Part 1. Matrius

Suma de Matrius:

Ej.: Determina els elements que falten si A + B = C

$$A=\begin{pmatrix}3&4&5\\5&a&b\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}2&c&d\\e&3&-1\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}f&7&6\\1&-1&0\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}5&4+c&5+d\\5+e&a+3&b-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f&7&6\\1&-1&0\end{pmatrix}\quad \begin{matrix}f=5\\a=-4\end{matrix}\quad \begin{matrix}5+d=6\to d=1\\b-1=0\to b=1\end{matrix}$$

Producte de matrius: Requisit: nº files A = nº columnes B. *Exercici*: Multiplica A(3x2) per B(2x2) ←Dimensió de la matriu

$$A=\begin{pmatrix}1&3\\2&2\\1&1\end{pmatrix}\ \text{i}\ B=\begin{pmatrix}4&3\\2&2\end{pmatrix} \Rightarrow A\cdot B=\begin{pmatrix}1\cdot4+3\cdot2&1\cdot3+3\cdot2\\2\cdot4+2\cdot2&2\cdot3+2\cdot2\\1\cdot4+1\cdot2&1\cdot3+1\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&9\\12&10\\6&5\end{pmatrix}$$

Matrius especials: *Identitat*: Diagonal 1 reste 0 ; *Nula*: Tots elements 0 ; *Diagonal*: 0 tots els que no estan a la diagonal. *Triangular superior:* 0 elements per baix de la diagonal principal; *Adjunta*: substituir cada element pel seu determinant.

Transposada: (o Trasposta) les files de A^t són les columnes de A. *Exercici*: Calcula $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

$$A=\begin{pmatrix}1&7\\0&3\\5&-4\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}-4&1\\5&8\end{pmatrix}\quad \left[\begin{pmatrix}1&7\\0&3\\5&-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4&1\\5&8\end{pmatrix}\right]^t=\begin{pmatrix}-4&1\\5&8\end{pmatrix}^t\cdot\begin{pmatrix}1&7\\0&3\\5&-4\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}-4&5\\1&8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&5\\7&3&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}31&15&-40\\57&24&-27\end{pmatrix}$$

Simètrica: és una matriu quadrada la diagonal principal es eix de simetria on $A^t = A$, és a dir, si $a_{ij} = a_{ji}$

Antisimètrica: Diagonal principal 0 i $A^t = -A$, és a dir, si $a_{ij} = -a_{ji}$ *Exercici*: Completa la matriu perquè sigui antisimètrica:

$$\begin{pmatrix}a&1&b\\c&0&-3\\2&d&e\end{pmatrix}\quad \text{Sol}\ \begin{pmatrix}a&1&b\\c&0&-3\\2&d&e\end{pmatrix}\ \text{és antisimètrica si: } a=0, b=-2, c=-1, d=3, e=0.$$

Rang de la matriu: calcula el rang per mitjà del mètode de Gauss

$$\begin{pmatrix}3&2&7\\0&-1&2\\-5&3&0\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3=F_3+\frac{5}{3}F_1]{}\begin{pmatrix}3&2&7\\0&-1&2\\0&\frac{19}{3}&\frac{35}{3}\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3=F_3+\frac{19}{3}F_2]{}\begin{pmatrix}3&2&7\\0&-1&2\\0&0&\frac{73}{3}\end{pmatrix}\quad \text{rang}=3$$

$$\begin{pmatrix}1&-3&5&7\\8&-3&-2&14\\2&1&-4&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{F_2=F_2-8F_1\\F_3=F_3-2F_1}]{}\begin{pmatrix}1&-3&5&7\\0&21&-42&-42\\0&7&-14&-14\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3=F_3-\frac{1}{3}F_2]{}\begin{pmatrix}1&-3&5&7\\0&21&-42&-42\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad \text{rang}=2$$

Matriu inversa:

a) Matriu inversa mitjançant la definició:

$$\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\ \to\ \left.\begin{matrix}3a-5c=1\\3b-5d=0\\-a+2c=0\\-b+2d=1\end{matrix}\right\}\ \to\ \left\{\begin{matrix}a=2\\b=5\\c=1\\d=3\end{matrix}\right.\ \text{matriu inversa: }\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}$$

b) Matriu inversa pel mètode de Gauss:

$$\begin{pmatrix}-3&7\\2&-5\end{pmatrix}\quad \left(\begin{array}{cc|cc}-3&7&1&0\\2&-5&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_2=F_2+\frac{2}{3}F_1]{}\left(\begin{array}{cc|cc}-3&7&1&0\\0&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_1=F_1+21F_2]{}\left(\begin{array}{cc|cc}-3&0&15&21\\0&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{F_1=-\frac{1}{3}F_1\\F_2=-3F_2}]{}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&-5&-7\\0&1&-2&-3\end{array}\right)$$

c) Matriu inversa pel mètode dels determinats:

$$A=\begin{pmatrix}4&3\\2&2\end{pmatrix}\Rightarrow \det A=\begin{vmatrix}4&3\\2&2\end{vmatrix}=4\cdot2-2\cdot3=2\Rightarrow \text{trasposta } A^t=\begin{pmatrix}4&2\\3&2\end{pmatrix}\quad \text{adjunts } A^{t\prime}=\begin{pmatrix}2&-3\\-2&4\end{pmatrix}\quad A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&-3\\-2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-\frac{3}{2}\\-1&2\end{pmatrix}$$

Propietats:

0 = element neutre suma: $A + 0 = A$	I = element neutre producte: $A \cdot I = A$
Commutativa de la suma: $A + B = B + A$	Commutativa del producte: NO
Inversa: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$	la diagonal principal es un eje de simetría
Associativa: $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$	Distributiva: $A\cdot(B + C) = A\cdot B + A\cdot C$

Potència de Matrius.

Fem el producte $A^n = A \cdot A \cdot \ldots$ *Matrius cícliques*: Si tendeix a una successió estable, trobar el patró.

Exercici) Determina el valor de A^n, per a cada n i troba $A^{350} - A^{250}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{En general: } A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3n & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{350} - A^{250} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1.050 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 750 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 300 & 0 \end{pmatrix}$$

CCSS JUNY 2013: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Sigui la matriu A.

a) Calculeu A^2 i A^3.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Calculeu A^{201} i A^{344} : Sol: $A^{201} = A \cdot A\ A =$. Com que 344 és múltiple de 4, 344 A = Id

Sistemes

Mètode de reducció per files, mètode de Gauss:

1.- Escalonar inferiorment per files la matriu ampliada A'.

