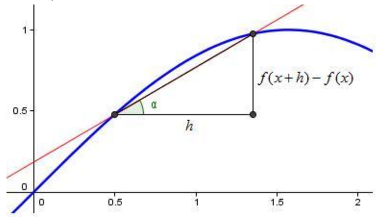
3 Derivada d'una funció en un punt.

3.1 Taxa de variació mitjana (TVM): $\boxed{TVM(f,x,h)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$



La TVM és la tangent de l'angle α : $TVM=\tan(\alpha)$

Exercicis TVM

3.1.1 Determina la TVM de la funció $f(x)=x^2-x$ en l'interval $[1,4]$

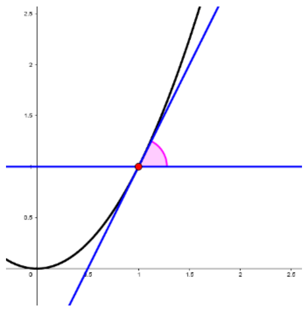
3.1.2 Determina la TVM de la funció $f(x)=x^2-5x+3$ en l'interval $[-1,3]$

3.1.3 Degut a les pèssimes condicions ambientals, una colònia de 10 milions de bacteris no comença el seu creixement fins passats dos mesos. La funció que representa la població d'un determinat bacteri ve donada per la funció: $f(t)=\begin{cases}10 & 0\le t\le 2\\ 10e^{t-2} & t>2\end{cases}$
Calcula la taxa de variació mitjana de la població en els intervals $[\,0\,,2\,]$ i $[\,0\,,4\,]$.

3.1.4 Si una demanda de talls de cabell ve expressada per la funció $c(p)=100-p^2$, on p indica el preu en euros, determina la taxa de variació mitjana de la demanda quan el preu passi de 7€ a 9€.

La TVM com a aproximació a la pendent i l'angle d'una funció.

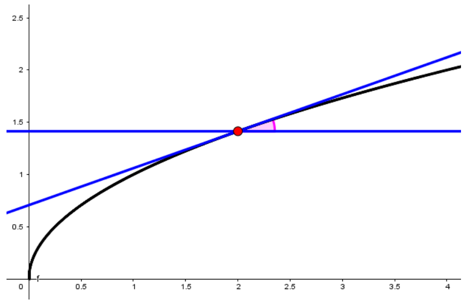
3.1.5 Mesura, amb el transportador d'angles, l'angle de la funció $f(x)=x^2$ per a $x=1$. Completa la següent taula, i comprova que els valors obtinguts s'apropen més i més a l'angle real, a mida que $h\to 0$.



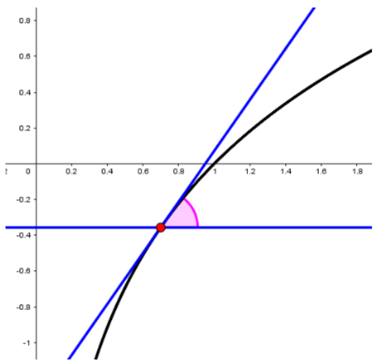
h	$TVM=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$	$\alpha=\arctan(TMV)$
1		
0.5		
0.1		
0.01		

3.1.6 Mesura, amb el transportador d'angles, l'angle de la funció $f(x)=\sqrt{x}$ per a $x=2$. Completa la següent taula, i comprova que els valors obtinguts s'apropen més i més a l'angle real, a mida que $h\to 0$.

h	$TVM=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$	$\alpha=\arctan(TMV)$
1		
0.5		
0.1		
0.01		



3.1.7 Mesura, amb el transportador d'angles, l'angle de la funció $f(x)=\ln(x)$ per a $x=0.7$. Completa la següent taula, i comprova que els valors obtinguts s'apropen més i més a l'angle real, a mida que $h\to 0$.



3.2 Concepte de derivada d'una funció en un punt.

Derivada d'una funció en un punt.

Diem que la funció $f(x)$ és derivable en el punt $x=a$ si existeix el límit

$$\boxed{f'(a)=\lim_{h\to 0} TVM(f,a,h) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

A aquest límit, si existeix, li direm **derivada de la funció en a**.

Exemple. Derivada de la funció arrel quadrada.

Sigui $\boldsymbol{f(x)=\sqrt{x}}$ i volem determinar la seva derivada mitjançant la definició anterior.

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}=\frac{0}{0}\rightarrow Indeterminació$$

Per resoldre la indeterminació, multipliquem numerador i denominador pel conjugat:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{a+h}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{a+h}\right)^2-\left(\sqrt{a}\right)^2}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{a+h-a}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}=\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

Per tant, si $f(x)=\sqrt{x}\rightarrow$ $\boldsymbol{f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}}$

Exemples. Derivada de funcions potencials mitjançant la definició.

1. $f(x)=k \rightarrow f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{k-k}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{0}{h}=\lim\limits_{h\to 0}0=0\Rightarrow f'(x)=0$

2. $f(x)=kx \rightarrow f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{k(x+h)-kx}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{kx+kh-kx}{h}=$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{kh}{h}=\lim_{h\to 0}k=k\Rightarrow f'(x)=k$$

3. $f(x)=x^2 \rightarrow f(x+h)=(x+h)^2=x^2+2hx+h^2$

$$f(x+h)-f(x)=x^2+2hx+h^2-x^2=2hx+h^2$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{2hx+h^2}{h}=\frac{h(2x+h)}{h}=2x+h$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x\Rightarrow f'(x)=2x$$

4. $f(x)=x^3 \rightarrow f(x+h)=(x+h)^3=x^3+3hx^2+3h^2x+h^3$

$$f(x+h)-f(x)=x^3+3hx^2+3h^2x+h^3-x^3=3hx^2+3h^2x+h^3$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{3hx^2+3h^2x+h^3}{h}=\frac{h(3x^2+3hx+h^2)}{h}=3x^2+3hx+h^2$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(3x^2+3hx+h^2\right)=3x^2\Rightarrow f'(x)=3x^2$$

3.2.1 Flipped Classroom (en anglès) https://youtu.be/P9dpTTpjymE

Calculus Rhapsody https://youtu.be/uqwC41RDPyg

3.3 Creixement, decreixement i extrems relatius.

Creixement i decreixement d'una funció:

Si una funció és creixent, direm que és monòtona.

Anàlogament es defineix decreixent i estrictament decreixent en $x = p$.

Proposició.

Si $f(x)$ és derivable:	$f(x)$ creixent en $x = p \Leftrightarrow f'(p) \geq 0$ $f(x)$ decreixent en $x = p \Leftrightarrow f'(p) \leq 0$

Màxims i mínims relatius.

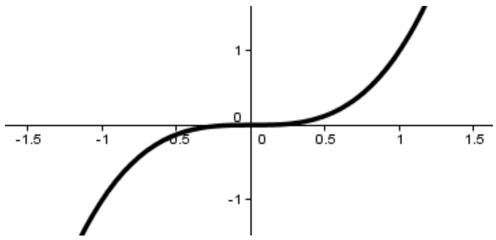
$f(x)$ té un màxim relatiu en $x = p$ si existeix un entorn $(p-a, p+a)$ tal que si $x \in (p-a, p+a) \Rightarrow f(x) < f(p)$. Anàlogament es defineix un mínim relatiu.

Condició necessària per ser extrem relatiu.

Si $f(x)$ és derivable en $x = p$ i hi té un mínim o un màxim relatiu, llavors $f'(p) = 0$

Observació. Derivada igual a zero no implica extrem relatiu.

$f'(a) = 0$ no implica necessàriament que sigui un extrem relatiu. Per exemple, la funció $f(x) = x^3$ compleix $f'(x) = 3x^2$, i la seva primera derivada s'anul·la en $x = 0$, però no és cap extrem relatiu, aquesta funció és sempre creixent:

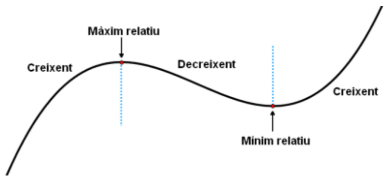


Per garantir que es tracta realment d'un extrem relatiu, hem d'analitzar el signe de la derivada en les proximitats del punt, a la dreta i a l'esquerra.

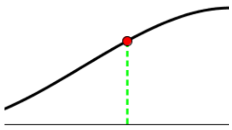
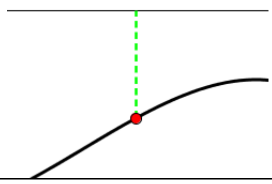
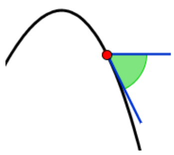
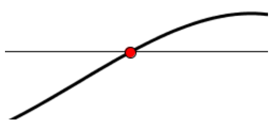
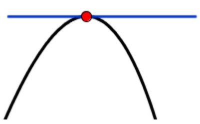
Criteri de la primera derivada per a determinar màxims i mínims relatius.

