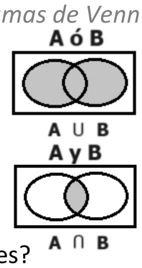
PROBABILIDAD – Teoría – [Ejercicios BAT]

1. Espacio muestral y sucesos:

- *Espacio muestral*: conjunto formado por todos los posibles resultados ("E").
- *Sucesos individuales* o elementales: Cada uno de los elementos de E.
- *Suceso imposible*: Aquel que no tiene ningún elemento de E. ("∅")
- *Suceso seguro*: Aquel que ocurre siempre. Es el propio E.
- *Suceso contrario* a A: Todos los sucesos que no están en A: ("$\overline{A}$") negada

Ejemplo 1. En el experimento $\boldsymbol{A}$ de lanzar un dado de 6 caras:
- Espacio muestral: $\boldsymbol{E} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{6}\}$
- Sucesos elementales: $\{\mathbf{1}\}, \{\mathbf{2}\}, \{\mathbf{3}\}, \{\mathbf{4}\}, \{\mathbf{5}\}, \{\mathbf{6}\}$
- Suceso A: Sacar número par: $\boldsymbol{A} = \{\mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{6}\}$
- Suceso contrario de A: $\bar{A} = \{\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{5}\}$ Suceso imposible: $\{\mathbf{7}\}$

Diagramas de Venn



2. Operaciones con sucesos

- Unión $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$: **Suma** los sucesos de A y los sucesos de B. Se lee como "**ó**"
- Intersección $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$: Elementos que son, a la vez, de A y de B. Se lee como "**y**"
- Sucesos **incompatibles**: si no tienen ningún elemento común. Es decir, cuando $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \emptyset$
- Sucesos **compatibles**: tienen algún elemento en común. Es decir, cuando $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \neq \emptyset$

Ejemplo 2. En el experimento de lanzar un dado de 6 caras, siendo los sucesos:

$\boldsymbol{A}$: Sacar un número par ; $\boldsymbol{B}$: Sacar un número múltiple de 3… Calcula $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$; $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$; ¿Son compatibles?

$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \{\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{6}\}$; $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \{\mathbf{6}\}$ → Son sucesos compatibles ya que tienen un elemento en común.

3. Probabilidad. Regla de Laplace:

$$\boxed{P(A) = \frac{N^{o}\ sucesos\ favorables}{Todos\ los\ sucesos\ posibles}}$$

Ejemplo 3. En el experimento de lanzar un dado de 6 caras, calcular la probabilidad de:

a) Sacar un múltiplo de 3: $\boldsymbol{P(B)} = \mathbf{2/6} = \mathbf{1/3}$

b) Sacar un número par: $\boldsymbol{P(C)} = \mathbf{3/6} = \mathbf{1/2}$

c) Sacar el número 8: $\boldsymbol{P(D)} = \mathbf{0/6} = \mathbf{0}$ suceso imposible

d) Sacar un número del 1 al 6: $\mathbf{6/6} = \mathbf{1}$ suceso seguro

4. Propiedades de la probabilidad

a) La probabilidad del *suceso seguro* es uno: $\boldsymbol{P(E)} = \mathbf{1}$ (100%)

b) La probabilidad del *suceso imposible* es cero: $\boldsymbol{P(\emptyset)} = \mathbf{0}$

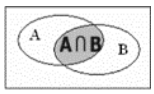
c) La probabilidad de *cualquier suceso* está comprendida entre **0** y **1** (0 al 100%)

d) La probabilidad del *suceso contrario* es: $\boldsymbol{P(\bar{A})} = \mathbf{1} - \boldsymbol{P(A)}$

En sucesos compatibles:

Unión: $\boxed{\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}}$

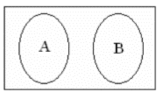
Intersección: $\boxed{\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)}}$

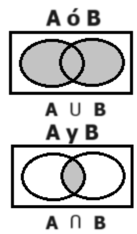


En sucesos incompatibles:

Unión: $\boxed{\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}}$

Intersección: $\boxed{\boldsymbol{P(A \cap B) = \emptyset}}$





Ejemplo 6. En una clase de bachillerato, el 70% de los alumnos aprueban matemáticas, el 80% aprueban química y el 55% aprueban las dos asignaturas. Calcula la probabilidad de que un alumno elegido al azar apruebe alguna de las dos asignaturas.

Definimos los sucesos: $\boldsymbol{M}$ *= "Aprobar Matemáticas" ;* $\boldsymbol{Q}$ *= "Aprobar Química"*

- Probabilidad de aprobar matemáticas → $\boldsymbol{P(M)} = \mathbf{0,7}$
- Probabilidad de aprobar química → $\boldsymbol{P(Q)} = \mathbf{0,8}$
- Probabilidad de aprobar las dos asignaturas" → $\boldsymbol{P(M \cap Q)} = \mathbf{0,55}$
- Probabilidad de aprobar alguna asignatura: → $\boldsymbol{P(M \cup Q)} = P(M) + P(Q) - P(M \cap Q) = 0{,}7 + 0{,}8 - 0{,}55 = \mathbf{0,95}$

5. Diferencia de sucesos

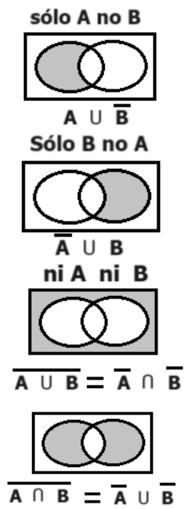
$$\boxed{\boldsymbol{P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) \quad ; \quad P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)}}$$

$P(A \cap \bar{B})$ establece la "probabilidad de que ocurra *sólo* ocurra el suceso A, sin que ocurra el B".

Ejemplo 8. En un concurso, la probabilidad de ganar el premio A es 0,5, la probabilidad de ganar el premio B es 0,25 mientras que la probabilidad de ganar los dos regalos es de 0,05.

a) Calcula la probabilidad de ganar solo el premio A: $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}5 - 0{,}05 = \mathbf{0,45}$

b) Calcula la probabilidad de ganar solo el premio B: $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0{,}25 - 0{,}05 = \mathbf{0,2}$



6. Leyes de Morgan

Mediante la negación podemos convertir una unión en una intersección y viceversa

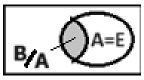
$(\bar{A} \cap \bar{B})$: probabilidad de que no ocurra ni A **y** ni B, ninguno de los 2

$$\boxed{\boldsymbol{P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) \ ; \ P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)}}$$

Ejemplo 7. En un concurso, la probabilidad de ganar el premio A es 0,5; la probabilidad de ganar el premio B es 0,15 mientras que la probabilidad de ganar los dos regalos es de 0,05. Calcula la probabilidad de no ganar ningún regalo. → $P(A \cup B) = P(A) + P(B) + P(A \cap B) = 0{,}5 + 0{,}15 - 0{,}05 = 0{,}6$

$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

7. *Probabilidad condicionada:* *Teorema de **Bayes*** $\boxed{P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}} = \frac{P(A)\cdot P(B/A)}{P(B)}$



Probabilidad de que ocurra el suceso A sabiendo que ha ocurrido previamente el suceso B.

Ejemplo 9. Sean A y B dos sucesos tales que $P(A) = 0{,}6$; $P(B) = 0{,}5$ y $P(A\cap B) = 0{,}3$

a) Calcula la probabilidad de que ocurra B sabiendo que ha ocurrido A: $P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}3}{0{,}6} = 0{,}5$

b) Calcula la probabilidad de que ocurra A sabiendo que ha ocurrido B: $P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}3}{0{,}5} = 0{,}6$

8. *Sucesos independientes/dependientes:*

- ***Independientes***: Cumplen que: $\boxed{P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)}$ $P(A/B) = PA$ → **B** no afecta a la probabilidad que ocurra **A**.
- ***Dependientes***: Cumplen que: $\boxed{P(A\cap B) = P(A)\cdot P(A/B)}$ Si ocurre **A** afecta a que ocurra **B**, y viceversa. (P. condicionada)

Ejemplo 10. Sean A y B dos sucesos tales que $P(A) = 03$; $P(B) = 0{,}5$ y $P(A\cap B) = 0{,}2$

¿Son los sucesos A y B independientes? $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$ → 0,2 = 0,3 · 0,5 → $0{,}2 \neq 0{,}15$ →No

Ejemplo 11. Sean A y B dos sucesos independientes tales que: **P(A) = 0,3** ; **P(B) = 0,5.** Calcula:

a) $P(A\cap B)$: $P(A)\cdot P(B)$ = 0,3 · 0,5 = $\mathbf{0{,}15}$

b) $P(A\cup B)$: $P(A) + P(B) - P(A\cap B)$ = 0,3 + 0,5 − 0,15 = $\mathbf{0{,}65}$

c) $P(\bar{A}\cap\bar{B})$: $1 - P(A\cup B)$ = 1 − 0,65 = $\mathbf{0{,}35}$

d) $P(A\cap\bar{B})$: $P(A) - P(A\cap B)$ = 0,3 − 0,15 = $\mathbf{0{,}15}$

e) $P(A/B)$: $P(A\cap B)/P(B)$ = 0,15/0,5 = $\mathbf{0{,}3}$

9. *Teorema de probabilidad total:*

Es la suma de todos los sucesos condicionados: $\boxed{P(A) = P(A/B) + P(A/C) + P(A/D) + ...}$

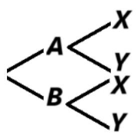
Ejemplo 16: En una heladería venden helados en tarrina y en cono, siendo la cantidad tarrinas un 60% del total. Cada forma de helado viene en dos sabores: fresa y vainilla. Hay un 20% de tarrinas de fresa y el resto de tarrinas son de vainilla. En los conos, la mitad son de fresa y la otra mitad de vainilla. Si una persona llega a la tienda y coge un helado al azar, calcula la probabilidad de que coja un helado de fresa (ya sea tarrina o cono).

Probabilidad tarrina (T) y cono (C): P(T)=0,6 y P(C)=0,4.

Probabilidad tarrina de fresa P(F/T)= 0,2, tarrina de vainilla P(V/T)=0,8 , cono de fresa P(F/C)=0,5 y cono de vainilla P(V/C)=0,5

Probabilidad de coger un helado (cono o tarrina) de fresa: **P(F) = P(T)·P(F/T) + P(C)·P(F/C) =**0,6·0,2 + 0,4·0,5= 0,32 **= 32%**

10. *Diagramas de árbol:* Colocar en cada una de sus ramas su probabilidad.



Rama en serie: Es la intersección (**Y**): Regla del *producto*

Rama en paralelo: Es la unión (**O**): Regla de la suma

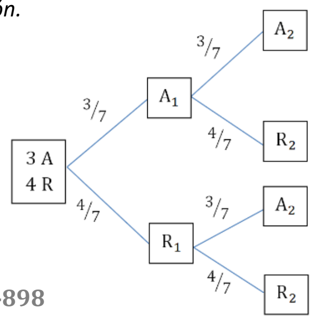
Principio multiplicativo: Cuando el nº de ramas es demasiado grande, es posible multiplicarlas.