2.- Es poden canviar l'ordre de les columnes (excepte l'última) anotant el canvi d'ordre en les incògnites

3.- Qualsevol fila nul·la es pot suprimir, simplificant així la matriu.

4.- Si ens trobem amb una fila que té tots els elements nuls excepte l'últim, el sistema és incompatible.

Tipus sistema:

Teorema de Rouché-Frobenius

- Compatible R(A) = R (A')
  - R(A) = R (A') = Nº Inc ➡ Sistema Compatible Determinat (SCD)
  - R(A) = R (A') < Nº Inc ➡ Sistema Compatible Indeterminat (SCI)
- Incompatible R(A) ≠ R (A') ➡ Sistema Incompatible (SI)

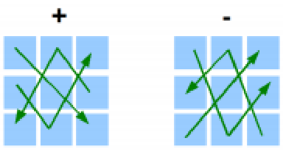
Exemple : Resoleu el següent sistema de 3 equacions amb 3 incògnites pel mètode de *Gauss-Jordan*.

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ x-y-z=-4 \\ x+y-z=0 \end{cases} \Rightarrow A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & -2 & -10 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{matrix} z=3 \\ y=2 \\ x=1 \end{matrix}$$

Determinats

1. Si multipliquem una columna per un nombre, el determinant queda multiplicat per aquest nombre
2. Un determinant que contingui dues columnes iguals o una columna de zeros, val zero.
3. El valor del determinant no varia si bescanviem les files per les columnes conservant l'ordre.

1) Regla de Sarrus:



b) Menor complementari:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - 3 \cdot \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + (-2) \cdot \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = -73$$

Mètode de Cramer:

Determinants que resulten en substituir la columna de cada incògnita per la columna de terme independent, dividits per el determinant de la matriu A.

Exemple:

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ x-y-z=-4 \\ x+y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \det A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 4 \Rightarrow \det x = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 4 \quad \det y = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 8 \quad \det z = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 12$$

$$x = \frac{\det x}{\det A} = \frac{4}{4} = 1 \ , \quad y = \frac{\det y}{\det A} = \frac{8}{4} = 2 \ , \quad z = \frac{\det z}{\det A} = \frac{12}{4} = 3$$

PAU - Secció Matrius

(veure solucions al final – enllaç a l'enunciat)

1) CSS 2012 S. 6. Donades les matrius A, B i C :
   a. Trobeu una matriu X tal que $A\cdot B + X = C$.
   b. Calculeu C^3.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

2) CSS 2012. 3. Considerem les matrius A i B:
   a. Justifiqueu si és possible efectuar $A\cdot B$ o $B\cdot A$. En cas afirmatiu, calculeu-ho.
   b. Calculeu B^2 i B^3.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ -1 & 0 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 5\end{pmatrix}$$

3) CSS 2014J. 4. Siguin les matrius **A** i **I**, determineu **x** per tal que es verifiqui l'equació: $\mathbf{A^2-6A+5I=0}$, on 0 és la matriu en què tots els elements són 0.

$$A=\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & x\end{pmatrix}\ \text{i}\ I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

4) CSS 2014J. 3b. Siguin les matrius. A, B, I
   a) Determineu una matriu X que verifiqui $A\cdot X=I$
   b) Determineu una matriu Y que verifiqui $A\cdot Y\cdot A=B$

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\ I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

5) CSS 2015 – 4. Siguin les matrius A y B:
   a) Calculeu les matrius A + B i A · B
   b) Determineu els valors de a, b i c que fan $A + B = A\cdot B$

$$A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 2 & -a\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}b & c\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

6) CSS 2015S – 4. Trobeu les matrius A i B sabent que:

$$A-2B=\begin{pmatrix}0 & -3\\ -3 & 4\end{pmatrix}\quad \text{i}\quad 2A+3B=\begin{pmatrix}7 & 15\\ 8 & -6\end{pmatrix}$$

7) CSS 2013. 2 Siguin les matrius A i B.
   a) Determineu el valor dels paràmetres a i b que fa que $A\cdot B = B\cdot A$
   b) Determineu el valor de a per al qual es verifica $A^2 = 2A$

$$A=\begin{pmatrix}2 & a\\ -2 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & 0\\ b & -1\end{pmatrix}$$

8) CSS 2017. Considereu les matrius A, B i C, on m i n són dos nombres reals.
   a) Comproveu que es compleix la igualtat: $(A-B)\cdot(A+B) = A^2 - B^2$.
   b) Determineu i per tal que les matrius i commutin, és a dir: B · C = C · D

$$A=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 5 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\ \text{i}\ C=\begin{pmatrix}1 & -1\\ m & n\end{pmatrix}$$

9) CSS 2017. 6. Considereu les matrius A y B.
   a. Calculeu el valor del paràmetre a per al qual es compleix que $A\cdot B=B\cdot A$
   b. Per al valor a=2 , trobeu una matriu X, tal que $AXA = B$.

$$A=\begin{pmatrix}a & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\ \text{i}\ B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

10) CSS 2016 – 6b. Considereu les matrius A i B:
   a) Calculeu les matrius $A\cdot B$ i $B\cdot A$
   b) Justifiqueu si en algun cas és possible calcular P^2 quan P és una matriu no quadrada.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}\ \text{i}\ B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

11) CSS 2015 – 4B. Donades les matrius A i B:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\ \text{i}\ B=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

Calculeu la matriu X que compleix: $X\cdot A+B^2=2\cdot I_2$, on $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. ($I_2$ = Identitat)

12) CSS 2018. Considereu les matrius $M=\begin{pmatrix}2 & a\\ -a & 0\end{pmatrix}$ a) Determineu a de manera que $M^2=\begin{pmatrix}3 & 2a\\ -2a & -1\end{pmatrix}$
   b) Determineu a de manera que $M^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$. ($M^{-1}$ matriu inversa, a és un nombre real)

13) CSS SET 2018. a) Trobeu les matrius A i B que compleixen que: $A-2B=\begin{pmatrix}1 & 13\\ 0 & -5\end{pmatrix}$ i $2A+3B=\begin{pmatrix}2 & -9\\ 7 & 4\end{pmatrix}$

   b) Determineu el valor de a , b , c i d perquè es verifiqui que $\begin{pmatrix}1 & 2\\ a & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & c\\ 2 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b & -5\\ d & -7\end{pmatrix}$

14) CSS 2019. 2. Resoleu les qüestions següents: a) Considereu la matriu $\boldsymbol{M}$
   Calculeu els valors de a i b per tal que es verifiqui la igualtat $\boldsymbol{M}2 + a\cdot\boldsymbol{M} + b\cdot\boldsymbol{I} = \mathbf{0}$,
   b) Considereu la matriu $\boldsymbol{A}$. Trobeu totes les matrius $\boldsymbol{B}$ que commuten amb la matriu $\boldsymbol{A}$, és a dir, que compleixen que $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$.