Una funció presenta un **extrem relatiu** en $x = a$ si, la funció canvia de creixent a decreixent (**màxim relatiu**) o de decreixent a creixent (**mínim relatiu**).

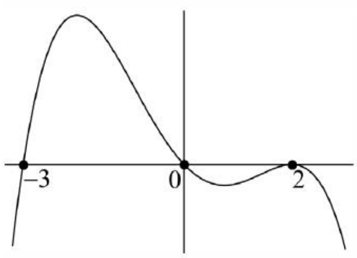
També es pot trobar mitjançant la segona derivada.



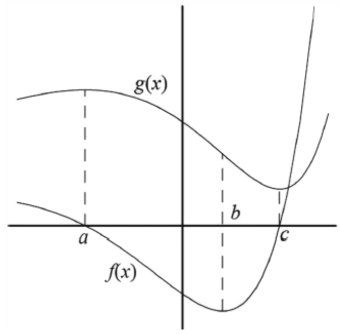
Diferència entre $f(x)$ i $f'(x)$.

Entre $f(x)$ i $f'(x)$ només canvia una tilde, però representen conceptes totalment diferents:	
$\boldsymbol{f(x)}$ Ens informa de **la altura** de la gràfica	$\boldsymbol{f'(x)}$ Ens informa de **la inclinació** de la gràfica
$f(x) > 0$ Indica que la gràfica de la funció està per sobre de l'eix X 	$f'(x) > 0$ Indica que la gràfica de la funció és **creixent** 
$f(x) < 0$ Indica que la gràfica de la funció està per sota de l'eix X 	$f'(x) < 0$ Indica que la gràfica de la funció és **decreixent:** 
$f(x) = 0$ Indica que la gràfica de la funció està just a l'eix X 	$f'(x) = 0$ Indica que la recta tangent a la gràfica de la funció és **horitzontal:** 

3.3.1 La gràfica corresponent a la derivada d'una funció f(x) és la següent: →
a) Expliqueu raonadament quins valors de x corresponen a màxims o a mínims relatius de f(x).
b) Determineu els intervals de creixement i decreixement de la funció f(x). PAU CAT TEC JUNY 2011 4.3

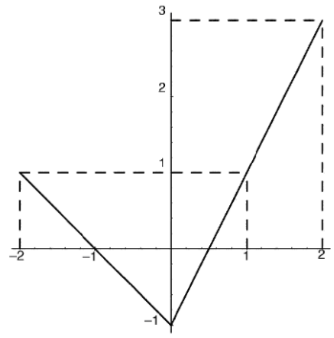


3.3.2 En la figura següent es representen dues funcions. L'una és la derivada de l'altra. Decidiu si la funció f(x) és la derivada de la funció g(x) o és a l'inrevés, estudiant què passa en els punts x = a , x = b i x = c. PAU CAT TEC JUNY 2010 4.5

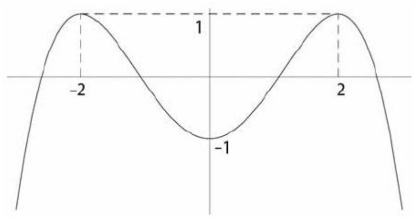


3.3.3 Teniu una funció f(x) definida per a $x \in (-2,2)$, sabeu que el gràfic de f '(x) és de la forma →

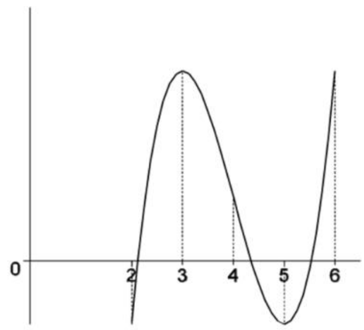
(on f'(–1) = 0, f'(0) = –1, f'(1) = 1) i que f(0) = 2.
Dibuixeu un gràfic aproximat de f(x) indicant en quins punts hi ha extrems relatius. PAU CAT TEC JUNY 2001 5.2



3.3.4 Considereu una funció tal que la seva representació gràfica a l'interval (-3,3) és la següent:
a) Determineu les abscisses dels punts extrems (màxims i mínims) relatius.
b) Estudieu el creixement i decreixement de la funció a l'interval (-3,3)
c) Feu un esbós de la gràfica de la derivada d'aquesta funció.
d) Sabent que la funció és de la forma $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$, trobeu de quina funció es tracta. PAU CAT TEC JUNY 2008 2.5



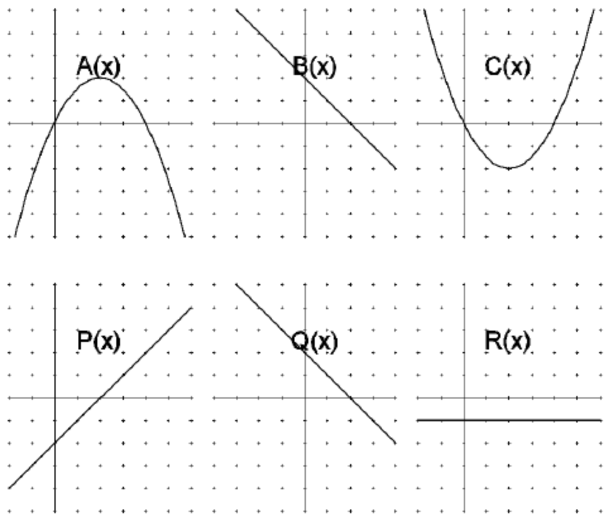
3.3.5 La gràfica següent correspon a una funció $f:[2,6] \to IR$ derivable i amb derivada contínua. Feu un esbós de la gràfica de $f':(2,6) \to IR$ i justifiqueu-ne el perquè. PAU CAT TEC SET 2004 5.2



3.3.6 El dibuix representa les gràfiques de les tres funcions A(x), B(x) i C(x) i de les seves derivades P(x), Q(x) i R(x), no necessàriament en el mateix ordre.

Associeu cada funció A(x), B(x) i C(x) amb la seva respectiva funció derivada P(x), Q(x) o R(x). Raoneu la resposta.

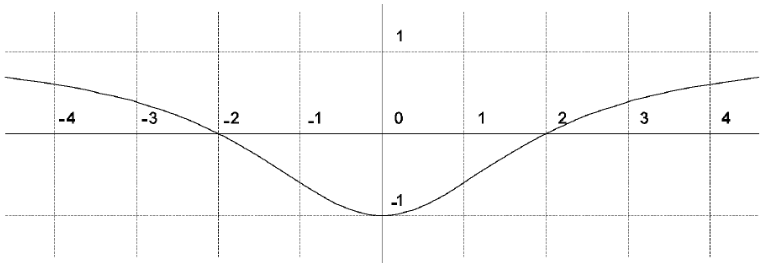
PAU CAT CCSS JUNY 2004 4.3



3.3.7 Observeu la gràfica següent de la funció f(x) i digueu quin valor tenen (aproximadament)

a) f (0)
b) x si f(x) = 0
c) f’(0)
d) f’(–2)

PAU CAT CCSS JUNY 2004 3.4



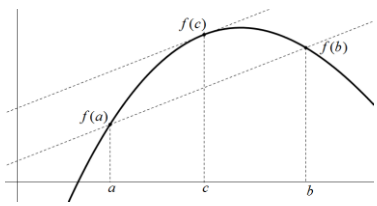
3.4 Propietats de les funcions derivables.

Derivabilitat implica continuïtat: Si una funció és derivable en un punt, és contínua en aquest punt.

Teorema de Rolle: Si f és contínua en $[a,b]$, derivable en (a,b) i $f(a)=f(b)$, llavors existeix un $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=0$. Demostració: Si $f(x)$ no és constant, en ser contínua, segons el teorema de Weierstrass, tindrà màxim o mínim

Teorema del Valor Mig: Si $f(x)$ és contínua en $[a,b]$ i derivable en (a,b), llavors existeix un $c\in(a,b)$ tal que $\boldsymbol{f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a)}$

Geomètricament vol dir que existeix un punt de l’interval (a,b) en el qual la tangent a la gràfica és paral·lela a la secant.



Corol·lari: Si $f(x)$ és contínua en $[a,b]$ i derivable en (a,b)

a) Si $f'(x)\geq 0\ \forall x\in(a,b)\Rightarrow$ f és creixent en $[a,b]$.
b) Si $f'(x)\leq 0\ \forall x\in(a,b)\Rightarrow$ f és decreixent en $[a,b]$.
c) Si $f'(x)=0\ \forall x\in(a,b)\Rightarrow$ f és constant en $[a,b]$.