P(A∩x) = P(A)· P(X/A)

P(x)=P(A)·P(X/A) + P(B)·P(X/B)

P(A/X) = P(A)·P(X/A) / P(x)

Ejemplo 12. Tenemos una urna con 3 bolas azules y 4 bolas rojas. Si extraemos 2 bolas con devolución.
*Definimos lo sucesos → **A**: "Sacar bola azul" **B**: "Sacar bola roja , calcula la probabilidad de que:*
(Si es con devolución las probabilidades de la urna no varían) →



a) Las dos bolas sean azules: $P(A1\cap A2)$ = 3/7 · 3/7 = $\mathbf{0{,}1837}$

b) Las dos bolas sean rojas: $P(R1\cap R2)$ = 4/7 · 4/7 = $\mathbf{0{,}3265}$

c) La primera sea roja y la segunda sea azul: $P(R1\cap A2)$ = **12/49** = $\mathbf{0{,}2449}$

d) La primera sea azul y la segunda sea roja: $P(A1\cap R2)$ = **12/49** = $\mathbf{0{,}2449}$

e) Las dos bolas sean del mismo color:

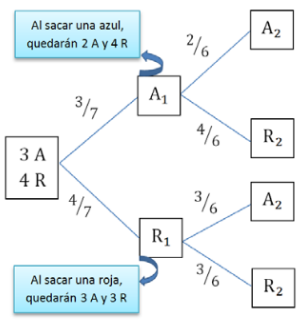
$P(A1\cap A2)\cup(R1\cap R2) = P(A1\cap A2) + P(R1\cap R2)$ = 9/49 + 16/49= $\mathbf{0{,}5102}$

f) Las dos bolas sean de distinto color:

$P(A1\cap R2)\cup P(R1\cap A2) = P(A1\cap R2) + P(R1\cap A2)$ = 12/49 + 12/49 = $\mathbf{0{,}4898}$

Ejemplo 13. Tenemos una urna con 3 bolas azules y 4 bolas rojas.

Si extraemos 2 bolas sin devolución, calcula la probabilidad de que:



a) Las dos bolas sean azules: $P(A_1\cap A_2)$ = 3/7 · 2/6 = **1/7**

b) Las dos bolas sean rojas: $P(R_1\cap R_2)$ = 4/7 · 3/6 = **2/7**

c) La primera sea roja y la segunda sea azul: $P(R_1\cap A_2)$ = 4/7 · 3/6 = **2/7**

d) La primera sea azul y la segunda sea roja: $P(A1\cap R_2)$ = 3/7 · 4/6 = **2/7**

e) Las dos bolas sean del mismo color:

$P(A_1\cap A_2)\cup(R1\cap R2) = P(A1\cap A2) + P(R1\cap R2)$ = 1/7 + 2/7 = **3/7**

f) Las dos bolas sean de distinto color:

$P(A1\cap R2)\cup P(R1\cap A2) = P(A1\cap R2) + P(R1\cap A2)$ = 2/7 + 2/7 = **4/7**

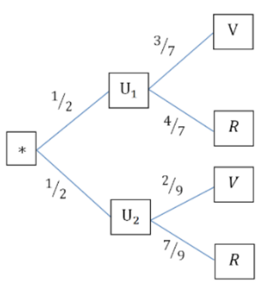
Ejemplo 14. Tenemos dos urnas. La primera con 3 bolas verdes y 4 bolas rojas. La segunda con 2 bolas verdes y 7 bolas rojas.

Definimos los sucesos: **U1**: "Elige Urna 1" **U2**: "Elige Urna 2" **V**: "Saca bola verde" **R**: "Saca bola roja"

Si se elige una urna al azar y se saca una bola, calcula la probabilidad de que:

a) La bola sea verde. b) La bola sea roja

Nota: Como elegimos una urna al azar, la probabilidad de elegir una de ellas es de ½. Si tuviéramos tres urnas, sería ⅓. Como solo hay dos colores, también podríamos haber calculado $P(Roja)$ como el suceso contrario a sacar el color verde.



Solución: a) $P(V)$ = 1/2 · 3/7 + 1/2 · 2/9 = $\mathbf{0{,}325}$ *b)* $P(R)$ = 1/2 · 4/7 + 1/2 · 7/9 = $\mathbf{0{,}6746}$

Ejemplo 15. En una clase de bachillerato hay 10 chicas y 8 chicos. De ellos, 3 chicas y 4 chicos juegan al fútbol.

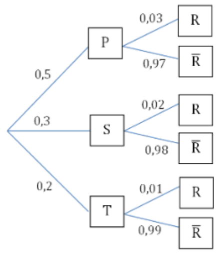
Definimos los sucesos **A**: "Ser chica" **O**: "Ser chico" **F**: "Juega al fútbol" $\overline{\mathbf{F}}$: "No juega al fútbol"

Si escogemos un estudiante al azar, determina la probabilidad de:

a) Que sea chica y no juegue al fútbol. b) Que sea chico y juegue al fútbol

Solución: a) $\boldsymbol{P(A \cap \overline{F})}$ = 10/18 · 7/10 = $\mathbf{7/18 = 0,3889}$ *b)* $\boldsymbol{P(O \cap F)}$ = 8/18 · 4/8 = 32/144 = $\mathbf{2/9 = 0,2222}$

Ejemplo 17. Una empresa recibe lotes de material de tres proveedores en proporciones del 50%, 30% y 20%. Se sabe que el 3% de los lotes del primer proveedor, el 2% de los del segundo y el 1% de los del tercero son rechazados en el control de calidad que realiza la empresa a la recepción del material. ¿Cuál es la probabilidad de que un lote sea rechazado?



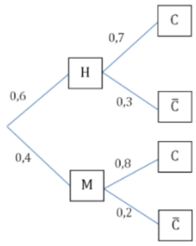
Definimos los sucesos **P**: "Primer proveedor" **S**: "Segundo proveedor"

T: "Tercer proveedor" **R**: "Rechazado"

$\boldsymbol{P(R)} = P(P) \cdot P(R/P) + P(S) \cdot P(R/S) + P(T) \cdot P(R/T) =$

$= P(P \cap R) + P(S \cap R) + P(T \cap R) = 0,5 \cdot 0,03 + 0,3 \cdot 0,02 + 0,2 \cdot 0,01 = \mathbf{0,023}$

Ejemplo 18. En una cierta enfermedad, el 60% de los pacientes son hombres y el resto son mujeres. Con el tratamiento que se aplica, se sabe que se curan un 70% de los hombres y un 80% de las mujeres. Si se elige un paciente al azar, calcula la probabilidad de que se cure de la enfermedad.



Definimos los sucesos: **H**: "Ser hombre" **M**: "Ser mujer" **C**: "Se curan" $\overline{\mathbf{C}}$: "No se curan"

$\boldsymbol{P(C)} = P(H) \cdot P(C/H) + P(M) \cdot P(C/M) = P(H \cap C) + P(M \cap C)$

$\boldsymbol{P(C)} = 0,6 \cdot 0,7 + 0,4 \cdot 0,8 = \mathbf{0,74}$

11. Ejercicios Teorema de Bayes

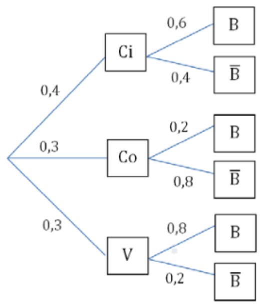
$$\boxed{\boldsymbol{P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}}$$

Para calcular la probabilidad condicionada en una partición. "En su lectura "se retrocede" en el diagrama de árbol ("cangrejo")

Ejemplo 19. El 40% de los sábados Marta va al **Ci**ne, el 30% va de **Co**mpras y el 30% restante juega a **V**ideojuegos. Cuando va al cine, el 60% de las veces lo hace con sus compañeros de **B**aloncesto. Lo mismo le ocurre el 20% de las veces que va de compras y el 80% de las veces que juega a videojuegos. Se pide:

a) Hallar la probabilidad de que el próximo sábado Marta **no** quede con sus compañeros de **b**aloncesto.

b) Si se sabe que Marta ha quedado con los compañeros de **b**aloncesto, ¿Cuál es la probabilidad de que vayan al **ci**ne?



Definimos sucesos: ***Ci****: "Va al cine"* ***Co****: "Va de compras"* ***V****: "Videojuegos"*

B*: "Con sus compañeros de baloncesto"* $\overline{\boldsymbol{B}}$*: "Sin sus compañeros de baloncesto.*

$\boldsymbol{a)}\ P(\overline{B}) = P(Ci \cap \overline{B}) + P(Co \cap \overline{B}) + P(V \cap \overline{B}) = 0,4 \cdot 0,4 + 0,3 \cdot 0,8 + 0,3 \cdot 0,2 = \mathbf{0,46}$

b) $\boldsymbol{P(Ci/B)}$ P condicionada de menor a mayor, retroceder en el diagrama de árbol (T. Bayes):

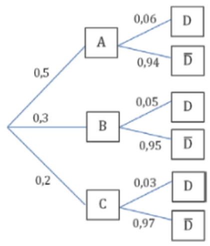
$\boldsymbol{P(Ci/B)} = P(Ci \cap B)/P(B)$ = (0,4 · 0,6) / (0,4 · 0,6 + 0,3 · 0,2 + 0,3 · 0,8) = $\mathbf{0,24/0,54 = 0,4444}$

También podríamos haber calculado el denominador: $P(B) = 1 - P(\overline{B})$ = 1 – 0,46 = $\mathbf{0,54}$

Ejemplo 20. Los operarios **A**, **B** y **C** producen, respectivamente, el ***50%***, el ***30%*** y el ***20%*** de las resistencias que se utilizan en un laboratorio de electrónica. Resultan **D**efectuosas el ***6%*** de las resistencias producidas por **A**, el ***5%*** de las producidas por **B** y el ***3%*** de las producidas por **C**. Se selecciona al azar una resistencia.

a) Calcula razonadamente la probabilidad de que sea defectuosa.

b) Si es defectuosa, calcula razonadamente la probabilidad de que proceda del operario **A**.



Definimos los sucesos: ***A****: "Operario A"* ***B****: "Operario B"* ***C****: "Operario C"* ***D****: "Defectuoso"* $\overline{\boldsymbol{D}}$*: "No defectuoso"*

$\boldsymbol{a)}\ \boldsymbol{P(D)} = P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D)$= 0,5 · 0,06 + 0,3 · 0,05 + 0,2 · 0,03 = $\mathbf{0,051}$

b) Para calcular $\boldsymbol{P(A/D)}$ "retroceder" en el diagrama de árbol (T. Bayes):

$\boldsymbol{P(A/D)} = P(A \cap D)/P(D)$ = 0,5 · 0,06 / 0,051 = $\mathbf{0,5882}$ (denominador = apartado anterior)

12. Tabla de contingencia:

Otra manera de resolver problemas de probabilidad de eventos *simples* y *compuestos* es a partir de una tabla de contingencia, donde se aprecia mejor el número de casos o sucesos de cada tipo.

Ejemplo 1: Se sortea un viaje a Roma entre los 120 mejores clientes de una agencia. De ellos, 65 son mujeres, 80 están casados y 45 son mujeres casadas. Se pide:

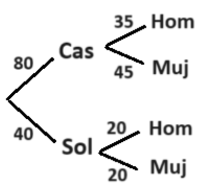
a) ¿Cuál será la probabilidad de que le toque el viaje a un hombre soltero?

b) Si del afortunado se sabe que es casado, ¿cuál será la probabilidad de que sea una mujer?