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 2 & -1\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

15) CSS Set 2019. 1. Volem enviar una data codificada. Per a fer-ho, considerem el vector de tres components X = (d m a), en el qual d expressa el dia, m el mes i a l'any. Tot seguit, fem l'operació X · A + B, en què A i B són matrius. El resultat d'aquesta operació és el vector codificat que enviem.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 5 \end{pmatrix}$

a) Si la data que volem enviar és l'1 de gener de 2019, és a dir, si X = (1 1 2019), quin és el vector codificat que enviarem?

b) Si el vector codificat que ens ha arribat és (2036 1 –13), quina és la data sense codificar?

16) CSS 2020. Considereu les matrius A i B. a) Comprova que es compleix que $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{2}$

b) Resoleu l'equació matricial $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$ ($\boldsymbol{I}$ és la matriu identitat)

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ i $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

17) CSS Set 2020. Considerem la matriu A. Estudieu per a quins valors de x la matriu inversa de la matriu A coincideix amb la seva oposada, és a dir, $A^{-1} = -A$

$A = \begin{pmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{pmatrix}$

Científic

18) CT Set 2007 Considereu la matriu A. Trobeu els valors de p i q que fan que es verifiqui $A^2 = A$. En aquest cas, raoneu sense calcular què val A^{10}.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & q \end{pmatrix}$

19) CT 2015. 5. Sigui A una matriu quadrada que compleix que $\boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{I}$, en què $\boldsymbol{I}$ és la matriu identitat.

a) Demostreu que la matriu A té inversa i que $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^2$

b) En el cas de $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, calculeu si hi ha cap valor del paràmetre a per al qual $\boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{I}$

20) CT 2015 S2 Q5 a) Calculeu la matriu de la forma $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ que satisfà $A^2 - A = I$, en què I és la matriu identitat

b) Calculeu A^{-1} i comproveu que el resultat es correspon amb el que obteniu de deduir la matriu A^{-1} a partir de la igualtat $A^2 – A = I$.

21) CT 2015. S4 Q5.- Sigui A una matriu quadrada que compleix que $\boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{I}$, en què $\boldsymbol{I}$ és la matriu identitat.

a) Demostreu que la matriu A té inversa i que $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^2$

b) En el cas de $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, calculeu si hi ha cap valor del paràmetre a per al qual $\boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{I}$

22) CT Jun 2014.- 6. Responeu a les qüestions següents:

a) Demostreu que si A és una matriu quadrada que satisfà la igualtat $A^2 = I$, on I és la matriu identitat, aleshores A és invertible i A^{-1} satisfà $(A^{-1})^2 = I$.

b) Calculeu l'expressió general de les matrius de la forma $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 2 \end{pmatrix}$ amb b≠0 que satisfan la igualtat $A^2 = I$.

23) CT Jun 2014.- 1 Considereu la matriu M. →

$M = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a+1 & (a+1)^2 \\ 1 & a-1 & (a-1)^2 \end{pmatrix}$

a) Calculeu el rang de la matriu M en funció dels valors del paràmetre a.

b) Discutiu i resoleu el sistema d'equacions lineals. $M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

24) CT 2007. Donada la matriu següent depenent d'un paràmetre m, Estudieu el seu rang segons m

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & m & 2m \\ m & 2 & 2+m \end{pmatrix}$

25) CT 2011 S2 Q4. Sigui la matriu A, a) Calculeu A^2 i A^3 . b) Deduïu el valor de $101\,A^{101}$.
NOTA: Treballeu amb radicals; no utilitzeu la representació decimal.

$A = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

26) CT 2004 S4 Q5. Considereu el vector $\vec{v}$ i la matriu A.

$\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

a) Trobeu tots els vectors $\vec{v}$ que fan que $A \cdot \vec{v} = \vec{w}$.

b) Quina condició han de complir a, b i c per tal que a $A \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ no tingui cap vector $\vec{v}$ solució?

Part 2. Sistemes i problemes

(Solucions al final)

1) CT 2015 – S2 Considereu el sistema d'equacions lineals següent:
a) Calculeu per a quins valors del paràmetre a el sistema té més d'una solució
b) Resoleu el sistema per al cas a=-3

$$\left.\begin{array}{rcl}-3x+2y+3z&=&0\\(a-2)y-3z&=&0\\-x-y+(-a-3)z&=&0\end{array}\right\}.$$

2) 2015. 1.- Considereu el sistema d'equacions en què *m* és un paràmetre real.
a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre *m*
b) Resoleu el sistema per a *m* = 1.

$$\left.\begin{array}{rcl}x-2y-z&=&0\\-mx+3y+z&=&0\\x+y&=&4\end{array}\right\}$$

3) Juny 2014.- 2b. Responeu a les qüestions següents:
a) Discutiu el sistema d'equacions lineals en funció dels valors de k.
b) Resoleu el sistema per a k=1

$$\begin{cases}(k-1)y+(k^2-1)z=0\\(4k+1)x-y-7z=1\\x+y+z=0\end{cases}$$

4) 2016: 1. Considereu el sistema d'equacions lineals següent: →
Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre real *k*.
Resoleu el sistema per al cas *k* = 0.

$$\left.\begin{array}{rcl}2x+4y+4z&=&4k-7\\2x-ky&=&-1\\-2x&=&k+1\end{array}\right\}$$