Corol·lari: Si $f(x)$ és contínua en $[a,b]$ i derivable en (a,b)

a) Si $f'(x)>0\ \forall x\in(a,b)\Rightarrow$ f és estrictament creixent en $[a,b]$.
b) Si $f'(x)<0\ \forall x\in(a,b)\Rightarrow$ f és estrictament decreixent en $[a,b]$.

3.4.1 **Problema.** Determineu el valor mínim de $f(4)$ si sabem que $f(1)=10$ i $f'(x)\geq 2$ per a tot $1\leq x\leq 4$.

3.5 Derivabilitat amb funcions definides a trossos.

Derivades laterals.

*** Per la dreta:** $f'(a^+) = \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ *** Per l'esquerra:** $f'(a^-) = \lim\limits_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Proposició. Perquè existeixi la derivada d'una funció contínua en un punt, les seves derivades laterals han d'existir i han de ser iguals. $f'(a) = f'(a^+) = f'(a^-)$

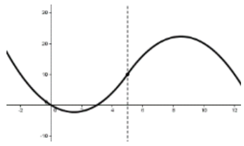
Derivabilitat de funcions definides "a trossos".

Si una funció f(x) està definida "a trossos" per dos funcions h(x) i g(x) derivables en $x = a$

Llavors $f(x) = \begin{cases} h(x) & si x < a \\ g(x) & si x \ge a \end{cases}$ $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = h'(a) \\ \lim\limits_{h\to 0-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = g'(a) \end{cases}$

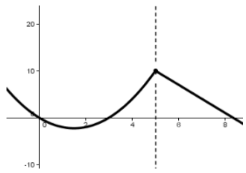
$f(x)$ serà derivable si les derivades laterals coincideixen.

Exemple 1 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & si\ x < 5 \\ -x^2 + 17x - 50 & si\ x \ge 5 \end{cases}$ →



És contínua i derivable en x = 5

Exemple 2 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & si\ x < 5 \\ -3x + 25 & si\ x \ge 5 \end{cases}$ →



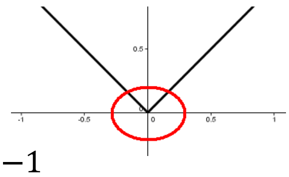
És contínua però **no** és derivable en x = 5

Visualment, la funció és *suau* si és derivable i *punxa* si no ho és

Exercici resolt 1: Demostra que la funció $f(x) = |x|$ no és derivable en $x = 0$.

Solució:

Recordem que $f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \ge 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ tècnicament és una funció definida a trossos.



(1) $\lim\limits_{h\to 0+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0+} \frac{|0+h|-|h|}{h} = \lim\limits_{h\to 0+} \frac{h-0}{h} = \lim\limits_{h\to 0+} \frac{h}{h} = \lim\limits_{h\to 0+} 1 = 1$

(2) $\lim\limits_{h\to 0-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0-} \frac{|0+h|-|h|}{h} = \lim\limits_{h\to 0-} \frac{-h-0}{h} = \lim\limits_{h\to 0-} \frac{-h}{h} = \lim\limits_{h\to 0-} -1 = -1$

Els límits laterals al voltant del 0 no coincideixen.

Exercici resolt 2. *Donada la funció* $f(x) = \begin{cases} 0 & si x \le -1 \\ ax^3 + bx & si -1 < x < 2 \\ 11x - 16 & si x \ge 2 \end{cases}$

a) Trobeu a i b per als què la funció sigui contínua en tot x real.

b) Estudieu la derivabilitat d'aquesta funció.

Solució: a) Fora dels punts frontera $x = -1$ i $x = 2$, la funció són polinomis, i per tant perfectament contínua.

Continuïtat en $x = -1$: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = [ax^3 + bx]_{x=-1} = -a - b \\ \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = [0]_{x=-1} = 0 \\ f(-1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -a - b = 0$

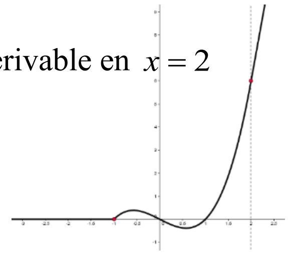
Continuïtat en $x = 2$: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = [11x - 16]_{x=2} = 6 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = [ax^3 + bx]_{x=2} = 8a + 2b \\ f(2) = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow 8a + 2b = 6 \Rightarrow 4a + b = 3$

$\begin{cases} -a - b = 0 \\ 4a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow a = 1,\ b = -1$

b) Fora dels punts frontera $x = -1$ i $x = 2$, la funció són polinomis, i per tant perfectament derivable.

Derivabilitat en x=-1 : $\left.\begin{array}{l} f'(-1^+) = [3x^3-1]_{x=-1} = 2 \\ f'(-1^-) = [0]_{x=-1} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \neq 0 \Rightarrow$ <u>No</u> és derivable

Derivabilitat en $x=2$: $\left.\begin{array}{l} f'(2^+) = [11]_{x=2} = 11 \\ f'(2^-) = [3x^2-1]_{x=2} = 11 \end{array}\right\} \Rightarrow 11 = 11 \Rightarrow$ <u>Sí</u> és derivable en $x=2$

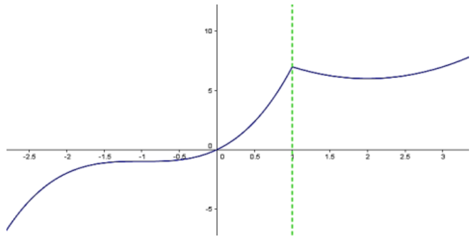


Exercici resolt 3 Estudia la continuïtat i determina els extrems relatius de la funció

$$f(x) = \begin{cases} x^3+3x^2+3x & x<1 \\ x^2-4x+10 & x \geq 1 \end{cases}$$

Solució:

La funció té un extrem relatiu a x=2, i també té un extrem relatiu al punt frontera x=1.
Observem que no té cap extrem relatiu al punt x= -1 tot i què en aquest punt s'anul·la la derivada.



Exercicis:

3.5.1 a) Considereu la funció $f(x) = \begin{cases} \ln(x)\,,\ si\ x \in (0,e) \\ ax+b\,,\ si\ x \in [e,4) \end{cases}$ on a i b són nombres reals.

Trobeu el valor de a i de b per tal que la funció sigui contínua i derivable a l'interval (0, 4).

PAU CAT TEC SET 2022 3.4 (Solució: PAUTEC pàg 756)

3.5.2 Trobeu els valors dels paràmetres a i b per tal que la funció següent sigui contínua i derivable en x = 2. $f(x) = \begin{cases} ax^2+2x+3 & si & x<2 \\ x^3+bx+5 & si & x \geq 2 \end{cases}$ PAU CAT TEC JUNY 2008 5.1

3.5.3 Considereu la funció $f(x) = \begin{cases} x^2+x+b & si & x<0 \\ ae^{bx} & si & x \geq 0 \end{cases}$

on a i b són nombres reals.

a) Quina condició han de complir a i b per tal que f sigui contínua a tot IR?

b) Trobeu els valors de a i b per als quals f sigui contínua però no derivable a tot IR.

~~c) Per a a = 1 i b = 1, calculeu~~ $\cancel{\int_{-1}^{1} f(x)\,dx}$

PAU CAT TEC SET 2005 3.6

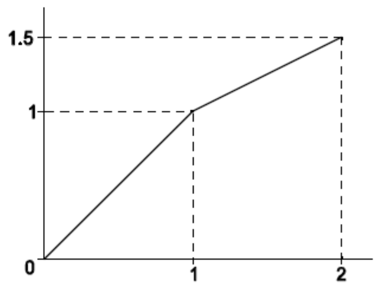
3.5.4 Considereu la funció f(x) de la figura definida a l'interval $[0,2]$.

a) Calculeu la funció derivada $f'(x)$ a l'interval (0,2).

b) Hi ha algun punt de (0,2) en el qual $f'(x)$ no existeixi?

~~c) Calculeu~~ $\cancel{\int_{0}^{2} f(x)\,dx}$.

PAU CAT TEC JUNY 2004 4.4



3.5.5 Considereu la funció definida per $f(x) = \begin{cases} e^{ax} & si\ x \leq 0 \\ 2x+1 & si\ x>0 \end{cases}$ on a és un nombre real.

a) Calculeu $\lim_{x \to 0} f(x)$ i comproveu que f(x) és contínua en x = 0.

b) Per a quin valor del paràmetre a la funció f(x) és derivable en x = 0 ? PAU CAT TEC SET 2001 4.3

3.5.6 D'una funció $y = f(x)$ sabem: a) El seu domini de definició és tot $\mathbb{R}$.

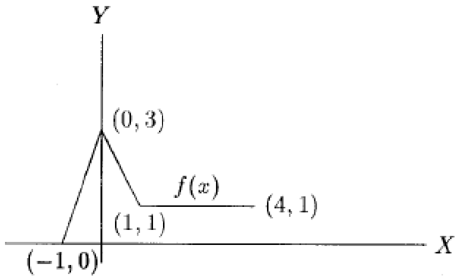
b) La seva funció derivada és $f'(x) = \begin{cases} 2 & si\ x<1 \\ -1 & si\ x>1 \end{cases}$

c) f(x) és contínua en tot punt i $f(-1) = 2$.