	Hom	**Muj**	**total**
Casad		45	80
Solter			
total		65	120

completamos ⇨

	Hom	Muj	total
Casad	35	45	80
Solter	20	20	40
total	55	65	120



$P(Hom/Solt): \frac{20}{120} = \frac{1}{6} = 0,16$ b) $P(Mujer/Casad): \frac{45}{80} = 0,56$

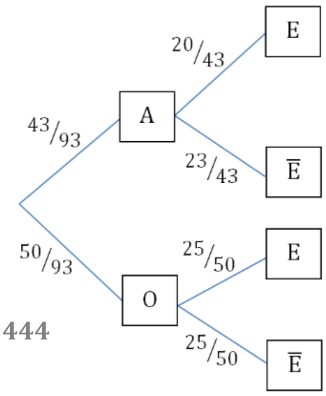
Ejemplo 2: Una clase consta de ***10*** **H**ombres y ***20*** **M**ujeres; la mitad de los hombres y la mitad de las mujeres tienen los ojos **C**astaños. Determinar la probabilidad de que una persona elegida al azar sea un **H**ombre **o** tenga los ojos **C**astaños.

	H	M	tot
Cast.	5	10	15
$\overline{Cast.}$	5	10	15
tot	10	20	30

Como son sucesos compatibles:
$\boldsymbol{P}(\mathrm{H} \cup \mathrm{C}) = \boldsymbol{P}(\mathrm{H}) + \boldsymbol{P}(\mathrm{C}) - \boldsymbol{P}(\mathrm{H} \cap \mathrm{C})$ = 10/30 + 15/30 – 5/30 = 2/3 = 0, 66

Los sucesos incompatibles entre sí se pueden representar de ambas maneras. *Ejemplo*:

Ej. 3. En un IES se va a organizar una excursión que consiste en una semana en la nieve. De los alumnos de bachillerato van a apuntarse 20 chicas y 25 chicos de un total de 43 chicas y 50 chicos. Si se elige un alumno al azar, calcula la probabilidad de que:
a) Sea chica y vaya a la excursión.
b) Vaya a la excursión sabiendo que es chica.
c) Sea chica sabiendo que va a la excursión.



Definimos los sucesos: $\mathbf{A}$: "Ser chica" $\mathbf{O}$: "Ser chico" $\mathbf{E}$: "Excursión" $\bar{\mathbf{E}}$: "No excursión"

***Método 1:** Diagrama de árbol:*

$\boldsymbol{a})$ $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{E})$ = 43/93 · 20/43 = $\mathbf{0,215}$ $\boldsymbol{b})$ $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{E}/\boldsymbol{A})$ = 20/43 = $\mathbf{0{,}465}$

$\mathbf{c})$ T. de Bayes: $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{E})$ = $P(A \cap E)/P(E)$ = 0,2151/ (43/93 · 20/43 + 50/93 · 25/50) = $\mathbf{0,444}$

***Método 2:** Tabla de contingencia:*

	A (Chica)	B (chico)	Suma
E	20	25	
Ē			
Suma	43	50	

⇨

	A (Chica)	B (chico)	Suma
E	20	25	45
Ē	23	25	48
Suma	43	50	93

$\boldsymbol{a})$ Chica Y excursión: $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{E})$ = 20/93 = $\mathbf{0,215}$ $\boldsymbol{b})$ Excursión SI chica: $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{E}/\boldsymbol{A})$ = 20/43 = $\mathbf{0{,}465}$
$\mathbf{c})$ Chica SI excursión: $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{E})$ = 20/45 = $\mathbf{0{,}444}$

Ej 4. En un hospital, el 35% dels malalts pateix la malaltia A; el 20%, la malaltia B, i el 10%, totes dues malalties. S'escull un pacient a l'atzar.
a) Troba la probabilitat que no estigui malalt.
b) Si té la malaltia B, quina probabilitat hi ha que no pateixi la malaltia A?

Sol: PRIMER. Es defineixen els esdeveniments i la seva probabilitat:
P(A) "Patir la malaltia A" = 0, 35 P(B) "Patir la malaltia B" = 0, 2 $\boldsymbol{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$ "Patir totes dues malalties" = 0,1
SEGON. S'organitzen les dades en una taula i es calculen les probabilitats que demana l'enunciat

	B	$\bar{B}$	Suma
A	10	25	35
$\bar{A}$	10	55	60
Suma	20	80	100

$P(\bar{A} \cap \bar{B})$ = 55/100 = 0, 55
$P(\bar{A}/B)$ = 10/20 = 0,5

13. Probabilidad experimental:

Es la probabilidad asignada a un suceso mediante el cálculo de la frecuencia relativa del mismo al repetir el experimento muchas veces.

Ejemplo: Al tirar una chincheta puede caer con la punta hacia arriba o hacia abajo. Para averiguar la probabilidad de cada uno de estos sucesos, se ha realizado el experimento muchas veces obteniendo los resultados dados en la tabla. A la vista de ellos, ¿qué probabilidad asignarías al suceso "caer con la punta hacia abajo"?

En la tabla se observa que la frecuencia relativa del suceso "caer con la punta hacia arriba" tiende a 0,67. Caer con la "punta hacia abajo" es el suceso contrario, se puede considerar P("punta hacia abajo") = 1– 0,67 = 0,33

Nº de tiradas	10 50 100 500 1000
Punta hacia arriba	7 29 65 337 668

14. Probabilidad por distribución binomial:

Sabiendo la probabilidad de población de un suceso con dos posibles estados (dicotomía), podremos la probabilidad que ocurra en una muestra: $\boxed{P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}}$ (Ver en el tema ***Distribución Binomial***).

EJERCICIOS DE PROBABILIDAD

1. Dados dos sucesos A y B de un experimento aleatorio, con probabilidades tales que
$P(A) = 4/9$; $P(B) = 1/2$; $P(A \cup B) = 2/3$, se pide:
a) Comprobar si los sucesos A y B son incompatibles o no.
b) Comprobar si los sucesos A y B son independientes o no.
c) Calcular $P(\bar{A}/B)$

a) Dos sucesos A y B son incompatibles si no tienen ningún elemento común: $\mathbf{P(A \cap B) = 0}$
$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 4/9 + 1/2 - 2/3 = \mathbf{5/18 = 0,2778}$
Puesto que $\mathbf{P(A \cap B) \neq 0}$, los sucesos no son incompatibles
b) Dos sucesos A y B son independientes si se cumple que: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \rightarrow 5/18 = 4/9 \cdot 1/2 \rightarrow \mathbf{5/18 \neq 4/18}$
Puesto que $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$, los sucesos **no** son independientes
c) $\mathrm{P}(\bar{A}/B) = \mathrm{P}(\bar{A} \cap B)/\mathrm{P}(B) = (2/9) / (1/2) = 4/9 = \mathbf{0,4444}$
$\mathrm{P}(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 1/2 - 5/18 = \mathbf{2/9 = 0,2222}$

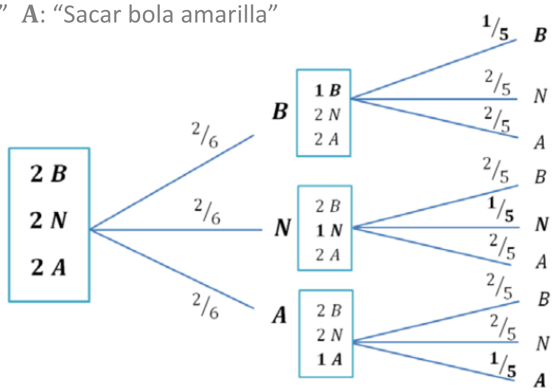
2. Se tiran al aire, simultáneamente, un dado (con forma cúbica) y una moneda. Teniendo en cuenta que los sucesos son independientes. ¿Cuál es la probabilidad de que en el dado salga un 5 y de que la moneda salga cara?
Definimos los sucesos: 5: "Sacar un 5" C: "Sacara cara"
Probabilidad: $P(5) = 1/6$ $P(C) = 1/2$ Pregunta: ¿ $P(5 \cap C)$?
Como los sucesos son independientes sabemos que: $P(5 \cap C) = P(5) \cdot P(C) = 1/6 \cdot 1/2 = 1/12 = \mathbf{0,08333}$

3. En un experimento aleatorio, sean A y B dos sucesos con $\mathrm{P}(\bar{A}) = \mathbf{0,4}$ y $P(B) = \mathbf{0,7}$.
Si A y B son independientes, calcula $P(A \cup B)$ y $P(A - B)$
Como son sucesos independientes: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$; En la negación: $P(A) = 1 - \mathrm{P}(\bar{A}) = 1 - 0,4 = \mathbf{0,6}$
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0,6 \cdot 0,7 = \mathbf{0,42}$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,6 + 0,7 - 0,42 = \mathbf{0,88}$
$P(A - B) = P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0,6 - 0,42 = \mathbf{0,18}$

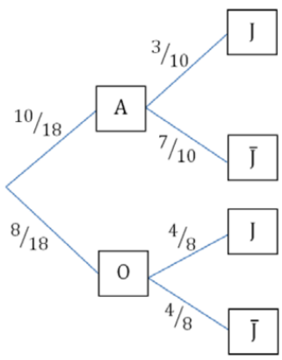
4. En una clase de bachillerato, el 60% de los alumnos aprueban matemáticas, el 50% aprueban inglés y el 30% aprueban las dos asignaturas. Calcula la probabilidad de que alumno elegido al azar:
a) Apruebe alguna de las dos asignaturas (una o las dos)
b) Apruebe matemáticas sabiendo que ha aprobado inglés.
Definimos los sucesos: M: "Aprobar matemáticas" I: "Aprobar inglés"
Probabilidad: $P(M) = 0,6$ $P(I) = 0,5$ $P(M \cap I) = 0,3$ Preguntas: ¿ $P(M \cup I)$? ¿ $P(M/I)$?
$P(M \cup I) = P(M) + P(I) - P(M \cap I) = 0,6 + 0,5 - 0,3 = \mathbf{0,8}$
$P(M/I) = P(M \cap I)/P(I) = 0,3/0,5 = \mathbf{0,6}$

5. De una bolsa con 2 bolas blancas, 2 bolas negras y 2 bolas amarillas, se extraen 2 sin devolución (es decir, una vez extraída una bola, no se vuelve a poner en la bolsa). Calcula la probabilidad de que las dos bolas sean blancas.
Definimos los sucesos: $\boldsymbol{B}$: "Sacar bola blanca" **N**: "Sacar bola negra" **A**: "Sacar bola amarilla"

$P(B1 \cap B2) = 2/6 \cdot 1/5 = 2/30 = \mathbf{1/15 = 0,0667}$



6. En una clase de bachillerato hay 10 chicas y 8 chicos. De ellos, 3 chicas y 4 chicos juegan al ajedrez. Si escogemos un estudiante al azar, determina:
a) La probabilidad de que sea chica y no juegue al ajedrez
b) La probabilidad de que no juegue al ajedrez sabiendo que es chico
c) Que juegue al ajedrez d) que sea chica sabiendo que juega a ajedrez
Sol:
Definimos: **A**: "chica" **O**: "chico" **J**: "Juega ajedrez" $\bar{J}$: "No juega ajedrez"
a) $P(A \cap \bar{J}) = 10/18 \cdot 7/10 = 70/180 = \mathbf{7/18}$ *b)* $P(\bar{J}/O) = 4/8 = 1/2 = \mathbf{0,5}$
c) $P(\mathrm{J}) = 10/18 \cdot 3/10 + 8/18 \cdot 4/8 = \mathbf{7/18}$ d) $P(A/\mathrm{J}) = 3/7$



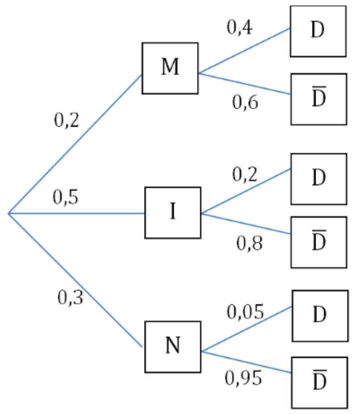
Diagramas de árbol:

7. ***CM 2106*** En una empresa, el 20% de los empleados son matemáticos, el 50% ingenieros y el resto no tienen carrera universitaria. Entre los matemáticos, el 40% ocupa un cargo directivo mientras que entre los ingenieros ese porcentaje se reduce a la mitad y es del 5% en el resto de los empleados. Elegido un empleado al azar, se pide:

a) Determinar la probabilidad de que ocupe un cargo directivo.

b) Si ocupa un cargo directivo ¿Cuál es la probabilidad de que sea matemático?