5) CSS 2016S – 3. a) La matriu ampliada d'un sistema de tres equacions amb tres incògnites es A →
Justifiqueu, sense resoldre'l, si el sistema es incompatible, compatible indeterminat, o determinat.
b) Considereu ara la matriu d'un altre sistema de tres equacions amb tres incògnites B: →
Justifiqueu si es incompatible o compatible i, en aquest darrer cas, resoleu-lo.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0&0&1&1\\0&-1&1&0\\5&2&-2&0\end{array}\right)\qquad\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&0&3\\1&0&1&2\\1&1&-1&1\end{array}\right)$$

6) 2013 S5 Q2 La matriu de coeficients d'un sistema d'equacions lineals homogeni és:
a) Per a quins valors del paràmetre a el sistema té una solució? Quina és aquesta solució única?
b) Resoleu el sistema si a = 2

$$A=\begin{bmatrix}-1&2&3\\2&1-a&0\\4&1&2a+2\end{bmatrix}$$

7) PAU 2011 S4 Q4. Analitzeu, segons els valors del paràmetre k. →

$$\begin{cases}2x+y-z=k-4\\(k-6)y+3z=0\\(k+1)x+2y=3\end{cases}$$

8) PAU 2020 S1 Q2. a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre k . →
b) Resoleu, si és possible, el sistema per al cas k = 0.

$$\begin{cases}5x+y+4z=19\\kx+2y+8z=28\\5x+y-kz=23+k\end{cases}$$

9) CSS 2016 - 3. Sigui el sistema d'equacions →
a) Justifiqueu si és compatible determinat.
b) Resoleu el sistema format per les dues primeres equacions

$$\left.\begin{array}{rcl}x-y+z&=&0\\3x+4y-5z&=&6\\x-y&=&2\end{array}\right\}$$

10) PAU 2020 S3Q3. Considereu el sistema d'equacions lineals següent →
a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre a.
b) Resoleu el sistema per al cas a = 2

$$\begin{cases}ax+y=a\\x+ay+z=5\\x+2y+z=5\end{cases}$$

11) CSS 2014J. 1. En Pol, la Júlia i la Maria han comprat un regal. La Júlia ha gastat la meitat que la Maria, i en Pol n'ha gastat el triple que la Júlia.
a. Expliqueu raonadament si amb aquestes dades en tenim prou per a determinar quant ha gastat cadascun d'ells.
b. Si a més ens diuen que entre tots tres han gastat 63€, quant ha gastat cadascú?.

12) CSS 2014J. 6b. Un botiguer vol determinar la quantitat de bitllets de 5€, 10€ i 20€ que ha de tenir a la botiga per a atendre millor els clients. En total, vol tenir 1.375€ en 90 bitllets a la caixa. A més, s'ha adonat que li convé tenir el doble de bitllets de 20€ que de 5€ i 10€ junts. Quants bitllets haurà de tenir de cada classe?

13) CSS 2014S - 1. Si un venedor d'articles de luxe fa un descompte del 20% sobre el preu de venda d'un article, guanya 1.848€ sobre el preu de cost; si fa un descompte del 50%, perd 420€.
a) Calculeu el preu de cost i el preu de venda de l'article. [1 punt]
b) Quin percentatge aplica sobre el preu de cost per calcular el preu de venda?

(Solucions)

14) CSS 2016. La butlleta guanyadora d'una loteria està formada per tres nombres. Sabem que la suma del primer i el segon excedeix en dues unitats al tercer; que el primer nombre menys el doble del segon és deu unitats menor que el tercer, i que la suma dels tres nombres és 24. Quina és la butlleta guanyadora?

15) CSS 2016 S – 1. La Maria té el doble dels diners que tenen en Pol i la Julia junts. En Pol te la sisena part de diners que la Maria. La Jùlia té el doble de diners que en Pol. La Maria té el triple dels diners que la Jùlia.
a) Amb aquestes dades, podem saber quants diners tenen cadascun d'ells? Trobeu el conjunt de solucions possibles.
b) Si en Pol té 35 euros, quants diners tenen la Maria i la Julia?

16) **CSS** 2015 – 1B. El mes de gener passat, en Joan, la Carla i la Laura van invertir en borsa. La Carla va invertir el doble que la Laura. Aquell mes, en Joan i la Carla van tenir uns guanys del30 %, mentre que la Laura va tenir unes pèrdues del 10 %. De resultes d'això, van obtenir conjuntament uns guanys del 20 %. Van acordar tornar a invertir el febrer, incrementant cadascú un 10 % les seves inversions inicials. Si el mes de febrer van invertir entre tots tres 770 €, quina quantitat havia invertit cadascú el mes de gener?

17) **CSS** 2013. 1b He anat a una botiga i he decidit comprar un pantaló, una camisa i unes sabates. Si faig la compra avui, em costarà tot plegat 120 €. A més, actualment, la camisa i les sabates costen, plegades, el doble del pantaló. Si m'espero una setmana, el pantaló i les sabates tindran un descompte del 20%, mentre que la camisa només en tindrà del 10%. D'aquesta manera pagaré 99 €. Quin és el preu inicial de cada article?

18) **CSS** 2015S – 1. Una persona decideix invertir un total de 60.000€ repartits entre entitats d'estalvi diferents: A, B i C. Aquesta persona decideix que la quantitat invertida a l'entitat *A* sigui la meitat de la quantitat total invertida a les entitats B i C. A més, sabem que l'entitat A li ha assegurat una rendibilitat del 5%, l'entitat B una rendibilitat de l10% i l'entitat C una rendibilitat del 2%. Calculeu les quantitats invertides a cada entitat d'estalvi si sabem que aquest inversor obtindrà uns beneficis totals de 4.200 €.

19) **CSS** 2014S – 3. El propietari d'un bar ha comprat refrescos, cervesa i vi per un total de 5.000€, sense impostos. El vi val 600€ menys que els refrescos i la cervesa plegats. Si tenim en compte que pels refrescos ha de pagar un IVA del 6%, per la cervesa un del 12% i pel vi un del 30%, aleshores la factura total, amb els impostos inclosos, puja a 5.924 €. Calculeu quant ha pagat, sense IVA, per cada classe de beguda.