Determineu el valor de $f(1)$ i dibuixeu la gràfica de la funció f(x). PAU CAT TEC SET 2000 6.1

3.5.7 La gràfica d'una funció és la que hi ha en el dibuix següent. Quina és la gràfica de la funció derivada? En quins punts és discontínua la derivada ?

PAU CAT TEC SET 1999 2.1



3.5.8 La funció derivada $f'(x)$ de certa funció contínua $f:\mathfrak{R}\rightarrow\mathfrak{R}$ és una funció a trossos formada per les semirectes del dibuix.

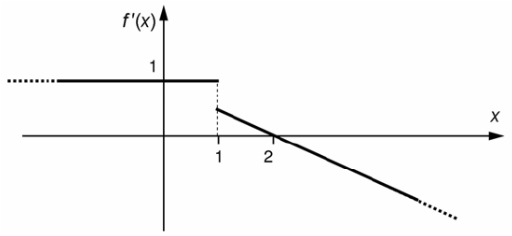
a) Digueu si f(x) és derivable en tots els punts de R

b) Estudieu el creixement i el decreixement.

c) Trobeu si f(x) té algun extrem relatiu i, si és així, per a quin valor de x i de quin tipus.

d) Sabent que f(0)=1, calculeu el valor de f(1).

Justifiqueu totes les respostes. PAU CAT TEC JUNY 2007



3.5.9 Trobeu els valors dels paràmetres a i b per tal que la funció següent sigui contínua i derivable en x= 2 $f(x)=\begin{cases} ax^2+2x+3 & si \quad x<2 \\ x^3+bx+5 & si \quad x\geq 2 \end{cases}$

Sol:a=7/2 b=4 PAU CAT TEC JUNY 2008 5.2

3.5.10 Considereu la funció següent: $f(x)=\begin{cases} x^2+2x+b & si\ x<0 \\ e^{-x}+1 & si\ x\geq 0 \end{cases}$

a) Determineu el valor de b perquè la funció f sigui contínua en el punt x= 0. Justifiqueu si f pot ser discontínua en algun altre punt.

b) Justifiqueu si, per a valors positius de x, la funció f és creixent o decreixent.

PAU CAT CCSS JUNY 2010 1.2

3.5.11 Considereu la funció: $f(x)=\begin{cases} 2x+2 & si \quad x\leq 0 \\ x^2-3x+2 & si \quad x>0 \end{cases}$

a) Dibuixeu la gràfica. b) Estudieu-ne la continuïtat. c) Determineu els extrems relatius.

PAU CAT CCSS JUNY 2006 3.4

3.5.12 Determina els valors dels paràmetres a i b de forma que la funció sigui contínua i derivable en tot R. $f(x)=\begin{cases} x^2-ax-1 & x<2 \\ -x^2+bx-a & x\geq 2 \end{cases}$

3.5.13 Determina la continuïtat i derivabilitat de la funció $f(x)=\begin{cases} e^x & x\leq 0 \\ x^2+x+1 & x>0 \end{cases}$

3.5.14 Considerem la funció $f:(-1,+\infty)\rightarrow IR$ definida per $f(x)=\begin{cases} a(x-1) & -1<x\leq 1 \\ x\ln x & x>1 \end{cases}$

a) Determina el valor de a sabent que f és contínua i derivable.

~~b) Determina~~ $\cancel{\int_0^2 f(x)\,dx}$.

3.5.15 Exercici Youtube: Calcula m i n per a què la funció $f(x)=\begin{cases} x^2-5x+m & x\leq 1 \\ -x^2+nx & x>1 \end{cases}$ sigui contínua i derivable. Solució: https://youtu.be/o1qhxnoEvUA (Susi Profe)

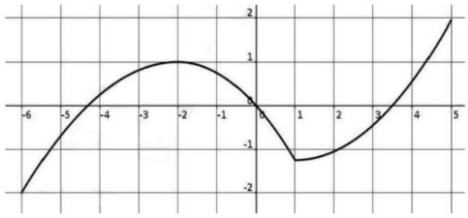
3.5.16 Youtube Calcula a i b per als què la funció $f(x)=\begin{cases} x^3-x & x<0 \\ ax+b & x\geq 0 \end{cases}$ sigui derivable. Solució: https://youtu.be/A4Qq4H5SBQ8 (profesor10demates)

3.5.17 La següent figura representa la gràfica d'una funció $f:[-2,5] \to IR$. Respon raonadament:

a) Per a quins valors d'x es compleix $f'(x) > 0$

b) Per a quins valors d'x la seva gràfica és un extrem relatiu?

c) Per a quins valors d'x la funció no és derivable?



3.5.18 a) Estudia la continuïtat i derivabilitat de la funció $f(x) = \begin{cases} 30x + 200 & 0 \le x \le 10 \\ x^2 - 60x + 1000 & 10 < x \le 40 \end{cases}$

b) Representa de forma esquemàtica la seva gràfica.

3.5.19 Determina a i b de forma que la funció $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \le 1 \\ -x^2 + ax + b & x > 1 \end{cases}$ sigui contínua i derivable en tot x real.

3.5.20 Donada la funció $f(x) = \begin{cases} \sin x & ; \quad x \le 0 \\ x^2 + ax + b & ; \quad x > 0 \end{cases}$

Trobeu a i b de forma que $f(x)$ sigui contínua i derivable.

3.5.21 Sigui $f(x)$ la funció definida per $f(x) = \begin{cases} -x^2 + ax + b & x \le 0 \\ e^x & x > 0 \end{cases}$

Determina els valors de a i b per als que la funció és contínua i derivable en tot $\mathbb{R}$.

3.5.22 Determina els valors de a i b que fan que la següent funció sigui derivable en tot $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \le 2 \\ ax + b & x > 2 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} ax + b & x \le -1 \\ ax^3 + x + 2b & x > -1 \end{cases}$

c) $f(t) = \begin{cases} at + b & t \le 0 \\ t^3 + 1 & t > 0 \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 2 & x \le 0 \\ \dfrac{x+b}{x-1} & x > 0 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 2 & x \le 1 \\ a\sqrt{x} - \dfrac{b}{x^2} & x > 1 \end{cases}$ f) $f(x) = \begin{cases} 2 + \dfrac{a}{x-1} & x < 0 \\ a + be^x & x \ge 0 \end{cases}$

3.5.23 Donada la funció $f(x) = \begin{cases} ln(x) - 1 & x > 1 \\ 2x^2 + ax + b & x \le 1 \end{cases}$

Determina els valors d'a i b per als què la funció és contínua i derivable.

3.5.24 Donada la funció $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & x < 2 \\ e^{2-x} + 2 & x \ge 2 \end{cases}$ Determina el valor de a per al què la funció és contínua en x=2. La funció és derivable en aquest punt?

3.5.25 Donada la funció $f(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{e^x} & x < 0 \\ x^2 + ax + b & x \ge 0 \end{cases}$ determina els valors d'a i b per als què la funció és derivable.

3.5.26 Donada la funció $f(x) = \begin{cases} a - x^2 & x \le 1 \\ \frac{2}{ax} & x > 1 \end{cases}$

Determina els valors de a per als què la funció és contínua. La funció és derivable en x=1?

3.5.27 Trobeu a i b de forma que la funció $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \le 1 \\ -x^2 + ax + b & x > 1 \end{cases}$ sigui contínua i derivable per a tot x real.

3.5.28 Determina els valors d'a i b de forma que la funció $f(x) = \begin{cases} ax + b & x \le 1 \\ 1/x & x > 1 \end{cases}$ sigui contínua i derivable en tot IR.

3.5.29 Determina els valors de b i c que fan derivable la següent funció:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 4x & x \le 1 \\ 2x^3 + bx + c & x > 1 \end{cases}$$

3.5.30 a) Estudia la continuïtat i la derivabilitat de la funció $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \le 1 \\ 1/x & x > 1 \end{cases}$

b) Estudia la monotonia de la funció anterior.