Definimos los sucesos; **M**: "Matemático" **I**: "Ingeniero" **N**: "No tiene carrera" **D**: "Directivo" $\overline{\mathbf{D}}$: "No es directivo"



$\boldsymbol{a})\ \boldsymbol{P}(\boldsymbol{D}) = P(M)\cdot P(D/M) + P(I)\cdot P(D/I) + P(N)\cdot P(D/N)$

$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{D}) = 0{,}2\cdot 0{,}4 + 0{,}5\cdot 0{,}2 + 0{,}3\cdot 0{,}05 = \mathbf{0{,}195}$

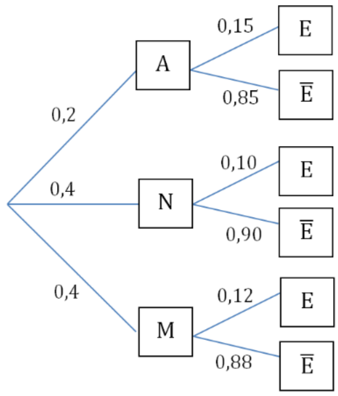
b) Aplicamos T. Bayes: $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{M}/\boldsymbol{D}) = P(M\cap D)/P(D) = 0{,}2\cdot 0{,}4/0{,}195 = \mathbf{0{,}4103}$

8. ***CM 2017***. Una empresa fabrica móviles de tres marcas distintas: A, N, M. El 20% de los móviles fabricados son de marca A y el 40% de la marca N. Se decide instalar un software oculto que permita espiar usuarios en los móviles. El software espía se instala en el 15% de los móviles de marca A, en un 10% de la marca N y en un 12% de los móviles de marca M.

a) Determina la probabilidad de que una persona que compra uno de estos móviles tenga instalado el software espía.

b) Si el móvil de una persona tiene instalado el software espía, calcula la probabilidad de que sea de la marca A.

Definimos los sucesos: **A**: "Marca A" **N**: "Marca N" **M**: "Marca M" **E**: "Software espía" $\overline{\mathbf{E}}$: "No Software espía"



$\boldsymbol{a})\ \boldsymbol{P}(\boldsymbol{E}) = P(A)\cdot P(E/A) + P(N)\cdot P(E/N) + P(M)\cdot P(E/M)$

$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{E}) = 0{,}2\cdot 0{,}15 + 0{,}4\cdot 0{,}10 + 0{,}4\cdot 0{,}12 = \mathbf{0{,}118}$

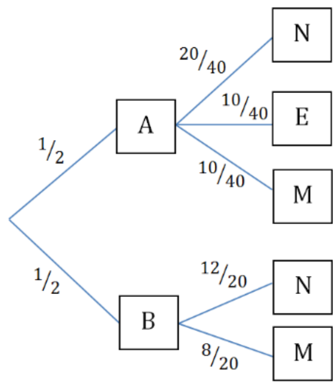
b) Aplicamos T. Bayes: $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{E}) = P(A\cap E)/P(E) = 0{,}2\cdot 0{,}15/0{,}118 = \mathbf{0{,}2542}$

9. ***CM Jun 16***. En mi casa dispongo de dos estanterías A y B. En A tengo 20 novelas, 10 ensayos y 10 libros de matemáticas. En B tengo 12 novelas y 8 libros de matemáticas. Elijo una estantería al azar y de ella, también al azar, un libro. Calcula razonadamente la probabilidad de que:

a) El libro elegido sea de matemáticas

b) Si el libro elegido resultó ser de matemáticas, que fuera de la estantería B.

Definimos los sucesos:
A: "Estantería A" **B**: "Estantería B" **N**: "Novela" **E**: "Ensayo" **M**: "Matemáticas"



$\boldsymbol{a})\ \boldsymbol{P}(\boldsymbol{M}) = P(A)\cdot P(M/A) + P(B)\cdot P(M/B)$

$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{M}) = 1/2\cdot 10/40 + 1/2\cdot 8/20 = 1/8 + 1/5 = 13/40 = \mathbf{0{,}325}$

b) Aplicamos T. Bayes: $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}/\boldsymbol{M}) = P(B\cap M)/P(M) = (1/2\cdot 8/20)\ /\ 0{,}325 = \mathbf{0{,}6154}$

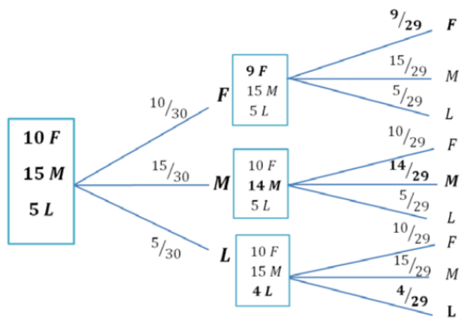
10. ***C Madrid 2018.*** En una bolsa hay 10 caramelos de fresa, 15 de menta y 5 de limón. Se extraen sucesivamente de la bolsa dos caramelos. Se pide:

a) Determinar la probabilidad de que el segundo de ellos sea de fresa.

b) Determinar la probabilidad de que los dos sean de fresa.

c) Sabiendo que el segundo ha sido de fresa, calcular la probabilidad de que lo haya sido también el primero.

Definimos sucesos: **F**: "Fresa" **M**: "Menta" **L**: "Limón"

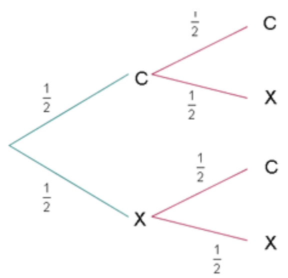


$\boldsymbol{a})\ \boldsymbol{P}(\boldsymbol{F}_2) = 10/30\cdot 9/29 + 15/30\cdot 10/29 + 5/30\cdot 10/29 = \mathbf{0{,}333}$

$\boldsymbol{b})\ \boldsymbol{P}(\boldsymbol{F}_1\cap \boldsymbol{F}_2) = 10/30\cdot 9/29 = \mathbf{3/29} = \mathbf{0{,}103}$

c) $P(F_1/F_2) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{F}_1\cap \boldsymbol{F}_2)\ /\ \boldsymbol{F}_2 = \mathbf{0{,}103}/\ \mathbf{0{,}333} = 0{,}31$

Ejercicios de probabilidad base.



1. Hallar la probabilidad de que al lanzar al aire dos monedas, salgan:
   - Dos caras: (una cara **Y** una cara): P(2c)=1/2 · 1/2 = **1/4**
   - Dos cruces: (una cruz **Y** una cruz): P(2+) = 1/2 · 1/2 = **1/4**
   - Al menos una cara (una cara **O** una cara): ½ + ½ = 2/2 = 1

2. Se lanzan dos dados al aire y se anota la suma de los puntos obtenidos. Se pide:
   - La probabilidad de que salga el 7:

1	2	3	4	5	6
6	5	4	3	2	1

P(7) = 6/36 = **1/6**

   - La probabilidad de que el número obtenido sea par: P(par) = 18/36 = **1/2**
   - La probabilidad de que el número obtenido sea múltiplo de tres:

1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6
2	5	1	4	3	6	2	5	1	4	3	6

$p(\dot{3}) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

3. Se sacan dos bolas de una urna que se compone de una bola blanca, otra roja, otra verde y otra negra. Describir el espacio muestral cuando:
   La primera bola se devuelve a la urna antes de sacar la segunda:
   E = {BB, BR, BV, BN, RB, RR, RV, RN, VB, VR, VV, VN, NB, NR, NV, NN}
   La primera bola no se devuelve:
   E = { BR, BV, BN, RB, RV, RN, VB, VR, VN, NB, NR, NV}

4. Una urna tiene ocho bolas rojas, 5 amarillas y siete verdes. Se extrae una al azar de que:
   Sea roja: P(R) =8/20 = 0,4
   Sea verde: P(V)=7/20 = 0,35
   No sea roja: P($\overline{R}$) = 1 - 8/20 = 0,6
   No sea amarilla: P($\overline{A}$) = 1- 5/20 = 0,75

5. Una urna contiene tres bolas rojas y siete blancas. Se extraen dos bolas al azar. Escribir el espacio muestral y hallar la probabilidad de:
   - Extraer las dos bolas con reemplazamiento: **E={RR, RB, BR, BB]**
     P(RR)= 3/10 · 3/10 = 9/100 P(RB)= 3/10· 7/10 = 21/100 P(BR)=7/10 · 3/10 = 21/100 P(BB)=7/10 · 7/10 = 49/100
   - Sin reemplazamiento:
     $p(RR) = \frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9} = \frac{6}{90}$ $p(RB) = \frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9} = \frac{21}{90}$ $p(BR) = \frac{7}{10}\cdot\frac{3}{9} = \frac{21}{90}$ $p(BB) = \frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9} = \frac{42}{90}$

6. Se extrae una bola de una urna que contiene 4 bolas rojas, 5 blancas y 6 negras, a) ¿cuál es la probabilidad de que la bola sea roja o blanca? b) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea blanca?

   a) $P(R \cup I) = 4/15 + 5/15 = 3/5$ b) P($\overline{B}$):= 1- P(B) = 1 - 5/15 = 2/3

7. En una clase hay 10 alumnas rubias, 20 morenas, cinco alumnos rubios y 10 morenos. Un día asisten 44 alumnos, encontrar la probabilidad de que el alumno que falta sea:
   hombre: P(H)=15/45 = 1/3 ; mujer morena: P(mor): 20/45=4/9 ; hombre o mujer: P(H∪ M) =1