20) **CSS 2017** Jun. Tenim unes quantes monedes d'un euro distribuïdes en tres piles. Passem dotze monedes de la tercera pila a la segona i, a continuació, en passem deu de la segona pila a la primera. Un cop fet això, les tres piles tenen la mateixa quantitat de monedes. a) Amb aquestes dades, podem determinar la quantitat de monedes que hi havia inicialment en cada pila? Raoneu la resposta. b) Esbrineu la quantitat de monedes que hi havia inicialment a cada pila si sabem que en total hi ha **51** monedes

21) 2005 S4 P1: De tres nombres, x , y i z , sabem el següent: que el primer més el segon sumen 0; que el primer més el tercer sumen 1; que la suma de tots tres val 0 i, per últim, ens diuen que el primer multiplicat per un nombre k més el doble de la suma del segon i del tercer dona 1. Es demana: a) què podem dir del valor de k ? b) quan valen els tres nombres?

22) **PAU ASTURIAS 2020** En una oficina se hicieron la semana pasada un total de 550 fotocopias entre fotocopias en blanco y negro y fotocopias en color. El coste total de dichas fotocopias fue de 3,5 euros, siendo el coste de cada fotocopia en blanco y negro de *m* céntimos de euro, y el coste de cada fotocopia en color cuatro veces el coste de una en blanco y negro.
a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el numero de fotocopias en blanco y negro y en color hechas la semana pasada.
b) ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? ¿Cuántas fotocopias en blanco y negro se realizaron en la oficina si cada fotocopia en color costó 2 céntimos?.

(Solucions)

Full de Solucions:

Tornar a enunciats

1) CSS 2012 S. 6 $A\cdot B + X = C \xrightarrow{\cdot B} \Rightarrow X = \begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ b. $C^3 = C^2\cdot C = \begin{pmatrix}-1 & 4\\ -2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5 & 2\\ -1 & -5\end{pmatrix}$

2) CSS 2012. 3 a. $A\cdot B$ No és possible nombre de columnes diferent $B\cdot A = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ -1 & 0 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ -5 & 0 & 20\end{pmatrix}$

b. $B^2 = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -6\\ 0 & 25\end{pmatrix}, B^3 = B^2\cdot B = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -6\\ 0 & 25\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -31\\ 0 & 125\end{pmatrix}$

Tornar

3) CSS 2014J. 4 $\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & x\end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & x\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}x^2-6x+5 & 0\\ 0 & x^2-6x+5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ $x=1,$ $x=5.$

4) CSS 2014J. 3b a. $A^{-1} = \begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}.$ b. $A\cdot Y\cdot A = B \rightarrow Y = A^{-1}\cdot B\cdot A^{-1} = \begin{pmatrix}8 & -13\\ -5 & 8\end{pmatrix}$

5) CSS 2015 – 4 a. $A+B = \begin{pmatrix}1+b & a+c\\ 3 & 1-a\end{pmatrix}$ $A\cdot B = \begin{pmatrix}b+a & c+a\\ 2b-a & 2c-a\end{pmatrix}$ b. A + B = A · B -> $a=1, b=2, c=\frac{1}{2}$

6) CSS 2015S – 4. Sol: fer el sistema: $2A-4B = \begin{pmatrix}0 & -6\\ -6 & 8\end{pmatrix}$ -> $A = \begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}$ Tornar

7) CSS 2013. 2 a. $A\cdot B = \begin{pmatrix}6+ab & -a\\ -6 & 0\end{pmatrix}$, $B\cdot A = \begin{pmatrix}6 & 3a\\ 2b+2 & ab\end{pmatrix}$, que implica a = 0, b = - 4.

b. $A^2 = \begin{pmatrix}2 & a\\ -2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & a\\ -2 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4-2a & 2a\\ -4 & -2a\end{pmatrix}$. $2A = \begin{pmatrix}4 & 2a\\ -4 & 0\end{pmatrix}$. iguals quan a = 0

8) CSS 2017 a) $(A-B)\cdot(A+B) = \begin{pmatrix}1 & 4\\ 4 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 6\\ 6 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}25 & 10\\ 10 & 25\end{pmatrix}$ $A^2 = \begin{pmatrix}26 & 10\\ 10 & 26\end{pmatrix}$ i $B^2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

b) $B\cdot C = \begin{pmatrix}m & n\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ $C\cdot B = \begin{pmatrix}-1 & 1\\ n & m\end{pmatrix}$ $m=-1$ i $n=1$.

9) CSS 2017. 6 *a)* $A\cdot B = \begin{pmatrix}2a & -a+1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ i $B\cdot A = \begin{pmatrix}2a & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $a=1$. b) Aïllant $X = A^{-1}\cdot B\cdot A^{-1}$, $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ $X = \frac{1}{8}\begin{pmatrix}4 & -5\\ 0 & 2\end{pmatrix}$

10) CSS 2016 – 6b a) $A\cdot B = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & -2 & 3\\ 5 & -3 & 8\end{pmatrix}, B\cdot A = \begin{pmatrix}9 & -2\\ 6 & -2\end{pmatrix}$

b) nº de columnes primera ≠ nº de files de la segona → no es pot calcularP^2

Tornar

11) CSS 2015 – 4B $X = (2\cdot I_2 - B^2)\cdot A^{-1}$ -> $A^{-1} = \begin{pmatrix}-1 & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ -> $X = \begin{pmatrix}-7 & 0\\ 4 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7 & -\frac{7}{2}\\ 4 & \frac{5}{2}\end{pmatrix}$

12) CSS 2018

a) $M^2 = \begin{pmatrix}2 & a\\ -a & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & a\\ -a & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4-a^2 & 2a\\ -2a & -a^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 2a\\ -2a & -1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}a=1\\ a=-1\end{matrix}$ b) $M\cdot M^{-1} = \begin{pmatrix}2 & a\\ -a & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-a & 2+2a\\ 0 & -a\end{pmatrix} = I \Rightarrow a=-1$

13) CSS SET 2018.

a) $\cancel{2}(\cancel{A}-2B) - (\cancel{2A}+3B) = -7B \Rightarrow B = \begin{pmatrix}0 & -5\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ a & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & c\\ 2 & -4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & c-8\\ 2 & ac-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b & -5\\ d & -7\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}a=-1 & b=4\\ c=3, & d=2\end{matrix}$

Tornar

14) CSS 2019. 2 $\begin{pmatrix}14 & 5\\ 2 & 11\end{pmatrix} + a\cdot\begin{pmatrix}2 & 5\\ 2 & -1\end{pmatrix} + b\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ $\left\{\begin{matrix}a=-1,\\ b=-12.\end{matrix}\right.$ b) $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ $\begin{matrix}z=y,\\ t=x-y\end{matrix}$

15) CSS Set 2019. 1 a) $(1\ \ 1\ \ 2019)\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} + (5\ \ -5\ \ 5) = (2025\ \ -4\ \ 3)$ b) $(x\ \ y\ \ z)\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} + (5\ \ -5\ \ 5) = (2036\ \ 1\ \ -13)$.

