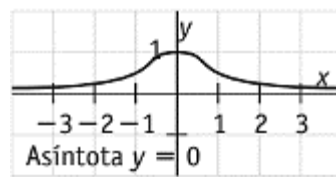
5.-  $f(x) = \frac{1}{x^2}$



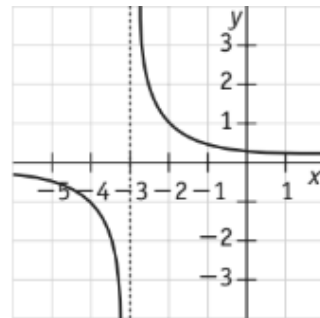
6.-  $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$



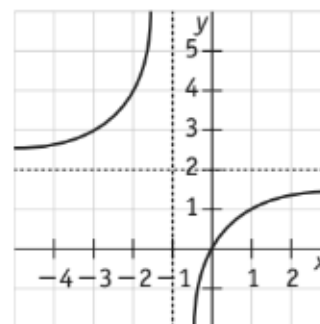
7.-  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$



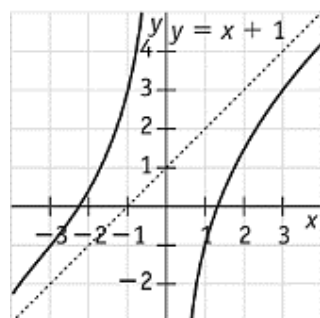
8.-  $f(x) = \frac{1}{x+3}$



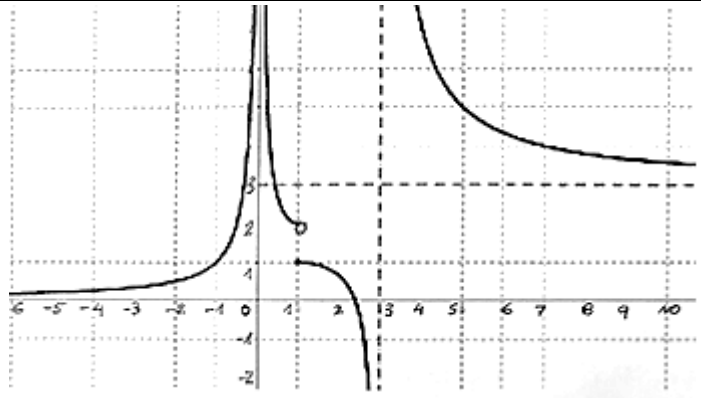
9.-  $f(x) = \frac{2x}{x+1}$



10.-  $f(x) = \frac{x^2+x-3}{x}$

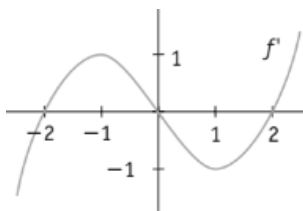


**11. Indica domini, recorregut, signes, continuïtat, creixement i concavitat.**

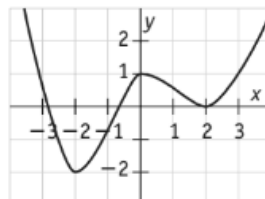


12.- Halla la TVM en el intervalo  $[1, 4]$  de la función:  $f(x) = x^2 + 8x$ :  $TVM[1,4] = \frac{f(4)-f(1)}{4-1} = \frac{16-7}{3} = 3$

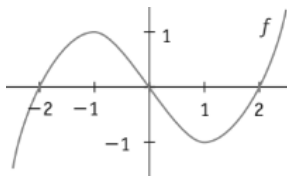
13.- Dibuja la gráfica aproximada de  $f(x)$  sabiendo que pasa por los puntos  $(22, 22)$ ,  $(0, 1)$  y  $(2, 0)$  y la de su derivada es:



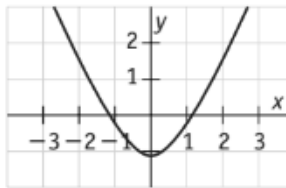
→



14.- Dibuja la gráfica aproximada de  $f'(x)$  sabiendo que la de  $f(x)$  es:



→



15.- Halla los valores de  $a$  y  $b$  en la función  $f(x) = x^2 + ax + b$  sabiendo que pasa por el punto  $P(-2, 1)$  y tiene un extremo relativo en el punto de abscisa  $x = -3$

Si pasa por el punto  $(-2, 1)$ , para  $x = -2$  la función vale  $1$ , es decir,  $(-2)^2 + a(-2) - b = 1 \Rightarrow -a - b = -3$   
 Como tiene un extremo para  $x = -3$  su derivada se anula en dicho punto, es decir,  $f'(x) = 2x + a \Rightarrow 2(-3) + a = 0 \Rightarrow a = 6$  Y sustituyendo en la ecuación  $-a - b = -3$  se obtiene el valor de  $b$ :  $-6 - b = -3 \Rightarrow b = -3$

16. Sigue la función  $f(x) = \frac{1}{x^2 - k}$  en que  $k$  es un paràmetre real diferent de 0. Per als diferents valors del paràmetre  $k$  a) Calculeu el domini i les asímptotes de la funció b) Calculeu els punts amb un màxim o un mínim relatiu.