8. En un sobre hay 20 papeletas, ocho llevan dibujado un coche las restantes son blancas. Hallar la probabilidad de extraer al menos una papeleta con el dibujo de un coche:
   Si se saca una papeleta: P(C1)=8/20 ; Si se extraen dos papeletas: P(C2)=1- p(2B)=1-(12/20 · 11/19) = 62/95
   Si se extraen tres papeletas: P(C3) = 1-P(3B) = 1 – P(3B) = 1- (12/20 · 11/19 · 10/18) = 46/57

9. Los estudiantes A y B tienen respectivamente probabilidades 1/2 y 1/5 de suspender un examen. La probabilidad de que suspendan el examen simultáneamente es de 1/10. Determinar la probabilidad de que al menos uno de los dos estudiantes suspenda el examen. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1/2 + 1/5 - 1/10 = 3/5$

10. La probabilidad de que un hombre viva 20 años es 1/4 y la de que su mujer viva 20 años es 1/3. Se pide calcular la probabilidad:
    - De que ambos vivan 20 años: $P(H \cap M) = 1/4 \cdot 1/3 = 1/12$
    - De que el hombre viva 20 años y su mujer no: $P(H \cap \overline{M}) = P(H) \cdot [1 - P(M)]$=1/4 · 2/3 = 1/6
    - De que ambos mueran antes de los 20 años: $P(\overline{H} \cap \overline{M}) = [1 - P(H)] \cdot [1 - P(M)]$= 3/4 · 2/3 = ½

11. De las compras realizadas en el último periodo de rebajas del pasado año, el 55% se dedicaron a productos electrónicos, el 72% se hicieron a través de internet y, de las compras que se hicieron por internet, el 64% fueron de productos electrónicos. Se elige una compra al azar. a) Calcule la probabilidad de que haya sido de productos electrónicos y se haya realizado por internet. b) Calcule la probabilidad de que la compra se haya realizado por internet o que se hayan comprado productos electrónicos. c) Calcule la probabilidad de que sabiendo que no se compraron productos electrónicos, la compra no se hiciera a través de internet.

    a) $P(A \cap B)$: si $P(A/B) = P(A \cap B)/P(B)$ = 0,634 → $P(A \cap B) = 0.64 \cdot 0.72 = 0{,}4608$
    b) $\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$=0,8092
    c) $P(\overline{B}/\overline{A}) = P(\overline{A} \cap \overline{B})/P(\overline{B})$ = 1-P(AUB)/1-P(A)=1-0,8092/1-0,55 = 0,424

P. condicionada. *Esdeveniments **independents** / **dependents***

1. *Donats dos esdeveniments A i B, es coneixen aquestes probabilitats:*

$P[A \cup B] = 0{,}55 \quad ; \quad P[\bar{A} \cup \bar{B}\,] = 0{,}90 \quad ; \quad P[B/A] = 0{,}25$

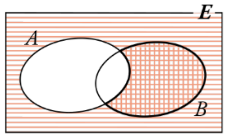
a) Troba P[A ∩ B], P[A], P[B] i P[B/ $\bar{A}$]. *b) Dedueix si A i B són independents.* c) *A* i *B* són incompatibles?

Sol: a) Sabem que $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B})$; per tant: $P[A \cap B] = 1 - P[\overline{A \cap B}] = 1 - P[\bar{A} \cup \bar{B}] = 1 - 0{,}90 = 0{,}10$

D'altra banda: $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}10}{P(A)} = 0{,}25 \rightarrow P(A) = 0{,}4$

També sabem que: $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] \rightarrow 0{,}55 = 0{,}4 + P[B] - 0{,}1 \rightarrow P[B] = 0{,}25$

Per a l'última probabilitat que es demana, va bé fer un diagrama:



$B \cap \bar{A}$

$$P(B/\bar{A}) = \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{0{,}25 - 0{,}1}{1 - 0{,}4} = 0{,}25$$

b) Com que $P[B/\bar{A}] = P[B]$, A i B són independents.

També es podria deduir que són independents comprovant que $P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B]$

2. *Es consideren dos esdeveniments, A i B, associats a un experiment aleatori, amb P[A] = 0,7 ; P[B] = 0,6 ; P[A' ∪ B'] = 0,58* *a) Són independents A i B?* *b) Si M ⊂ A, quin és el valor de P[M'/A']?*

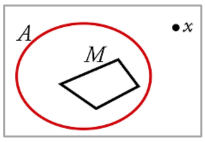
Solució: *A* i *B* són independents si es compleix: $P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B]$.

$P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - 0.58 = 0{,}42$

D'altra banda: P(A) · P(B) = 0,7·0,6 = 0,42 → Son independents ja que $P[A \cap B] = P(A) \cdot P(B)$

b) $M \subset A \Rightarrow A' \subset M' \Rightarrow A' \cap M' = A'$. Per tant: $P(M'/A') = \frac{P(M' \cap A')}{P(A')} = \frac{P(A')}{P(A')} = 1$

Vegem aquest darrer resultat a partir d'aquest gràfic: →



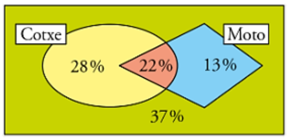
M és un subconjunt de *A*. Sabem que *x* no és de *A*. Quina és la probabilitat que *x* no sigui de *M*?

Mirant el gràfic afirmem, que, si *x* no és de *A*, tampoc no és de *M*. Per tant: P[no *M* / no *A*] = P[M'/A'] = 1.

P. Condicionada utilitzant diagrames de Venn

En un poble el 50% de la població tenen cotxe, el 35% tenen moto i el 22% tenen cotxe i moto.
Si triem a l'atzar un veí del poble, troba la probabilitat que:

a) Tingui cotxe o moto.
b) No tingui ni cotxe ni moto.
c) Sabent que té cotxe, que tingui moto.
d) Sabent que té moto, que no tingui cotxe.
e) Que tingui només un dels dos.



Solució

*Diagrama de Venn, dividint l'espai mostral en subconjunts **incompatibles**. Per exemple, si hi ha un 50% d'habitants amb cotxe i un 22% amb cotxe i moto, llavors n'hi haurà un 50 – 22 = 28% amb només cotxe y un 35-22=13% només moto*

a) P[COTXE O MOTO] = + + = 0,28 + 0,22 + 0,13 = 0,63

b) P[NO COTXE i NO MOTO] = = 1 – P[COTXE O MOTO] = 1 – 0,63 = 0,37

c) P[MOTO /COTXE] = = $\frac{0{,}22}{0{,}5}$ = 0,44

d) P[NO COTXE /MOTO] = = $\frac{0{,}13}{0{,}35}$ = 0,37

e) P[NOMÉS COTXE O NOMÉS MOTO] = + = 0,28 + 0,13 = 0,41

P. Condicionada amb tables de contingència:

3. En un viaje organizado por Europa para 120 personas, 48 de los que van saben hablar inglés, 36 saben hablar francés, y 12 de ellos hablan los dos idiomas. Escogemos uno de los viajeros al azar.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que hable alguno de los dos idiomas?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que hable francés, sabiendo que habla inglés?
   c) ¿Cuál es la probabilidad de que solo hable francés?

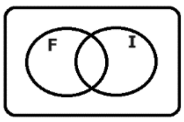
Opción A: Construir tabla de contingencia: →

	Francés	No sabe francés	
Inglés	12		48
No sabe inglés			
	36		120

La completamos aritméticamente: →

	Francés	No sabe francés	
Inglés	12	36	48
No sabe inglés	24	48	72
	36	84	120

Opción B: Diagrama de Venn:



Procedemos a responder los apartados:

a) Probabilidad de que hable alguno de los dos idiomas: *P(IF) = (36 + 48 – 12) / 120 = 0,6*

b) Probabilidad de que hable francés, sabiendo que habla inglés: *P(I) = 12/48 =0,25*

c) Probabilidad de que solo hable francés: *P(F)=24/120=0,2*

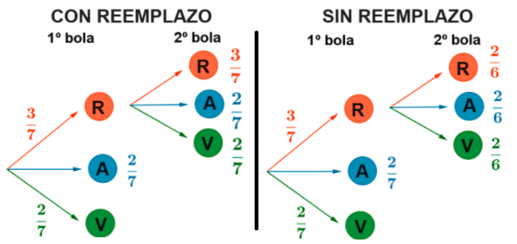
Probabilitat condicionada

Ejer1: Tenemos una urna con 3 bolas rojas, 2 bolas verdes y 2 bolas azules. Vamos a extraer 2 bolas al azar.

Definimos los sucesos: R1 = { obtener una bola roja en la primera extracción }

R2 = { obtener una bola roja en la segunda extracción}.

Calcular las probabilidades de los sucesos si hay reemplazamiento de bola y si no hay reemplazamiento de bola.



Con reemplazo: los sucesos R1 y R2 son independientes.

1ª extracción: P(R1)=3/7 ; 2ª extracción: P(R2)= 3/7 →

$P(A \cap B)=P(A)\cdot P(B) = 3/7 \cdot 3/7 = 9/49$

Sin reemplazo: los sucesos R1 y R2 son dependientes.

1ª extracción: P(R1) = 3/7 ; 2ª extracción P(R2) = 2/6 = 1/3

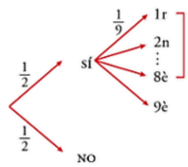
$(A \cap B)=P(A)\cdot P(B/A)$ → P(las dos bolas rojas)

$= P(R1\cdot R2)=P(R1\cap R2)$ P $P(R1)\cdot P(R2/R1)=3/7 \cdot 1/3 = 3/21 = 1/7$

Ejer2:*Un moble té 9 calaixos. La probabilitat d'haver guardat la cartera al moble és d'1/2 i, si és al moble, té la mateixa probabilitat de ser a qualsevol dels 9 calaixos.*

a) Quina és la probabilitat que la cartera sigui al novè calaix?

b) Si obrim els vuit primers calaixos i la cartera no hi és, quina és la probabilitat que sigui al novè calaix?



$P[\text{sí i UN ALTRE}] = \frac{1}{2}\cdot\frac{8}{9} = \frac{8}{18}$

$P[\text{sí i 9è}] = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9} = \frac{1}{18}$

a) p(9º) = P(sí i 9º) + P(No i 9º) = 1/18 + 0 = 1/18

b) p(un altre) = P(sí i un altre) + P(No i un altre) = 8/18 + 0 = 8/18=4/9

P(9º/no un altre) = P(9º i no un altre)/P(no un altre) = P(91)/1-P(un altre) = 1/18/ 1-8/18 = 1/10

Experiències compostes. Probabilitat total i probabilitat a *posteriori*

En un joc televisiu, el concursant ha de triar a l'atzar una capsa entre tres: A, B o C. A la capsa A hi ha un dau, a la B, una moneda i a la C, una baralla.

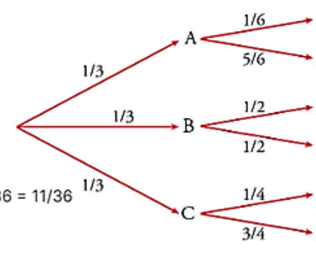
- *Si li toca el dau, ha de tirar-lo i obtindrà premi si treu un 6.*
- *Si li toca la moneda, obtindrà premi si en llançar-la li surt una creu.*
- *Si li toca la baralla de cartes, obtindrà premi si treu una carta d'oros.*

a) Quina és la probabilitat d'obtenir premi?

b) Quina és la probabilitat de triar la capsa B i guanyar premi?

c) Si ha obtingut premi, quina probabilitat hi ha que hagi triat la capsa B?