3.5.31 Determina els valors de a i b que fan derivable la següent funció:

$$f(x) = \begin{cases} ax^3 - 2 & x \le 3 \\ b(x-2)^2 + 10 & x > 3 \end{cases}$$

3.5.32 En una sessió, el valor d'una certa acció, en euros, va vindre donat per la funció:

$$f(x) = \begin{cases} -x + 15 & 0 \le x \le 3 \\ x^2 - 8x + 26 & 3 < x \le 6 \\ 2x + 2 & 6 < x \le 8 \end{cases}$$

on x representa el temps, en hores, transcorregut des de l'inici de la sessió. Es demana:

a) Estudiar la continuïtat de $f(x)$.

b) Calcular el valor màxim i el valor mínim que va aconseguir l'acció.

c) En quins moments va convenir comprar i vendre per a maximitzar el benefici? Quin hauria sigut aquest?

3.5.33 Donada la funció $f(x) = \begin{cases} x(x+a) & x < 0 \\ xe^x - 3x & x \ge 0 \end{cases}$

a) Determina el valor d'a que fa contínua aquesta funció.

b) Determina els seus punts de tall amb els eixos.

c) Estudia la seva monotonia.

3.5.34 Donada la funció $f(x) = \begin{cases} x(x+1) & x \le 0 \\ \frac{x}{x^2+1} & x > 0 \end{cases}$

a) Estudia la continuïtat i derivabilitat d'aquesta funció.

b) Estudia la seva monotonia.

c) El comportament de la funció quan $x \to +\infty$.

3.5.35 Donada la funció $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & x \le 1 \\ \frac{2x^2}{x^2+1} & x > 1 \end{cases}$

a) Determina els valors dels paràmetres a i b per als què la funció sigui contínua i derivable en tot R.

b) Estudi de la monotonia de la funció, amb els valors d'a i b obtinguts en l'apartat anterior.

c) Determina les seves asímptotes (verticals i horitzontals).

d) Determina la seva recta tangent en el punt $x = 3$.

3.5.36 Youtube Calcula m i n de forma que la funció sigui contínua i derivable.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + m & x \le 1 \\ -x^2 + nx & x > 1 \end{cases}$$

Solució: https://youtu.be/o1qhxnoEvUA (Susi Profe)

3.5.37 Youtube Calcula m i n de forma que la funció sigui contínua i derivable

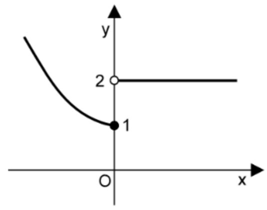
$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx - 1 & x \le 1 \\ 2bx - 2 & x > 1 \end{cases}$$

Solució: https://youtu.be/wE-vYOvNZSk (Arias Cabezas)

3.5.38 Determina els valors d'a i b de forma que la funció sigui contínua i derivable en tot IR.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - bx + 1 & x < 1 \\ bx^3 - ax - 3 & x \ge 1 \end{cases}$$

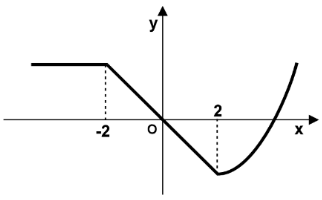
3.5.39 En la figura està representada $g(x)$:

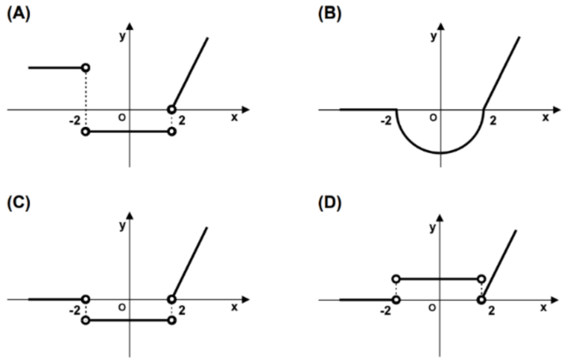


Indica el valor de $g'(0^{+})$, la derivada lateral de g per la dreta en el punt 0

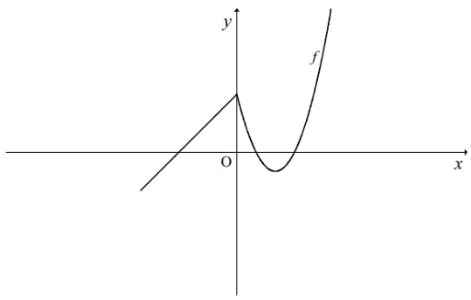
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) $+\infty$

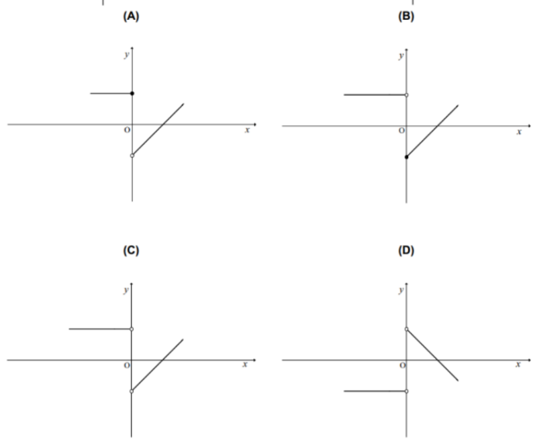
3.5.40 La següent imatge mostra la gràfica d'una funció $f(x)$:
Determina l'opció corresponent a la gràfica de la seva derivada $f'(x)$:





3.5.41 En la imatge següent es mostra la gràfica d'una funció:
Quina de les següents opcions pot ser la gràfica de la seva derivada?





3.5.42 Determina la continuïtat i derivabilitat de la funció $f(t)=\begin{cases}3t^2+4 & 0\le t\le 2\\ -2t+20 & 2<t\le 6\end{cases}$

3.5.43 Determina la continuïtat i derivabilitat de la funció $B(x)=\begin{cases}5x+15 & 0\le x\le 3\\ -(x-3)^2+30 & 3<x\le 8\end{cases}$

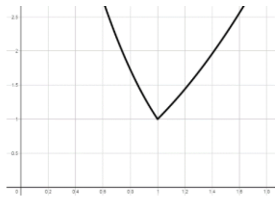
3.5.44 Donada la funció $f(x)=\begin{cases}0 & x\le -1\\ ax^3+bx & -1<x<2\\ 11x-16 & 2\le x\end{cases}$

a) Determina els valors d'a i b per als què la funció és contínua en tot x real.
b) Analitza la seva derivabilitat.

3.5.45 Determineu els valors d'a i b per als què la funció $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\le 1\\ -x^2+ax+b & x>1\end{cases}$
sigui contínua i derivable en tot x real.

3.6 Derivabilitat amb funcions definides a trossos i regla de la cadena.

3.6.1 Estudieu la continuïtat i derivabilitat de la funció



$$f(x) = \begin{cases} (2-x)^3 & si\ x \leq 1 \\ x^2 & si\ x > 1 \end{cases}$$

3.6.2 Estudieu la continuïtat i derivabilitat de la funció

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-2} & si\ x \geq 2 \\ x(x-2) & si\ x < 2 \end{cases}$$

3.6.3 Determineu el valor de k per al què sigui contínua la següent funció. És derivable?

$$f(x) = \begin{cases} 3x+k & si\ x \leq 3 \\ -4+10x-x^2 & si\ x > 3 \end{cases}$$

3.6.4 Determineu el valor de k per al què $f(x) = \begin{cases} k & si\ x < 0 \\ 1+xe^{-x} & si\ x \geq 0 \end{cases}$ sigui contínua. És derivable?

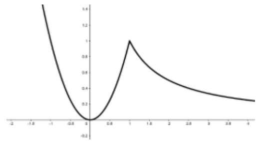
3.6.5 Determina els valors de b i c que la fan contínua i derivable $f(x) = \begin{cases} 3x^2+4x & x \leq 1 \\ 2x^3+bx+c & x > 1 \end{cases}$

3.6.6 Determina els valors de a i b que la fan contínua i derivable: $f(x) = \begin{cases} ax^3-2 & x \leq 3 \\ b(x-2)^2+10 & x > 3 \end{cases}$

3.6.7 Determina els valors de k i m que la fan contínua i derivable: $f(x) = \begin{cases} k\sqrt{x+1} & 0 \leq x \leq 3 \\ mx+2 & 3 < x \leq 5 \end{cases}$

3.6.8 Determina els valors de c i d per contínua i derivable: $f(x) = \begin{cases} e^{2x+2}+cx+3d & x < -1 \\ x^2+(2c+1)x-d & x \geq -1 \end{cases}$

3.6.9 Comprova que la següent funció és contínua però no derivable en x=1:



$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & x > 1 \end{cases}$$

3.6.10 Estudia la continuïtat i derivabilitat de la següent funció → segons els valors de a i b.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2+bx+3 & x < 4 \\ \dfrac{1}{x-5} & x \geq 4 \end{cases}$$