- a) Si  $k < 0$ ,  $x^2 - k > 0 \Rightarrow \text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ ; 1 asímptota horitz. en  $y=0$   
 Si  $k > 0$  s'anul·la per a  $\pm\sqrt{k} \Rightarrow \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{\pm\sqrt{k}\}$ ; 2 A.Vert. en  $\pm\sqrt{k}$  i una A.Horitz. en  $y=0$
- b)  $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 - k)^2} = 0 \Rightarrow x=0$ ;  $f''(x) < 0 \Rightarrow$  màxim en  $(0, -1/k)$

17.- Halla  $a, b$  y  $c$  en la función  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  sabiendo que el punto  $P(0,4)$  es un máximo y el punto  $Q(2,0)$  un mínimo.

La función pasa por  $(0,4)$ , por tanto,  $a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 4 \Rightarrow d = 4$   
 La función pasa por  $(2,0)$ , por tanto,  $a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d = 0$  Luego  $8a + 4b + 2c + d = 0$   
 $P(0, 4)$  es un máximo:  $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ ;  $f'(0) = 3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$   
 Como el punto  $Q(2,0)$  es un mínimo, su derivada se anula para  $x = 2$ :  $12a + 4b + c = 0$

$$\begin{cases} d = 4 \\ 8a + 4b + 2c + d = 0 \\ c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8a + 4b = -4 \\ 12a + 4b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = -1 \\ 3a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a - b = 1 \\ 3a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 1; b = 3$$

18.- Las pérdidas o ganancias de una empresa, expresadas en centenas de miles de euros cuando han

transcurrido  $t$  años, sigue la función:  $f(t) = \frac{2t-4}{t+2}$

- Determinar el año en que la empresa deja de tener pérdidas.
- ¿Es creciente el beneficio? ¿En qué año la ganancia supera los 100.000 €?
- ¿Existe límite para el beneficio? En caso afirmativo, ¿cuál es ese límite?

Sol:

- Dejará de tener pérdidas cuando  $f(t)=0 \rightarrow t = 2$  deja de tener pérdidas a partir del segundo año.
- La ganancia siempre es creciente:  $f'(t)>0$   
Para una ganancia sup a 100.000:  $f(t)>1 \rightarrow 2t-4>t+2 \rightarrow t > 6$  A partir del sexto año.
- La ganancia tiene un límite, que es de 200000 €.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2t-4}{t+2} = 2$

**Soc 2013:** Un equip científic ha estudiat l'evolució de la població d'una petita illa de la Polinèsia. Com a conclusió, ha determinat que, per tal d'obtenir una bona estimació de la població, cal fer servir l'expressió:  $P(t) = 400 + 18t - 6t^2$  on  $t$  indica els anys transcorreguts des del principi de l'estudi. Es demana: **a.** Determineu la població de l'illa quan va començar l'estudi, i passat un any. Quina ha estat la taxa de creixement en aquest període? **b.** Fins a quants anys després del començament de l'experiment va créixer la població de l'illa? Quin va ser el nombre màxim d'habitants?

Sol : a.  $P(0) = 400$ ,  $P(1) = 412$ . La taxa de creixement en aquest període haurà estat de  $12/412=3\%$  b.  
 $P'(t)=18 - 12t = 0 \rightarrow t = 1.5$ . Per a  $t \geq 1.5$  és negativa. Per tant, es tracta d'un màxim. A més,  $P(1.5) = 424$ .  
La població va créixer durant 1.5 anys, i va arribar a ser de 424 habitants

## 2. Ecuación de la recta tangente.

**Ejemplo:** Calcula la ec. de la recta que es tangente a la función  $y = 3x^2 + 3x$  y es paralela a la recta  $2x - y + 6 = 0$ .