Descrivim el procés mitjançant un diagrama en arbre: expressar les fraccions amb el mateix denominador.



$P[\text{A i PREMI}] = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6} = \frac{2}{36}$(*)

$P[\text{A i NO PREMI}] = \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{6} = \frac{10}{36}$

$P[\text{B i PREMI}] = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6} = \frac{6}{36}$(*)

$P[\text{B i NO PREMI}] = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6} = \frac{6}{36}$

$P[\text{C i PREMI}] = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{12} = \frac{3}{36}$(*)

$P[\text{C i NO PREMI}] = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{12} = \frac{9}{36}$

a) *P* [PREMI] = 2/36 + 6/36 + 3/36 = 11/36

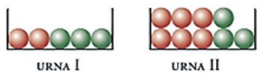
b) *P* [*B* i PREMI] = 6/36 = 1/6

c) *P* [*B*/PREMI] = *P* [*B* i PREMI] : *P* [PREMI] = (6/36) : (11/36) = 6/11

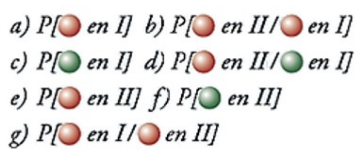
Per obtenir aquest resultat, podríem haver raonat així (observa els resultats amb asterisc (*)): de cada 36 vegades que es fa l'experiment, en 11 s'obté premi. D'aquestes, 2 provenen de la capsa A, 6 de la capsa B i 3 de la C.

Per tant, si sabem que hi ha premi, la probabilitat que es triés la capsa B és de 6/11.

Exercici: *D'aquestes 2 urnes, extraiem a l'atzar una bola de l'urna 1 i la dipositem a l'urna II.*

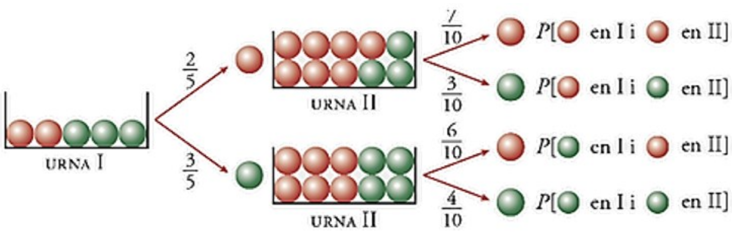


Calcula les probabilitats següents:



Sol:

diagrama en arbre:



a) 2/5

b) 7/10

c) 3/5

Probabilidad con combinatoria:

1. Calcular la probabilidad de sacar exactamente dos cruces al tirar una moneda cuatro veces: $P(2+) = \frac{CR_4^2}{VR_2^4} = \frac{6}{16}$
2. Un grupo de 10 personas se sienta en un banco. ¿Cuál es la probabilidad de que dos personas fijadas de antemano se sienten juntas: $P(A) = \frac{2\cdot 9!}{10!} = \frac{1}{5}$
3. Se extraen cinco cartas de una baraja de 52. Hallar la probabilidad de extraer:
   - 4 ases: $P(4\ ases) = \frac{C_4^4 \cdot C_{48}^1}{C_{52}^5} = \frac{1}{54145}$
   - 4 ases y un rey: $P(A\ y\ R) = \frac{C_4^4 \cdot C_4^1}{C_{52}^5} = \frac{1}{649740}$
   - 3 cincos y 2 sotas: $P(3cin\ y\ 2sot) = \frac{C_4^3 \cdot C_4^2}{C_{52}^5} = \frac{1}{180290}$
   - Un 9, 10, sota, caballo y rey en cualquier orden: $P(escalera) = \frac{C_4^1 \cdot C_4^1 \cdot C_4^1 \cdot C_4^1 C_4^1}{C_{52}^5} = \frac{64}{162435}$
   - 3 de un palo cualquiera y 2 de otro: $P(3\ y\ 2) = \frac{4 \cdot C_{13}^1 \cdot 3\ C_{13}^2}{C_{52}^5} = \frac{429}{4165}$
   - Al menos un as: $P(ningún\ as) = \frac{C_{48}^5}{C_{52}^5} = \frac{35673}{54145}$
4. Se reparten al azar cinco premios no acumulables entre 4 mujeres y 6 hombres. Calcula la probabilidad de que: a) Las 4 mujeres resulten premiadas. b) Se premie a alguna mujer.

Número total de formas de premiar: $C_{10;5} = 252$

Se premia a 4 mujeres y a 1 hombre: $C_{4;4} \cdot C_{6;1} = 6$

Se premia a 3 mujeres y a 2 hombres: $C_{4;3} \cdot C_{6;2} = 60$

Se premia a 2 mujeres y a 3 hombres: $C_{4;2} \cdot C_{6;3} = 120$

Se premia a 1 mujer y a 4 hombres: $C_{4;1} \cdot C_{6;4} = 60$

Y ahora resolvemos cada apartado: a) P(4 premiadas y un premiado) = 6/252 = 0.0238

b) P(Se premia a alguna mujer)= (60+60+120+60)/252 = 246/252= 0.9762

P. compuesta En el bachillerato de cierto instituto hay un total de 100 alumnos, de los cuales: 40 son varones, 30 usan gafas, y 15 son varones y usan gafas. Si seleccionamos al azar un alumno de dicho curso: a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer y no use gafas? b) Si sabemos que el alumno seleccionado no usa gafas, ¿qué probabilidad hay de que sea varón? Justifica las respuestas.

Sol: Si hay 40 varones habrá 60 mujeres.

Si 30 usan gafas y 15 son varones, habrá 15 mujeres que usen gafas

Si de los 40 varones 15 usan gafas, habrá 25 que no usen gafas.

Si de las 60 mujeres 15 usan gafas, habrá 45 que no usen gafas

a) $P(M \cap \overline{G}) = \frac{45}{100} = \frac{9}{20}$

b) $P(V / \overline{G}) = \frac{P(V \cap \overline{G})}{P(\overline{G})} = \frac{\frac{25}{100}}{\frac{25+45}{100}} = \frac{25}{70} = \frac{5}{14}$

EVAU

PAU P24. En un poble hi ha dos instituts que anomenarem A1 i A2. En tots dos instituts es pot estudiar el batxillerat científic (que anomenarem C) i l'humanístic (que anomenarem H). Seleccionem un alumne a l'atzar i se sap que la probabilitat que pertanyi a l'institut A1 ´es de 0.3, i la probabilitat que pertanyi a l'institut A2 ´es de 0.7. D'altra banda, la probabilitat que estudiï el batxillerat científic si sabem que pertany a l'institut A1 ´es de 0.55 mentre que la probabilitat que estudiï el batxillerat científic si sabem que pertany a l'institut A2 és de 0.59.

(a) Calcula les probabilitats que un alumne estudiï el batxillerat C a l'institut A1, que estudiï el batxillerat C a l'institut A2, que estudiï el batxillerat H a l'institut A1, i que estudiï el batxillerat H a l'institut A2.

(b) Si en aquest poble hi ha exactament 1.000 estudiants, quants estudien cada batxillerat a cada institut?

(c) El curs vinent arribaran 20 alumnes nous al poble i tots faran batxillerat H a l'institut A1. Quina serà la nova probabilitat que un alumne estudiï batxillerat C si sabem que pertany a l'institut A1?

Sol: a)

$P(A1 \cap C) = P(C \mid A1)P(A1) = 0.55 \cdot 0.3 = 0.165,$

$P(A1 \cap H) = P(H \mid A1)P(A1) = (1 - 0.55) \cdot 0.3 = 0.135,$

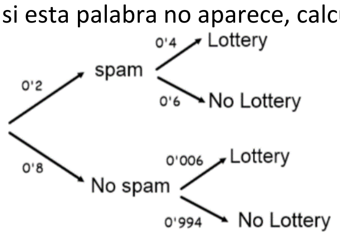
$P(A2 \cap C) = P(C \mid A2)P(A2) = 0.59 \cdot 0.7 = 0.413,$

$P(A2 \cap H) = P(H \mid A2)P(A2) = (1 - 0.59) \cdot 0.7 = 0.287$

(b) Multiplicant les probabilitats anteriors pels 1.000 estudiants, resulta que 165 estudien el batxillerat C a l'institut A1, 135 estudien el batxillerat H a l'institut A1, 413 estudien el batxillerat C a l'institut A2, i 287 estudien el batxillerat H a l'institut A2 (efectivament, 165 + 135 + 413 + 287 = 1.000).

(c) Afegint els 20 nous estudiants, la probabilitat demanada queda: $P(C/A_1) = \frac{P(C \cap A_1)}{P(A_1)} = \frac{165}{320} = 0{,}5156$

Andalucía SOC. 2023 JUN En una base de datos de correos electrónicos se ha observado que el 20% de los correos recibidos son spam. Además, se ha observado que la palabra "lottery" ha aparecido en el 40% de los correos que son spam y en el 0'6% de los correos que no lo son. a) Halle la probabilidad de que en un correo elegido al azar en el que aparezca la palabra "lottery" sea spam. b) Halle la probabilidad de que un correo elegido al azar en el que no aparezca la palabra "lottery" no sea spam. c) Si un correo se etiqueta como spam si aparece la palabra "lottery" como no spam si esta palabra no aparece, calcule la probabilidad de que un correo se etiquete incorrectamente.

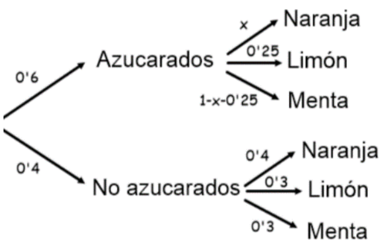


a) $P(spam/lot) = \frac{P(spam \cap lot)}{P(lot)} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}4}{0{,}2 \cdot 0{,}4 + 0{,}8 \cdot 0{,}006} = 0{,}9434$

b) $P(\overline{spam}/\overline{lot}) = \frac{P(\overline{spam} \cap \overline{lot})}{P(\overline{lot})} = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}994}{0{,}2 \cdot 0{,}4 + 0{,}8 \cdot 0{,}006} = 0{,}8689$

c) P(incorrecta)= 0,2·0,6 + 0,8·0,006 = 0,1248

2023. RESERVA Una tienda vende caramelos con sabor a frutas (naranja o limón) y a menta. El 60% son azucarados y de estos el 25% son de limón. De los no azucarados, el 40% son de naranja, el 30% son de limón y el resto de menta. Además, el 40% de todos los caramelos son de naranja. Se escoge un caramelo al azar de esa tienda. *a)* Calcule la probabilidad de que sea de naranja sabiendo que es azucarado. *b)* Razone si es más probable que sea de sabor a frutas o a menta.



a) P(Naranja): 0,4 = 0,6·x + 0,4 · 0,4 → x = 0,4

P(Menta) = 1 - 0,4 - 0,25 = 0,35

P(Naranja/Azucarado) = $\frac{0{,}6 \cdot 0{,}4}{0{,}6 \cdot 0{,}4 + 0{,}6 \cdot 0{,}25 + 0{,}6 \cdot 0{,}35} = 0{,}4$

b) P(frutas) = 0,67 p(menta) = 0,33 → más probable de frutas

2023 RESERVA 2. En una encuesta realizada en un instituto sobre los hábitos de los estudiantes en su tiempo libre, el 80% de los encuestados dedica el tiempo libre a enviar mensajes con el móvil o a jugar videojuegos, el 45% realiza ambas cosas y el 40% no juega a videojuegos. Si se elige un estudiante de ese instituto al azar, calcule la probabilidad de que dedique su tiempo libre a: a) Enviar mensajes con el móvil y no jugar a videojuegos. b) Jugar a videojuegos sabiendo que no envía mensajes con el móvil. c) Hacer solamente una de las dos cosas. d) No hacer ninguna de las dos cosas.