3.6.11 Estudia la continuïtat i derivabilitat de la següent funció: $f(x) = \begin{cases} x^2-8 & x < 3 \\ 1+5\,ln(x-2) & x \geq 3 \end{cases}$

Sol: Continua però no derivable

3.6.12 Valors d'a i b perquè sigui contínua i derivable: $f(x) = \begin{cases} x^2-ax+b+1 & x \leq 1 \\ a\,ln(x)+1 & x > 1 \end{cases}$

3.6.13 a) Determina els valors d'a per als què la funció és contínua.
b) Determina els valors d'a per als què la funció, a més a més, és derivable.

$$f(x) = \begin{cases} 3-ax^2 & x \leq 1 \\ \dfrac{2}{ax} & x > 1 \end{cases}$$

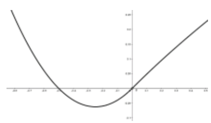
3.6.14 Valors d'***a*** per què la funció sigui derivable en x = 0: $f(x) = \begin{cases} e^{ax} & x \leq 0 \\ 2x+1 & x > 0 \end{cases}$

Sol: a=1

3.6.15 Comprova que sigui contínua i derivable en tot R: $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ ln(1+x^2) & x > 0 \end{cases}$

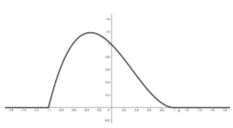
Sol: Continua i derivable

3.6.16 Comprova que la funció sigui contínua i derivable en tot R:



$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x+x^2 & x < 0 \\ \sqrt{x+1}-1 & x \geq 0 \end{cases}$$

3.6.17 Estudia la continuïtat i derivabilitat de la següent funció:



$$f(x) = \begin{cases} (x+1)(x-1)^2 & x \in [-1,1] \\ 0 & x \notin [-1,1] \end{cases}$$

3.6.19 Sigui $f(x)$ la funció definida per $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & x < 1 \\ x^2 + bx + 3 & x \geq 1 \end{cases}$
Determina els valors de a i b per als què la funció és contínua i derivable.

3.6.20 Sigui $f(x)$ la funció definida per $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2x-1} & x < 0 \\ x^2 - ax & x \geq 0 \end{cases}$ Determina el valor de a per al què la funció és contínua i derivable en $x = 0$. Hi ha algun altre punt de discontinuïtat? Raona la resposta.

3.6.21 Sigui $f(x)$ la funció definida per $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & x \leq 1 \\ 8\sqrt{3x+1} & x > 1 \end{cases}$
Determina els valors de a i b per als que la funció és contínua i derivable en tot IR.

3.6.22 Sigui $f(x)$ la funció definida per $f(x) = \begin{cases} -x^2 + ax + b & x \leq 1 \\ ln(x) & x > 1 \end{cases}$
Determina els valors de a i b per als que la funció és contínua i derivable en tot IR.

3.6.23 Sigui $f(x)$ la funció definida per $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & x \leq 4 \\ \sqrt{2x+1} & x > 4 \end{cases}$
Determina els valors de a i b per als que la funció és contínua i derivable en tot IR.

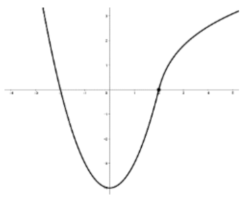
3.6.24 Determina a i b de forma que la funció sigui contínua: $f(x) = \begin{cases} x + 4 & x < 1 \\ ax^2 + bx + 2 & 1 \leq x < 3 \\ 6x + a - b & x > 3 \end{cases}$
Té aquesta funció algun punt de no derivabilitat?

3.6.25 Determina a i b de forma que la funció $f(x) = \begin{cases} ax + b & x \leq -1 \\ ax^3 + x + 2b & x > -1 \end{cases}$
Sigui contínua i derivable en tot R.

3.6.26 Determina a i b de forma que la funció $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-3x} & x \leq -5 \\ ax + b & x > -5 \end{cases}$
Sigui contínua i derivable en tot IR.

3.6.27 Determina a i b de forma que la funció $f(x) = \begin{cases} e^{2x+1} & x < -1/2 \\ ax + b & x \geq -1/2 \end{cases}$
Sigui contínua i derivable en tot R.

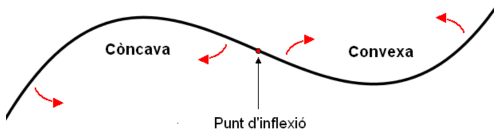
3.6.28 Determina a i b de forma que la funció $f(x) = \begin{cases} ln(x^2 - 3) & x > 2 \\ ax^2 + b & x \leq 2 \end{cases}$
Sigui contínua i derivable en tot R.



3.7 Curvatura.

Definició visual.

Una funció és **còncava** en $x = a$
si la gràfica de la funció està <u>doblegada cap avall</u>.
Una funció és **convexa** en $x = a$
si la gràfica de la funció està <u>doblegada cap amunt</u>.



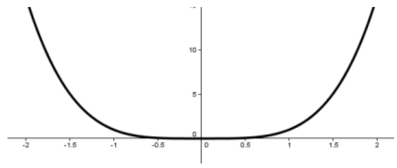
Definició formal.

Una funció és convexa en $x = a$ si segona derivada en aquest punt és positiva: $f''(a) > 0$
Una funció és còncava en $x = a$ si segona derivada en aquest punt és negativa: $f''(a) < 0$

Punt d'inflexió en $x = a$ si la funció canvia la seva curvatura, és a dir, passa de ser còncava a convexa, o viceversa.

Determinació dels punts d'inflexió: es compleix que $\boxed{f''(a) = 0}$. Per garantir que es tracta realment d'un punt d'inflexió, analitzarem el sentit de la concavitat en les proximitats del punt.

Atenció! Segona derivada igual a zero no implica <u>necessàriament</u> punt d'inflexió. Per exemple, $f(x) = x^4$ compleix $f''(x) = 12x^2$, i la seva segona derivada s'anul·la en $x = 0$, però no és un punt d'inflexió, aquesta funció és sempre convexa:



Criteri de la tercera derivada.

Una funció té un punt d'inflexió en $x = a$ si la segona derivada s'anul·la i la tercera derivada és diferent de zero en aquest punt. $f''(a) = 0 \ i \ f'''(a) \neq 0 \Rightarrow$ punt d'inflexió en $x = a$

Com determinem la curvatura d'una funció.

1. Calculem la seva segona derivada $f''(x)$ y resolem l'equació $f''(x) = 0$
3. Fem un estudi per intervals:
   Marquem els punts x trobats al punt anterior en una recta.
   Atenció! També hem d'afegir els punts de discontinuïtat de la funció!
   Agafem valors auxiliars a cada interval i els avaluem amb la segona derivada.
   - Si la segona derivada és positiva, la funció serà convexa a tot l'interval
   - Si la segona derivada és negativa, la funció serà còncava a tot l'interval
   - Els punts d'inflexió seran els punts on canvia la curvatura.
4. Calculem els valors Y dels punts d'inflexió per poder representar-los a la gràfica.

Criteri de la segona derivada per determinar màxims i mínims relatius.

Una funció és còncava al voltant d'un màxim relatiu i convexa al voltant d'un mínim relatiu,

Si $f'(p) = 0$ i $f''(p) > 0$ llavors la funció té un **mínim relatiu** en $x = p$.
Si $f'(p) = 0$ i $f''(p) < 0$ llavors la funció té un **màxim relatiu** en $x = p$.

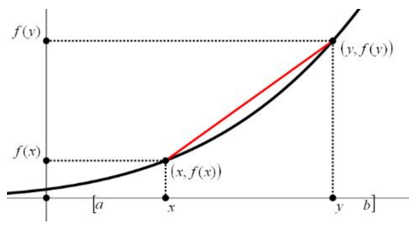
<u>Controvèrsia</u> entre què és còncava i què és convexa. No hi ha un criteri universal sobre la denominació "funció còncava" i "funció convexa

3.8 Fora de programa: Una definició precisa de concavitat i convexitat.

Definició. Funció convexa.