16) CSS 2020. a) $A^2 = \begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}\cdot A = I. \Rightarrow A^2\cdot A = \begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = I$ b) $X = A^{-1}\cdot(I-B) = \begin{pmatrix}2 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}$.

17) CSS Set 2020 $-A = \begin{pmatrix}-x & 2\\ -5 & x\end{pmatrix} \Rightarrow A\cdot A^{-1} = I, \Rightarrow \begin{pmatrix}x & -2\\ 5 & -x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-x & 2\\ -5 & x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x^2+10 & 0\\ 0 & -x^2+10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $\begin{matrix}x=-3\\ x=3\end{matrix}$

Científic

Tornar

18) CT Set 2007 $A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & q \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ pq & p+q^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & q \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} p=0 \\ q=1 \end{matrix}$ $A^{10} = A$

19) CT 2015. 5 ***a)*** $A\cdot A^2 = A^2\cdot A = I$, $\boxed{\text{per tant } A \text{ té inversa i } A^{-1} = A^2}$.

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 1-a & -a \\ 1 & 4-a \end{pmatrix}$ i $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3a-a^2 \\ a-3 & 3a-8 \end{pmatrix}$ $\left.\begin{matrix} 1 & = & 1 \\ 3a-a^2 & = & 0 \\ a-3 & = & 0 \\ 3a-8 & = & 1 \end{matrix}\right\}$ $a=3$ $\boxed{\text{Així per a } a=3,\ A^3 = Id}$.

Tornar

20) CT 2015 S2 Q5

a) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1+a & a \\ 1 & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 1 \Rightarrow \boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$.

b) $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}} \Rightarrow A\cdot(A-I) = I = (A-I)\cdot A. \Rightarrow \boxed{A^{-1} = A - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}$

21) CT 2015. S4 Q5. ***a)*** $A\cdot A^2 = A^2\cdot A = I$, $\boxed{\text{per tant } A \text{ té inversa i } A^{-1} = A^2}$.

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 1-a & -a \\ 1 & 4-a \end{pmatrix}$ i $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3a-a^2 \\ a-3 & 3a-8 \end{pmatrix}$ $\left.\begin{matrix} 1 & = & 1 \\ 3a-a^2 & = & 0 \\ a-3 & = & 0 \\ 3a-8 & = & 1 \end{matrix}\right\}$ $a=3$ $\boxed{\text{Així per a } a=3,\ A^3 = Id}$.

22) CT Jun 2014.- 6. *Sol*: R: $A^2 = I \rightarrow A\cdot A = I$; $A^{-1} = A$; $A = \begin{pmatrix} -2 & b \\ c & 2 \end{pmatrix}$ ***b)*** $\begin{pmatrix} a & b \\ c & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -2 & b \\ -3/b & 2 \end{pmatrix}$

Tornar

23) CT Jun 2014 a) $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & 2a+1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Rang Sempre 3 (millor per Gauss) b) Per Gauss o Cramer: x=1 ; y=0 ; z=0

24) CT 2007.

Esglaonant $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & m & 2m \\ m & 2 & 2+m \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & m-2 & 2m-4 \\ 0 & 2-m & 2-m \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & m-2 & 2m-4 \\ 0 & 0 & m-2 \end{pmatrix}$

determinant $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & m & 2m \\ m & 2 & 2+m \end{vmatrix} = m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2 = 0 \rightarrow m = 2.$

3 si $m \neq 2$ i 1 si $m = 2$.

25) CT 2011 S2 Q4

$$A^2 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^3 = A^2\cdot A = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r|l} 101 & 3 \\ \hline 2/ & 33 \end{array} \quad 101 = 3\cdot 33 + 2 \rightarrow A^{101} = A^{3\cdot 33+2} = A^{3\cdot 33}\cdot A^2 = \left(A^3\right)^{33}\cdot A^2 = I_3^{\,33}\cdot A^2 = I_3\cdot A^2 = A^2$$

Tornar

26) CT 2004 S4 Q5

Matricialment: $A\cdot\vec{v} = \vec{w} \rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot\vec{v} = A^{-1}\cdot\vec{w} \rightarrow \vec{v} = A^{-1}\cdot\vec{w}$ si A no és invertible, no podrem utilitzar aquest mètode) Però $|A| = 0$

Mitjançant un sistema d'equacions: $A\cdot\vec{v} = \vec{w} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x - y + z = 1 \\ -2x + y + 3z = 2 \\ -y + 5z = 4 \end{cases} \rightarrow (x,y,z) = (-3+4z, 5z-4, z)$

b) $A\cdot\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & -1 & 5 & b+2a \\ 0 & -1 & 5 & c \end{pmatrix} \rightarrow \boxed{c = 2a + b}$

Tornar

Solucions Sistemes i problemes

1) CT 2015 – S2

a) $A=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 3\\ 0 & a-2 & -3\\ -1 & -1 & -a-3\end{pmatrix}$ ⇨ $|A|=\begin{vmatrix}-3 & 2 & 3\\ 0 & a-2 & -3\\ -1 & -1 & -a-3\end{vmatrix}=3(a-2)(a+3)+6+3(a-2)+9=3(a^2+2a-3).=0$ ⇨ $a=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\begin{cases}\boxed{a=1}\\ \boxed{a=-3}\end{cases}$. El problema també es pot resoldre triangulant per Gauss la matriu A

b) $\left.\begin{array}{rcl}-3x+2y+3z&=&0\\ -5y-3z&=&0\\ -x-y&=&0\end{array}\right\}$ *rang(A)*=2 ⇨ $x=-y$ i $z=\frac{-5y}{3}$. ⇨ $\boxed{\left(-y,\ y,\frac{-5y}{3}\right)}$

2) ***a)*** $\boxed{\text{Si } m\neq 0}$ rang(A) = 3 i per tant rang(A') = 3 **SCD** $\boxed{\text{Si } m=0,}$ rang(A) = 2, ja que $\begin{vmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\end{vmatrix}=3\neq 0$, però rang $(A/b)=3$, **S. Incomp.**

b) $x=\dfrac{\begin{vmatrix}0 & -2 & -1\\ 0 & 3 & 1\\ 4 & 1 & 0\end{vmatrix}}{1}=\dfrac{4}{1}=4,\quad y=\dfrac{\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 1\\ 4 & 4 & 0\end{vmatrix}}{m}=\dfrac{0}{1}=0,\quad z=\dfrac{\begin{vmatrix}1 & -2 & 0\\ -1 & 3 & 0\\ 4 & 1 & 4\end{vmatrix}}{1}=\dfrac{4}{1}=4$ ⇨ $x=4, y=0$ i $z=4$.