Sol: M: "enviar mensajes con el Móvil" y V: "jugar con videojuegos". Datos: $P(M \cup V) = 0{,}80$ $P(M \cap V) = 0{,}45$ y $P(\underline{V}) = 0{,}40$

método 1) a) $P(M \cap \underline{V})$: Como $P(\underline{V}) = 0.40 \rightarrow P(V) = 1 - P(\underline{V}) = 0.60$; $P(M \cup V) = P(M) + P(V) - P(M \cap V) = 0{,}80 \rightarrow$ $P(M) = 0{,}65$ como $P(M) = P(V \cap P) + P(M \cap \underline{V}) \rightarrow P(M \cap \underline{V}) = 0.65 - 0.45 = 0.20$

b) $P(V / \underline{M}) = P(V \cap \underline{M}) / P(\underline{M}) = P(V) - P(M \cap V) / 1 - P(M) = 0{,}60 - 0{,}45 / 1 - 0{,}65 = 3/7 = 0{,}43$

c) $P(\underline{M} \cap V) \cup (M \cap \underline{V}) = P(\underline{M} \cap V) + (M \cap \underline{V}) = 0{,}15 + 0{,}20 = 0{,}35$

d) $P(\underline{M} \cap \underline{V}) = P(\underline{M \cup V}) = 1 - P(M \cup V) = 1 - 0{,}80 = 0{,}20$

método 2) con tabla de contingencia:

a) $P(M \cap \underline{V}) = 2/100 = 0{,}2$ b) $P(V / \underline{M}) = 15/35 = 3/7$

c) $P(\underline{M} \cap V) \cup (M \cap \underline{V}) = (15+20)/100 = 35/100$

d) $P(\underline{M} \cap \underline{V}) = 20/100 = 0{,}2$

	V	$\overline{V}$	
M	45	20	65
$\overline{M}$	15	20	35
	60	40	100

2023 Andalucía R 3 El 32% de las microempresas tiene página web y el 64% ni tiene página web ni realiza ventas por comercio electrónico. De las microempresas que tienen página web, el 30% realiza ventas por comercio electrónico. Se selecciona al azar una microempresa. a) Calcule la probabilidad de que tenga página web o realice ventas por comercio electrónico. b) Calcule la probabilidad de que realice ventas por comercio electrónico.
c) Calcule la probabilidad de que no tenga página web y realice ventas por comercio electrónico. d) Razone si son independientes los sucesos "Tener página web" y "Realizar ventas por comercio electrónico". ¿Son incompatibles?

	Con página web (W)	Sin página web ($\overline{W}$)	
Ventas por comercio electrónico (V)	9.6	3.4	13
Sin ventas por comercio electrónico ($\overline{V}$)	22.4	64.6	87
	32	68	100

a) Es la suma de los que hacen ambas cosas o solo una de ellas: $P(V \cup W) = 9.6+3.4+22.4=35.4\%$ o también: $P(V \cup W) = P(V)+ P(W) - P(V \cap W) =12+32-9,6=35,4\%$
b) P(V) en la tabla = 13%
c) Nos piden calcular $P(V \cap W)$ = en la tabla: = 3.4%
d) Para que sean incompatibles ➞ $P(V \cap W) = 0$. Como es 9.6% = 0.096 ➞ no son incompatibles.

Asturias 2017. En una asociación benéfica se reparten dos productos, *harina* y *leche*. Todas las personas que entran cogen dos unidades a elegir entre los dos tipos de producto. El 70% de las personas que entran cogen harina y el 40% los dos productos. Calcula: a) La probabilidad de que una persona que entre coja leche. b) La probabilidad de que una persona que entre coja un solo tipo de producto. c) Una persona que sale de la asociación lleva leche. ¿Cuál es la probabilidad de que haya cogido también harina?

Sean H y L sucesos coger harina o leche. (suponerse que la probabilidad es la misma): Si se cogen dos productos sucesivamente pueden darse los casos: → HH, HL, LH y LL (incompatibles). En los tres primeros casos se ha cogido harina, siendo: P(HH, HL, LH) = 0,70. También se sabe que P(HL, LH) = 0,40. Y, por supuesto, P(HH, HL, LH, LL) = 1. Como los cuatro sucesos son incompatibles: P(HH, HL, LH, LL) = P(HH)+ P(HL) + P(LH) + P(LL) = 1. **a**) Como P(HH, HL, LH) = P(HH) + P(HL, LH) = 0,7 ⇒ P(HH) + 0,4 = 0,7 ⇒ P(HH) = 0,3. Los casos en los que se coge leche son: HL, LH y LL. (Todos menos el caso HH). ➝ P(L) = P(HL, LH, LL) = 1 – P(HH) = 1 – 0,3 = 07. Probabilidad de coger solo leche: P(LL) = P(HL, LH, LL) – P(HL, LH) = 0,7 – 0,4 = 0,3. b) La probabilidad de coger un solo producto, suceso HH o LL es: P(HH, LL) = 0,3 + 0,3 = 0,6. c) $P(H/L)=P(H\cap L)/PL = 0,4 / 0,7 = 4/7$.

PAU 2017 Balears. Siguin A i B dos successos tals que $P(A\cup B) = 0.9$, $P(A) = 0.4$, on A^c denota el succés complementari del succés A, i $P(A \cap B) = 0.2$. Calculeu les probabilitats següents:
a) P(B), b) P(A/B) c) $P(A\cap B^c)$ d) $P(A^c \cap B^c)$.

Sol:
a) p(B): $0.9 = p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 1 - p(Ac) + p(B) - p(A \cap B) = 1 - 0.4 + p(B) - 0.2 = 0.4 + p(B)$ $\Rightarrow p(B) = 0.5$
b) p(A/B): $p(A/B) = p(A \cap B)/ p(B) = 0.2/ 0.5 = 0.4$
c) $p(A \cap B^c)$: $p(A \cap B^c) = p(A) - p(A \cap B) = 1 - p(A^c) - p(A \cap B) = 1 - 0.4 - 0.2 = 0.4$
d) $p(Ac \cup B^c)$: $p(A^c \cup B^c) = p((A \cap B)^c) = 1 - p(A \cap B) = 1 - 0.2 = 0.8$

PAU 2016 Balears Contestau els apartats següents: a) Si la probabilitat de la intersecció de dos successos independents és 0.2 i la de la seva unió és 0.7, quina és la probabilitat de cadascun dels successos? b) En un experiment se sap que p(A) = 0.6, p(B) = 0.3 i p(A|B) = 0.1. Calculau $p(A \cup B)$.

Sol: Com que són independents, hem de resoldre, per calcular les seves probabilitats, el sistema següent:

$$\begin{cases} p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) \\ p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0.2 = p(A) \cdot p(B) \\ 0.7 = p(A) + p(B) - 0.2 \end{cases} \rightarrow p(B) = 0.5, \text{ i } p(B) = 0.4$$

b) $p(A/B) = p(A \cap B) / p(B) \Rightarrow 0.1 = p(A \cap B) / 0.3 \Rightarrow p(A \cap B) = 0.03$
$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0.6 + 0.3 - 0.03 = 0.87$

PAU 2019 Balears Un dau està carregat de manera que la probabilitat d'obtenir un 6 és de 1/2 i les probabilitats d'obtenir cadascuna de les altres cares són iguals a p. Es llança aquest dau, calculau la probabilitat de cadascun dels successos següents:
a) S'obté un dos. b) No s'obté un tres. c) S'obté un nombre parell. d) S'obté un nombre imparell.

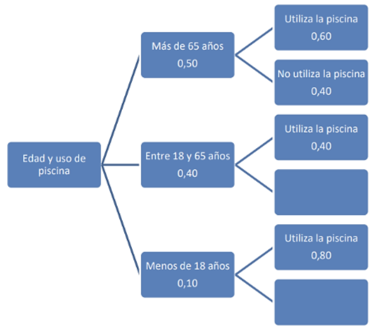
a) p(6) = ½ , p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p ➝ ½ + 5p = 1 ➝ p=1/10
b) p(3) = 1 – p(3) = 1 –1/10 = 9/10 c) p(parell) = p(2) + p(4) + p(6) =1/10+1/10+1/2 = 7/10
d) p(imparell) = 1 – p(parell) = 1 – 7/10 = 3/10

La Rioja, junio 17 El 50% de los habitantes de una localidad tienen más de 65 años y el 10% menos de 18 años. El 60% de los mayores de 65 años, así como el 80% de los menores de 18 años y el 40% del resto de los habitantes, utilizan el complejo de piscinas local. 1) Elegido al azar un habitante de la localidad, calcule la probabilidad de que utilice el complejo de piscina local. 2) Elegido al azar un habitante de la localidad que no utiliza el complejo de piscina local, halle la probabilidad de que tenga más de 65 años.