Convexa en $[a,b]$ quan la gràfica de $f(x)$ estigui <u>per sobre</u> de la recta que uneix $(x, f(x))$ i $(y, f(y))$:

Per a tota parella x, y, amb $a \le x < y \le b$, i per a tot valor $0 \le t \le 1$, es compleix: $f(x) + (1-t)f(y) \ge f(tx + (1-t)y)$

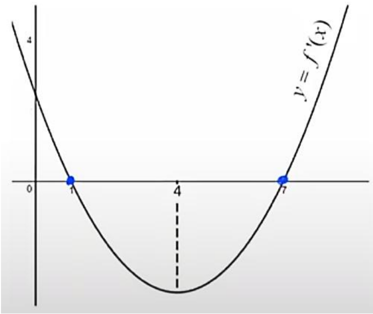


3.9 Estudi de la gràfica de la derivada d'una funció.

Exercicis:

3.9.1 Exercici del Youtube

Sigui *f(x)* una funció derivable, amb la següent la gràfica de la seva derivada $f'(x)$:

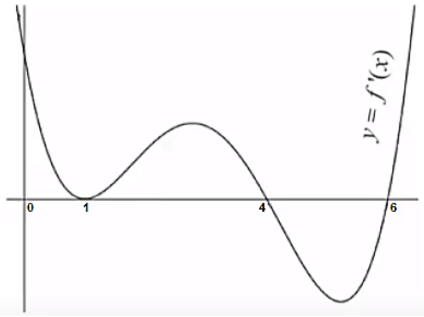


Determineu els intervals de creixement i de decreixement de f i els seus màxims i mínims relatius.

Solució: https://youtu.be/j6PuYVoG0l8

3.9.2 Exercici del Youtube

Sigui *f(x)* una funció derivable, amb la següent la gràfica de la seva derivada $f'(x)$:

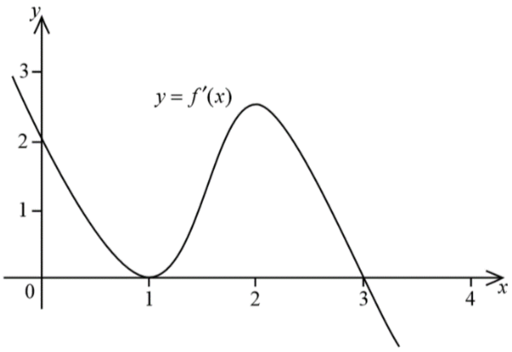


a) Determineu els intervals de creixement i de decreixement de f .

b) Justifiqueu raonadament si als punts $x=0$, $x=1$, $x=4$, $x=6$ trobem o no extrems relatius de $f(x)$. En cas afirmatiu, determineu si són màxims o mínims relatius.

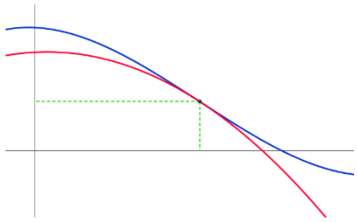
Solució: https://youtu.be/j6PuYVoG0l8

3.9.3 The diagram below shows a sketch of the gradient function ***f '(x)*** of the curve ***f(x).***
On the graph below, sketch the curve *y=f(x)* given that *f(0)=0* . Clearly indicate on the graph any maximum, minimum or inflexion points.



3.10 Recta tangent.

Funcions tangents en un punt.



Direm que les gràfiques de dues funcions $f(x)$ i $g(x)$ són tangent en un punt $x = p$ si:

a) $\boldsymbol{f(p) = g(p)}$ b) $\boldsymbol{f'(p) = g'(p)}$

és a dir, si passen pel mateix punt i a més a més tenen el mateix pendent en aquest punt.

Recta tangent a la gràfica d'una funció.

És un cas particular de l'anterior, quan $g(x)$ és una recta : $g(x) = ax + b$

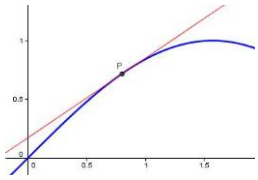
En aquest cas la funció queda totalment determinada per les condicions a) i b)

Per la condició b): $g'(x) = a \Rightarrow a = g'(p) = f'(p)$

Per la condició a): $g(p) = a \cdot p + b = f(p) \Rightarrow b = f(p) - a \cdot p$

Primera versió: Aplicant la fórmula Punt-Pendent de la recta, l'equació de la recta tangent és

$$y - f(p) = f'(p)(x - p)$$



Segona versió: L'equació de la recta tangent és $y = ax + b$, on:

(1) $a = f'(p)$ (Propietat fonamental de la recta tangent)

(2) $b = f(p) - a \cdot p$

Exemple resolt. Troba la recta *tangent* a la funció $f(x) = \dfrac{x^2}{3}$ en el punt x = 1

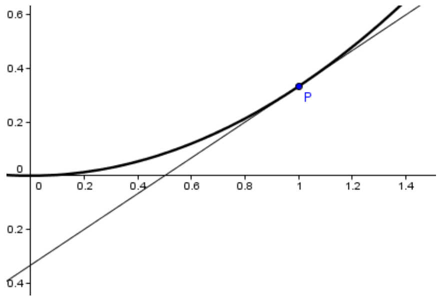
Solució:

$f(1) = \frac{1^2}{3} = \frac{1}{3}$

$a = f'(1) = \dfrac{2 \cdot 1}{3} = \dfrac{2}{3}$

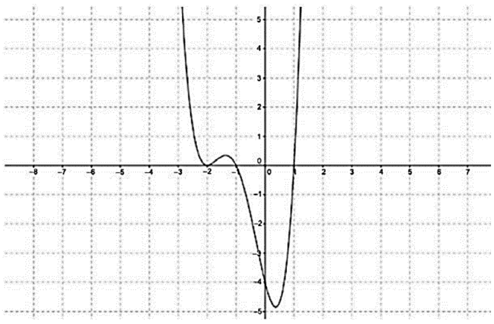
$b = f(1) - 1 \cdot f'(1) = \dfrac{1}{3} - 1 \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{-1}{3}$

Recta tangent: $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$



Exercicis recta tangent:

3.10.1 Sigui $f(x)$ una funció derivable la gràfica de la qual passa pel punt (0, 1). La gràfica de la seva derivada, $f'(x)$, és la que es mostra en la figura →



a) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x)$ en el punt de la gràfica d'abscissa $x = 0$.

b) Trobeu les abscisses dels punts singulars de la funció $f(x)$ i classifiqueu-los.

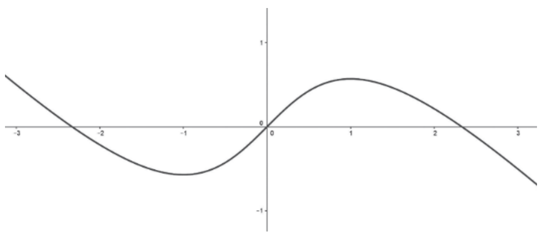
Sol: a) y=-4x +1 b) x=-2 x=-1 x = 1

PAU CAT TEC SET 2020 4.3 (Solució: PAUTEC pàg. 614)

3.10.2 A continuació es mostra la gràfica d'una funció f que presenta un mínim relatiu en el punt d'abscissa x = −1 i un màxim relatiu en el punt d'abscissa x = 1.

a) Sabent que f '(0) = 1, determineu l'equació de la recta tangent a f que passa per l'origen de coordenades.

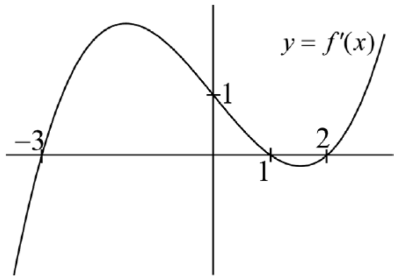
b) Feu un esbós de la gràfica de la funció f' amb les dades de què disposeu.



PAU CAT CCSS JUNY 2018 5.6

3.10.3 Sabem que una funció f(x) està definida per a tots els nombres reals i que és derivable dues vegades. Sabem també que té un punt d'inflexió en el punt d'abscissa x = 2, que l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció f(x) en aquest punt és y=–124x+249 i que $f(-3) = -4$. a) Calculeu f "(2), f '(2) i f (2). ~~b) Calculeu~~ $\cancel{\int_{-3}^{2} f'(x)dx}$. PAU CAT TEC JUNY 2018 5.4

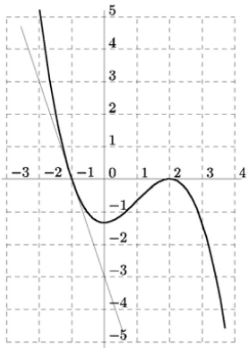
3.10.4 La funció f(x) és derivable i passa per l'origen de coordenades. La gràfica de la funció derivada és la que veieu aquí dibuixada, essent *f '(x)* creixent als intervals (–∞, –3] i [2, + ∞).



a) Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció f(x) en el punt d'abscissa x = 0.
b) Indiqueu les abscisses dels extrems relatius de la funció f(x) i classifiqueu aquests extrems.