3) **Juny 2014**.- 2b a) R= Si k≠1 i k≠-3/2 R=3: SCD; si k=1 R=3 SCI 1 grau llibertat ; si k=-3/2 SI
b) (1/6 + z , -1/6 -2·z , z)

4) **2016**: 1.

$$\underbrace{\left(\begin{array}{c|c}\underbrace{\begin{matrix}2 & 4 & 4\\ 2 & -k & 0\\ -2 & 0 & 0\end{matrix}}_{A} & \begin{matrix}4k-7\\ -1\\ k+1\end{matrix}\end{array}\right)}_{A'}\qquad |A|=\begin{vmatrix}2 & 4 & 4\\ 2 & -k & 0\\ -2 & 0 & 0\end{vmatrix}=-8k.$$

K≠0: rang (A)=3, rang(A') =3 = nombre d'incògnites. Per tant, el sistema és Compatible Determinat.
K=0: det(A) = 0, rang(A) <3, però el menor *det* ≠0

ens diu que rang(A)=2 → Sistema Compatible Indet.
amb 1 grau de llibertat: n- rang(A) = (3-2) = 1

Para k=0: $\left.\begin{array}{rcl}2x+4y&=&-7-4z\\ 2x&=&-1\end{array}\right\}$ ⇨ $x=\frac{-1}{2}$ substituïnt $-1+4y=-7-4z$ $\quad y=-\frac{6+4z}{4}=-\frac{3+2z}{2}$ $\boxed{\left(\frac{-1}{2},\frac{-3-2z}{2},z\right)}$

5) CSS 2016S – 3: Matriu rang 3 perquè és triangular. Per tant, Sistema Compatible Determinat
Rang (B= = Rang (B') = 2 → S Compatible Indeterminat, → x= 2−z, y= 2z−1, z=z

6) Un sistema homogeni sempre és compatible.

$|A|=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 3\\ 2 & 1-a & 0\\ 4 & 1 & 2a+2\end{vmatrix}=a^2+2a-8=0\rightarrow\begin{cases}a=-4\\ a=2\end{cases}$
- Si $a=-4$ o $a=2$ $\ Rang(A)=Rang(A')=2<3=n^o$ *incògnites* $\rightarrow S.C.I.\rightarrow\infty$ *solucions*
- Si $a\neq-4$ i $a\neq 2$ $\ Rang(A)=Rang(A')=3=n^o$ *incògnites* $\rightarrow S.C.D.\rightarrow 1$ *solució*

quan $a=2\rightarrow A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 3\\ 2 & 1-a & 0\\ 4 & 1 & 2a+2\end{bmatrix}\cong\left[\begin{array}{ccc|c}-1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\end{array}\right]$ $\qquad z:=\lambda.\rightarrow y=-2\lambda\rightarrow\boxed{(x,y,z)=(-\lambda,-2\lambda,\lambda)}$

7) PAU 2011 S4 Q4. Donat que la matriu de coeficients és una matriu quadrada, el mètode millor és calcular el seu determinant i mirar quins valors de k l'anul·len. Molt més complicat per Gauss:

$$(A\,|\,b)=\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 1 & -1 & k-4\\ 0 & k-6 & 3 & 0\\ k+1 & 2 & 0 & 3\end{array}\right)\cong\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 1 & -1 & k-4\\ 0 & k-6\ * & 3 & 0\\ 0 & \frac{-k^2+2k+15}{3} & 0 & -k^2+3k+10\end{array}\right)\qquad \frac{-k^2+2k+15}{2}=0\rightarrow -k^2+2k+15=0\rightarrow\begin{cases}k=5\\ k=-3\end{cases}$$

(*) Arribat aquest punt l'esgraonament es complica i resultaria molt més fàcil no seguir esgraonant sinó mirar els valors de k per als quals les files 2a i 3a són proporcionals, és a dir, $k\ /\ \frac{k-6}{3-k}=\frac{3}{k+1}$

- Si $k\neq 5$ i $k\neq 3$ aleshores $Rang(A)=Rang(A\,|\,b)=3=n^o$ *incògnites* $\rightarrow S.C.D.$
- Si $k=5\rightarrow Rang(A)=Rang(A\,|\,b)=2<3=n^o$ *incògnites* $\rightarrow S.C.I.$
- Si $k=-3\ \rightarrow Rang(A)=2\neq 3Rang(A\,|\,b)\rightarrow S.I.$

8) **PAU 2020 S1 Q2**:

$|A|=0\rightarrow k^2-6k-40=0\rightarrow\begin{cases}k=-4\\ k=10\end{cases}$
- **Cas** $k\neq-4$ **i** $k\neq 10$: $\ |A|\neq 0\rightarrow Rang(A)=Rang(A')=3=$ nº incògnites $\rightarrow S.C.D$
- **Cas** $k=-4$: $\ Rang(A)=2=Rang(A')<3=$ nº incògnites $\rightarrow S.C.I.$
- **Cas** $k=10$: incompatible

9) CSS 2016 – 3

(a) $\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & 0\\ 3 & 4 & -5 & 6\\ 1 & -1 & 0 & 2\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 7 & -8 & 6\\ 0 & 0 & -1 & 2\end{array}\right)$ són de rang 3
sistema és compatible determinat.

(b) De $\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 7 & -8 & 6\end{array}\right)$ obtenim $x=\dfrac{y+6}{8}$, $y=y$, $z=\dfrac{7y-6}{8}$.
Si parametritzem per z obtenim $x=\dfrac{z+6}{7}$, $y=\dfrac{8z+6}{7}$, $z=z$.