Con tabla de contingencia: →

- *a) 54%*
- *b) 20/46= 43,4%*

	<18	*18-65*	*>65*	
Pisc	*8*	*16*	*30*	***54***
No Pisc	*2*	*24*	***20***	***46***
Suma	*10*	*40*	*50*	*100*

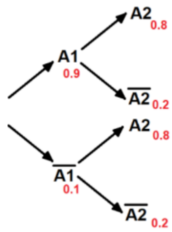


Con diagrama de árbol: →

- *a) T. total*: P(piscina)= 0,5·0,6 + 0,4·0,4+ 0,1·0,8 = **0,54**
- *b) Bayes*: P(>65 años/No Piscina)= (0,5·0,4) / (1 - 0,54) = **0,434**

PAU P24 Un ordinador personal té operatius dos programes antivirus A1 i A2 que actuen simultàniament i de forma independent. Davant la presència d'un virus, el programa A1 el detecta amb una probabilitat de 0.9 i el programa A2 el detecta amb una probabilitat de 0.8. Calculeu de forma raonada: (**a**) La probabilitat que un virus qualsevol sigui detectat. (**b**) Si un virus ha estat detectat, quina és la probabilitat que l'hagi detectat l'antivirus A1? (**c**) Si un virus ha estat detectat, quina és la probabilitat que l'hagin detectat els dos antivirus A1 i A2? (**d**) Un software addicional altera el funcionament de l'antivirus A2 de manera que la probabilitat que detecti un virus ja no és de 0.8. Quina és aquesta nova probabilitat si sabem que un virus és detectat per A1 i no per A2 amb probabilitat 0.27?

a) e (1−0.9)(1−0.8) = 0.02 successos independents. Probabilitat detectat: 1 − 0.02 = 0.98.
   Alternativament: P(A1 ∪ A2) = P(A1) + P(A2) − P(A1 ∩ A2) = 0.9 + 0.8 − 0.72 = 0.98
b) P(A1 | detectat) = P(A1 ∩ detectat)/ P(A1) = 0,9/0.98=0.918
c) P(A1 ∩ A2) = P(A1 ∩ A2∩ detectat)/ P(detectat) = P(A1 ∩ A2)/P(detectat)= 0,72/0,98 = 0,7347
d) Probabilitat detectat per A_1 i no per A_2: 0,27 = $P(A1 \cap \overline{A2}) = P(A1)\cdot P(\overline{A2}|A1) = 0{,}9(1-x)$
   ó 0,9 · (1 − P(A_2)) = 0,27 → P(A_2) = 1 – 0,27/0,9 = 0,7



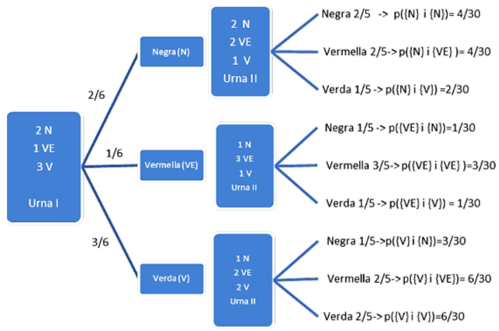
PAU 2019 Balears Tenim dues urnes descrites a continuació:
Urna **I**: 2 bolles negres, 1 bolla vermella i 3 bolles verdes.
Urna **II**: 1 bolla negra, 2 bolles vermelles i 1 bolla verda.
L'experiment consisteix a extraure una bolla a l'atzar de l'urna I, introduir-la en l'urna II, remoure i extraure, finalment, una bolla a l'atzar de l'urna II. **a**) Donau un diagrama en arbre que representi l'experiment amb les probabilitats associades. **b**) Calculau la probabilitat que la segona bolla extreta sigui b.1) vermella. b.2) negra. b.3) verda. **c**) Sabent que la segona bolla ha esta negra, quina és la probabilitat que la primera també ho fos? **d**) Quina és la probabilitat que la primera fos vermella sent vermella la segona?

Sol:

b.1) p({2a bolla vermella}) = 4/30 + 3/30 + 6/30 = 13/30
b.2) p({2a bolla negra}) = 4/30 + 1/30 + 3/30 = 8/30
b.3) p({2a bolla verda}) = 2/30 + 1/30 + 6/30 = 9/30

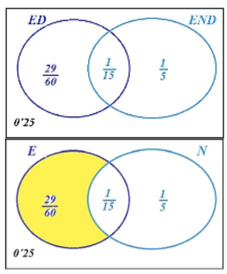
c) p(1a N/2a N) = p({N} i {N}) / p(2a N) = 4/30 / 8/30 = 4/8 = ½

d) p(1a VE/2a VE) = p({VE} i {VE}) / p(2a VE) = 3/30 / 13/30 = 3/13



Valencia 2015. 4.4.25. El 25% dels estudiants d'un institut no realitzen cap activitat extraescolar, mentre que el 55% realitzen una activitat extraescolar esportiva. Sabem a més que un de cada quatre estudiants que practiquen una activitat extraescolar no esportiva també practica una d'esportiva. Es demana: a) Calcula la probabilitat què un estudiant triat a l'atzar practiqui una activitat extraescolar esportiva i una altra de no esportiva. b) Calcular la probabilitat què un estudiant practiqui només una activitat extraescolar esportiva. c) Són independents els successos "Practicar una activitat extraescolar esportiva" i "Practicar una activitat extraescolar no esportiva"? Raona la teua resposta.

a) $P(E\cup N)=P(E)+P(N)-P(E\cap N)$ → $0.75=0.55+P(N)-P(E\cap N)$ → $0.75=0.55+P(N)-0.25\cdot P(N)$ →
   $P(N)=0.20/0.75\approx0.2667$
   $P(E\cap N)=0.25\cdot P(N)=0.25\cdot0.2667\approx$**0.0667**
b) $P(E)-P(E\cap N)=0.55-0.0667\approx$**0.4833**
c) $P(E\cap N)\neq P(E)\cdot P(N)$ →no independ.



PAU 2019 Balears Tenim un dau correcte i dues urnes amb bolles descrites a continuació:

Urna I: 1 bolla negra, 3 bolles vermelles i 6 bolles verdes.

Urna II: 2 bolles negres, 6 bolles vermelles i 2 bolles verdes.

Tirem el dau. Si surt 1 o 2, anam a l'urna I. Si surt 3, 4, 5 o 6, acudim a l'urna II. Extreim a l'atzar una bolla de l'urna corresponent.

a) Donau un diagrama en arbre que representi l'experiment amb totes les probabilitats.

b) Calculau les probabilitats següents: i) p({3, 4, 5, 6} i {bolla vermella}).

ii) p({bolla verda}/{1}). iii) p({bolla vermella}/{5}). iv) p({2} i {bolla verda}).

c) Calculau la probabilitat que la bolla extreta hagi estat vermella i que hagi estat negra. Quina és la probabilitat que la bolla extreta hagi estat verda? Quant val la suma de les tres probabilitats? Justifica la resposta.

b) p({3, 4, 5, 6} i {bolla vermella}) = 4/6 · 6/10 = 2/5 p({bolla verda}/{1}) = 6/10 = 3/5

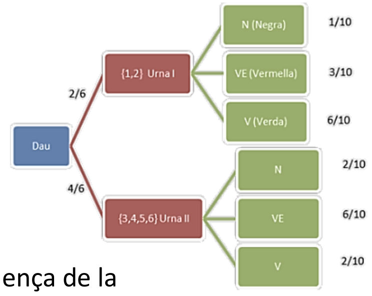
p({bolla vermella}/{5}) = 6/10 = 3/5 p({2} i {bolla verda} = 1/6 · 6/10 = 1/10

c) p({bolla vermella}) = 2/6 · 3/10 + 4/6 · 6/10 = 1/2

p({bolla negra}) = 2/6 · 1/10 + 4/6 · 2/10 = 1/6

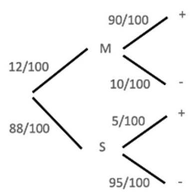
p({bolla verda}) = 2/6 · 6/10 + 4/6 · 2/10 = 1/3

p({bolla vermella}) + p({bolla negra}) + p({bolla verda}) = 30/60 + 10/60 + 20/60 = 1



UPC Problema 1 (A) En una població on la malaltia X és endèmica, se sap que la prevalença de la malaltia és d'un 12% (és a dir, el 12% de la població té la malaltia). Es disposa d'una prova per a detectar la malaltia, però no és totalment fiable, ja que, la sensibilitat del test és del 90% (és a dir, dóna positiu en un 90% dels casos de persones realment malaltes); però dóna un 5% de falsos positius (és a dir, dóna erròniament positiu en un 5% de persones sanes).

1. Dibuixa l'arbre associat a aquest esdeveniment.
2. Si una persona està malalta, quina és la probabilitat que el test li hagi sortit negatiu (fals negatiu)?
3. Es demana la taula de probabilitats conjuntes i marginals. A més, també es demana desenvolupar formalment el càlcul de la probabilitat que el test sigui negatiu?
4. Es demana la taula amb les probabilitats condicionades al resultat del test: P(M|+), P(M|-), P(S|+) i P(S|-). Expliqueu breument el resultat que heu trobat.
5. L'especificitat del test és la capacitat del test de donar negatiu en persones sanes. Quina és l'especificitat?
6. Quina és la probabilitat que una persona estigui sana si li ha sortit el test positiu?
7. Hi ha dependència o independència entre estar malalt i el resultat del test (justifica la resposta)?



Nota: M: Malalt; S: Sa; +: Positiu; -: Negatiu

2. P(-|M) = 10/100 = 0.1

3.

	+	-	Total
Malalt	12/100·90/100=0.108	12/100·10/100=0.012	0.12
Sa	88/100·5/100=0.044	88/100·95/100=0.836	0.88
Total	0.152	**0.848**	1

$$P(-) = P(-\cap M) + P(-\cap S) = P(-|M)P(M) + P(-|S)P(S) = 0.1 \cdot 0.12 + 0.95 \cdot 0.88 = 0.848$$

	+	-
Malalt	P(M|+) = 0.108/0.152=0.711	P(M|-) = 0.012/0.848=0.014
Sa	**P(S|+) = 0.044/0.152=0.289 (pregunta 6)**	P(S|-) = 0.836/0.848=0.986
Total	1	1

5. Especificitat = P(-|S) = 1 - P(+|S) = 1 - falsos positius = 1 - 0.05 = 0.95

6. $$P(S|+) = \frac{P(+|S)P(S)}{P(+)} = \frac{P(+|S)P(S)}{P(+\cap S) + P(+\cap M)} = \frac{P(+|S)P(S)}{P(+|S)P(S) + P(+|M)P(M)}$$
$$= \frac{{}^{5}/_{100} \cdot {}^{88}/_{100}}{{}^{5}/_{100} \cdot {}^{88}/_{100} + {}^{90}/_{100} \cdot {}^{12}/_{100}} = \frac{0.044}{0.152} = 0.2895$$

7. Per exemple,

$P(Malalt \cap +) \neq P(Malalt) \cdot P(+)$

$0.108 \neq 0.12 \cdot 0.152 \Rightarrow Dependents$

PAU 24 Sep S'estima que el 20 % dels habitants d'una regió pateix algun tipus d'arrítmia. Per a diagnosticar-la, hi ha la possibilitat de col·locar al pacient un monitor Holter, que detecta l'arrítmia en un 95 % dels casos de persones que la pateixen, però que també dona falsos positius, per motius elèctrics, en persones que no pateixen arrítmies en un 0,5 % dels casos. a)Si escollim 4 persones a l'atzar, quina és la probabilitat que almenys una d'elles pateixi arrítmies? b) Quina és la probabilitat que una persona escollida a l'atzar obtingui un diagnòstic positiu d'arrítmia? c) Si una persona obté un diagnòstic negatiu a la prova del Holter, quina és la probabilitat que realment pateixi arrítmies?

(a) $P(A) = 0.2$. binomial amb $n = 4$ i $p = 0.2$ $\quad P(N \geq 1) = 1 - P(N = 0) = 1 - (1 - 0.2)^4 = 0.5904$

(b) $P(\bar{A}) = 0.8$, $\quad P(H \mid A) = 0.95$ i $P(H \mid \bar{A}) = 0.005$.

probabilitat total: $P(H) = P(H \mid A) \cdot P(A) + P(H \mid \bar{A}) \cdot P(\bar{A}) = 0.95 \cdot 0.2 + 0.005 \cdot 0.8 = 0.194$.

(c) Bayes: $P(A \mid \bar{H}) = \frac{P(A \cap \bar{H})}{P(\bar{H})} = \frac{P(A) \cdot P(\bar{H} \mid A)}{1 - P(H)} = \frac{0.2 \cdot (1 - 0.95)}{1 - 0.194} = 0.012 \ldots$.