- Pendientes paralelas  $m = m_p$ : como la recta  $y = 2x + 6 \rightarrow m = 2$
- Derivamos la función e igualamos a la pendiente 2:  $6x + 3 = 2 \rightarrow x = -1/6 \rightarrow$  Punto:  $(-1/6, -17/36)$
- Obtenemos la  $n$  con el punto y la pendiente:  $-17/36 = 2 \cdot (-1/6) + n \rightarrow n = -5/2$
- Sustituimos en  $y = mx + n$  la  $m$  y la  $n$  encontrada:  $y = 2x - 5/2$

**Ejercicios:**

**2018 Jun.** Sigui la funció  $f(x) = x^3 - x^2$

- Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica i que és paral·lela a la recta d'equació  $x + 3y = 0$

**2015. 2.-** Sigui la funció  $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$

- Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció  $f$  en el punt d'abscissa  $x = 1$ .

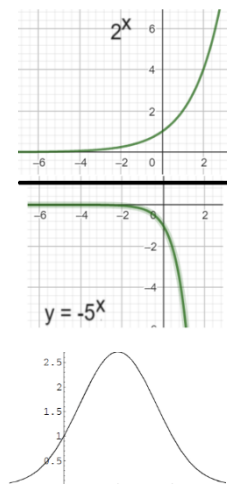
**Juny 2014.- 1b.** Considereu la funció  $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$

- Calculeu les asímptotes verticals, horitzontals i obliqües de la funció  $f$ .
- Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció  $f$  en aquells punts en què la recta tangent sigui paral·lela a la recta  $y = -5x + 4$ .

## Función exponencial: $n^x$

- Su dominio es todo R.
- Es monótona: crece o decrece exponencialmente (muy rápido)
- No tiene ni máximos ni mínimos
- Tiene una asíntota horizontal en una rama y no tiene asíntota vertical
- Siempre tiene un punto de corte vertical en  $\pm 1$  y no tiene punto de corte horizontal

Ejemplos  $\rightarrow$



**Ej.** Sea la función  $f(x) = e^{-x^2+2x}$ .

- Trobeu el seu domini i les possibles interseccions amb els eixos.
- Trobeu els intervals on creix i decreix i els extrems relatius.
- Trobeu les possibles asímptotes.
- Feu la representació gràfica aproximada de la funció.

Dom: R. no tall horitzontal. tall vertical en  $(0,1)$ . asíntota horitzontal en ambdós costats

### 3. Composición de funciones y función inversa

#### Composición de funciones:

Es una nueva función que asocia a cada elemento del dominio de  $f(x)$  el valor de  $g[f(x)]$

Ejemplo:  $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(2x) = 3(2x) + 1 = 6x + 1 \rightarrow (g \circ f)(1) = 6 \cdot 1 + 1 = 7$

El elemento neutro es la función compuesta es la función identidad,  $i(x) = x$ .

Ejemplo: Sean las funciones  $f(x) = 3x + 2$  ;  $g(x) = \frac{x+3}{2x+1}$  hallar  $f \circ g$  y  $g \circ f$

$$g \circ f = g[f(x)] = g(3x + 2) = \frac{3x + 2 + 3}{2(3x + 2) + 1} = \frac{3x + 5}{6x + 5}$$

$$f \circ g = f[g(x)] = f\left(\frac{x + 3}{2x + 1}\right) = 3\left(\frac{x + 3}{2x + 1}\right) + 2 = \frac{7x + 11}{2x + 1}$$

#### Función inversa o recíproca:

NO es lo mismo la *función inversa*,  $f^{-1}(x)$  que la *inversa de la función*  $1/f(x)$ .

▸ La inversa de la función  $f(x)=x+4$  es:  $1/(x+4)$

▸ La función inversa o recíproca de  $(x+4)$  es  $(x-4)$  porque la composición de ambas es la función identidad

Si:  $f(x) = x + 4$  y  $g(x) = x - 4 \rightarrow f \circ g = (x - 4) + 4 = x$  o en valores:  $g \circ f(5) = (5 + 4) - 4 = 5$

➔ **Método para hallar la función inversa:**  $f(x)=x^2$

1º Se escribe la función con  $x$  e  $y$ :

2º - Se despeja la variable  $x$ :

3º - Se intercambian las variables:

Ejemplo:  $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$

Cambiamos  $f(x)$  por  $y$ , y despejamos  $x$ :  $y = \frac{2x+3}{x-1} \rightarrow x = \frac{y+3}{y-2}$  Intercambiamos:  $f^{-1}(x) = y = \frac{x+3}{y-2}$

#### Ejercicios:

1. Dadas las funciones  $f(x) = \sqrt{3x-1}$  y  $g(x) = \frac{3x^2-2}{2x^4+7}$  hallar  $(g \circ f)$ .
2. Hallar  $f^{-1}$  siendo  $f(x) = \frac{4x-3}{3x-4}$
3. Calcula el recorrido de  $f(x) = x^2 - 4x$

$$\text{Sol: } \frac{9x-5}{18x^2-12x+9}$$

$$\text{Sol: } \frac{4x-3}{3x-4}$$