10) PAU 2020 S3Q3

a) $\begin{cases} ax+y = a \\ x+ay+z=5 \\ x+2y+z=5 \end{cases} \rightarrow A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = a^2-2a = 0 \rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a-2=0 \rightarrow a=2 \end{cases}$

• **Cas** $a=0$: $A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow Rang(A)=2=Rang(A')<3=\text{nº incògnites} \rightarrow \text{S.C.I.}$

• **Cas** $a=2$: $A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -2 & -8 \end{array}\right) \rightarrow Rang(A)=2=Rang(A')<3=\text{nº incògnites} \rightarrow \text{S.C.I.}$

• **Cas** $a \neq 0$ **i** $a \neq 2$: $|A| \neq 0 \rightarrow Rang(A)=3 \rightarrow Rang(A)=3=Rang(A')=\text{nº incògnites} \rightarrow \text{S.C.D.}$

b) $\boxed{(x,y,z)=\left(\frac{\lambda-1}{3},\frac{8-2\lambda}{3},\lambda\right)}$

11) CSS **2014J. 1** Pol=x Julia=y Maria=z

$\begin{cases} y=\frac{z}{2} \\ x=3y \end{cases}$ tres incògnites i dues equacions. Per tant, no podem determinar

$\begin{cases} y=z/2 \\ x=3y \\ x+y+z=63 \end{cases}$ ⇨ x = 31,5 , y = 10,5 , z = 21.

12) CSS 2014J. 6b x=5 y=10 z=20 €

$\left.\begin{array}{r} x+y+z=90 \\ 5x+10y+20z=1375 \\ z=2(x+y) \end{array}\right\}$ x = 25, y = 5, z = 60

13) a. $\left.\begin{array}{r} 0.8x=y+1848 \\ 0.5x=y-420 \end{array}\right\}$ x = 7560,venda y = 4200; cost b. $\frac{7560-4200}{4200}=0.8$ 80%.

14) CSS 2016

$\left.\begin{array}{rcl} x+y-2 &=& z \\ x-2y+10 &=& z \\ x+y+z &=& 24 \end{array}\right\} x=9,\ y=4,\ z=11$

15) CSS 2016 S – 1

(a) $\begin{array}{rcl} x &=& 2(y+z) \\ y &=& x/6 \\ z &=& 2y \\ x &=& 3z \end{array}$ $x=6y,\ z=2y$. infinites solucions.

(b) Substituint y per 35, obtenim que la Maria té 210 euros i la Júlia en té 70.

16) **CSS 2015 – 1B**

$\left.\begin{array}{rcl} y &=& 2z \\ 0{,}3x+0{,}3y-0{,}1z &=& 0{,}2(x+y+z) \\ 1{,}1(x+y+z) &=& 770 \end{array}\right\}$ x = 175, y = 350, z = 175

Joan va invertir 175 €,

17) **CSS 2013. 1b**

$\left.\begin{array}{r} x+y+z=120 \\ y+z=2x \\ 0.8x+0.9y+0.8z=99 \end{array}\right\}$ x = 40, y = 30, z = 50.

18) **CSS 2015S – 1**

$\left.\begin{array}{r} x+y+z=60000 \\ x=\frac{y+z}{2} \\ 0{,}05x+0{,}1y+0{,}02z=4200 \end{array}\right\}$ o bé $\left.\begin{array}{r} x+y+z=60000 \\ 2x-y-z=0 \\ 5x+10y+2z=420000 \end{array}\right\}$ x = 20000, y = 30000, z = 10000.

19) **CSS 2014S – 3**

$\begin{cases} x+y+z=5000 \\ z=x+y-600 \\ 0{,}06x+0{,}12y+0{,}3z=924 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5000 \\ 1 & 1 & -1 & 600 \\ 1 & 2 & 5 & 15400 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5000 \\ 0 & 0 & 2 & 4400 \\ 0 & 1 & 4 & 10400 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x=1200€ \\ y=1600€ \\ z=2200€ \end{cases}$

20) **CSS 2017** Jun $\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & -8\\ 1 & 0 & -1 & -22\end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & -8\\ 0 & 1 & -1 & -14\end{array}\right)$ indeterminat. $\begin{cases} x = z-22 \\ y = z-14 \\ z \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-y = -8 \\ x-z = -22 \\ x+y+z = 51 \end{cases}$ $x=7.\ y=15.\ z=29.$

21) 2005 S4 P1: $\begin{cases} x+y=0 \\ x+z=1 \\ x+y+z=0 \\ kx+2(y+z)=1 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4-k & 3-k\end{array}\right) \overset{(2)}{\cong} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3-k\end{array}\right)$ → Per compatible determinat

$Rang(A) = Rang(A|B) = n^o\ incògnites = 3$

$\rightarrow Rang(A|B) = 3 \rightarrow 3-k=0 \rightarrow \boxed{k=3}$

per al valor $k=3$: $\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right) \rightarrow z=0 \rightarrow \boxed{(x,y,z)=(1,-1,0)}$

22)

a) $\begin{cases} x+y = 550 \\ mx+4my = 350 \end{cases}$ b) ▪ **Gauss.** $\left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 550\\ m & 4m & 350\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 550\\ 0 & 3m & 350-550m\end{array}\right)$
- Si $m=0$, sistema es imcompatible.
- En otro caso, el sistema es compatible y determinado.

▪ **Rouché-Fröbenius**. Como $|A| = \begin{vmatrix}1 & 1\\ m & 4m\end{vmatrix} = 3m = 0 \Longleftrightarrow m=0$ • Para $m=0$, como $\begin{vmatrix}1 & 550\\ 0 & 350\end{vmatrix} = 350 \neq 0$ sistema es incompatible.

Método de Gauss. $\left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 550\\ 0 & 1{,}5 & 75\end{array}\right) \longrightarrow \begin{cases} x+y = 550 \\ 1{,}5y = 75 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 75/1{,}5 = 50 \\ x = 550-50 = 500 \end{cases}$ **Método de Cramer**. $|A| = 1{,}5$. $x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{750}{1{,}5} = 500$, $y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{75}{1{,}5} = 50$.

Tornar a enunciats matrius Tornar a enunciats sistemes