PAU CAT TEC JUNY 2013 4.6

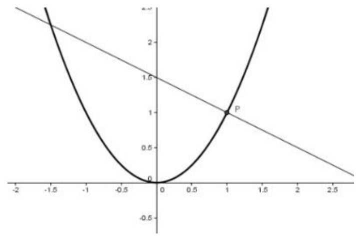
3.10.5 La corba *y=f(x)* de la figura té per domini el conjunt de tots els nombres reals.
a) Determineu els punts on la funció val 0. Determineu els valors de x pels quals la funció és positiva.
b) Digueu en quins punts s'anul·la la derivada i en quins punts $f'(x) < 0$.
c) Trobeu l'equació de la recta tangent en el punt d'abscissa x=2.
d) Determineu la recta tangent en el punt d'abscissa x= –1.
e) Determineu a sabent que $f(x) = a(x+1)(x-2)^2$.

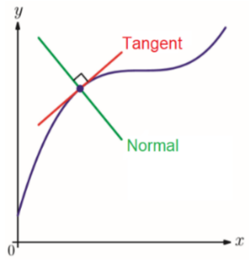


PAU CAT CCSS SET 2007 3.5

3.11 Recta normal.

De forma similar a com vam definir la recta tangent, també podem definir la recta normal:
Donada una funció f(x) i un punt *P=(p, f(p))* de la seva gràfica, existeix una única recta *y=ax+b* que compleix alhora les dues propietats següents:
a) És perpendicular a la gràfica de la funció f en x = p b) Passa per P.





Determinació de la recta normal:

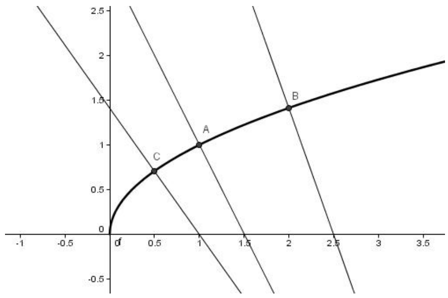
- És perpendicular a la gràfica de la funció en $P(p, f(p))$, per tant, $a = \frac{-1}{f'(p)}$
- Passa pel punt P, per tant $f(p) = ap + b$, i d'aquí aïllem b.

Exercici resolt.

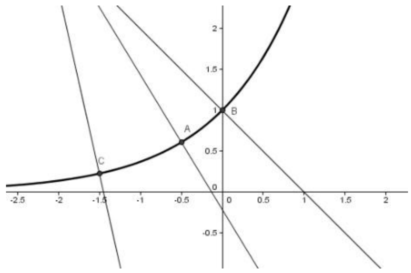
Trobar la recta tangent a la funció $\boldsymbol{f(x) = x^2}$ en el punt x=1
Solució: Tenim (fent p=1)
1º: $f(x) = x^2 \Rightarrow f(1) = 1$ 2º: $f'(x) = 2x \Rightarrow f'(1) = 2 \Rightarrow a = \frac{-1}{f'(1)} = \frac{-1}{2}$
3º: $b = f(1) + \frac{1}{f'(1)} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ → La recta tangent és doncs $y = \frac{-1}{2}x + \frac{3}{2}$

Exercicis recta normal:

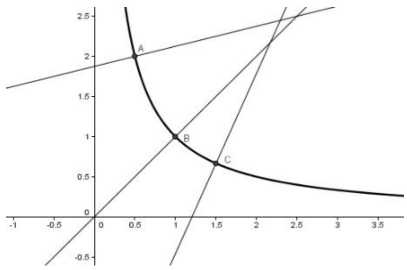
3.11.1 Determina les rectes normals a la funció $\boldsymbol{f(x)=\sqrt{x}}$ en els punts A d'abscissa x=1, B d'abscissa x=2 i C d'abscissa x=0.5



3.11.2 Determina les rectes normals a la funció $\boldsymbol{f(x)=e^{x}}$ en els punts A d'abscissa x=-0.5 , B d'abscissa x=0 i C d'abscissa x=-1.5



3.11.3 Determina les rectes normals a la funció $\boldsymbol{f(x)=\frac{1}{x}}$ en els punts A d'abscissa x=-0.5, B d'abscissa x=1 i C d'abscissa x=1.5



3.12 Derivació de les operacions amb funcions.

Taula de derivades de les funcions fonamentals.

1.	$f(x)=c$	$f'(x)=0$
2.	$f(x)=x$	$f'(x)=1$
3.	$f(x)=x^n$	$f'(x)=n\cdot x^{n-1}$
4.	$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
5.	$f(x)=a^x,\ a>0$	$f'(x)=a^x\ln(a)$
6.	$f(x)=e^x$	$f'(x)=e^x$
7.	$f(x)=\log_a(x)$	$f'(x)=\dfrac{1}{x}\log_a e=\left(\dfrac{1}{\ln(a)}\right)\dfrac{1}{x}$
8.	$f(x)=\ln(x)$	$f'(x)=\dfrac{1}{x}$
9.	$f(x)=\sin(x)$	$f'(x)=\cos(x)$
10.	$f(x)=\cos(x)$	$f'(x)=-\sin(x)$
11.	$f(x)=\tan(x)$	$f'(x)=1+\tan^2(x)$
12.	$f(x)=\arcsin(x)$	$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13.	$f(x)=\arccos(x)$	$f'(x)=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
14.	$f(x)=\arctan(x)$	$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

Àlgebra de derivades.

Si $f(x)$ i $g(x)$ són derivables en x, llavors també ho és també la suma, resta, producte i divisió (si el denominador no s'anul·la) de ambdues funcions, i es verifica:

- suma: $(f+g)(x)=f'(x)+g'(x)$
- resta: $(f-g)(x)=f'(x)-g'(x)$
- producte: $(f\cdot g)(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
- divisió: $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}\quad si\ g(x)\neq 0$
- constant: $(kf)'(x)=k'f(x)+kf'(x)=0f(x)+kf'(x)=kf'(x)$

Regla de la cadena. Si la funció composta $(f\circ g)(x)=f(g(x))$ és derivable en $x=a$ es compleix $(f\circ g)'(a)=f'(g(a))g'(a)$

En general la derivada de la funció composta és: $\boldsymbol{(f\circ g)'(x)=f'(g(x))g'(x)}$

Derivada de la funció inversa. Si es compleix $f'(x)\neq 0$ per a tot $x\in A$, llavors f^{-1} és derivable per a tot $y\in B$. A més a més, anomenant $y=f(x)$, es verifica: $(f^{-1})'\cdot\ (y)=\frac{1}{f'(x)}$

Exercici resolt. Determina la derivada de la funció $f(x)=\frac{2x^2-1}{x\sqrt{1+x^2}}$

Solució: Derivem el denominador: $x\sqrt{1+x^2}\ \rightarrow\ 1\cdot\sqrt{1+x^2}+x\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\sqrt{1+x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$

I ara derivem la funció completa: $\frac{2x^2-1}{x\sqrt{1+x^2}}\rightarrow\frac{4x\cdot x\sqrt{1+x^2}-(2x^2-1)\frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{\left(x\sqrt{1+x^2}\right)^2}=\frac{\frac{4x^2+1}{\sqrt{1+x^2}}}{x^2(1+x^2)}=\frac{4x^2+1}{x^2(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}=\frac{4x^2+1}{x^2(1+x^2)^{3/2}}$

3.12.1 Exercicis de derivació.

1. $f(x)=x^4+3x^2-6$
2. $f(x)=6x^3-x^2$
3. $f(x)=\dfrac{x^3-x^2+1}{5}$
4. $f(x)=6x^{\frac{7}{2}}+4x^{\frac{5}{2}}+2x$
5. $f(x)=\sqrt{3x}+\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{x}$
6. $f(x)=\dfrac{(x+1)^3}{x^{\frac{3}{2}}}$
7. $f(x)=\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt{x}+5$
8. $f(x)=(1+4x^3)(1+2x^2)$
9. $f(x)=x(2x-1)(3x+2)$
10. $f(x)=(2x-1)(x^2-6x+3)$
11. $f(t)=\dfrac{t^3}{1+t^2}$
12. $f(s)=\dfrac{(s+4)^2}{s+3}$
13. $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2-x-2}$
14. $f(x)=(2x^2-3)^2$
15. $f(x)=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$
16. $f(x)=\dfrac{2x^2-1}{x\sqrt{1+x^2}}$
17. $f(x)=\sqrt[3]{x^2+x+1}$
18. $f(x)=(1+\sqrt[3]{x})^3$
19. $f(x)=\sin^2 x$
20. $f(x)=2\sin x+\cos 3x$
21. $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$
22. $f(x)=\sin 2x\cos 3x$
23. $f(t)=t\sin t+\cos t$
24. $f(t)=\sin^3 t\cos t$
25. $f(x)=\ln\cos x$
26. $f(x)=\ln\tan x$
27. $f(x)=\ln\sin^2 x$
28. $f(x)=\dfrac{\tan x-1}{\sec x}$
29. $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$
30. $f(x)=\sin(\ln x)$
31. $f(x)=\sin(\cos x)$
32. $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$
33. $f(x)=\log_3(x^2-\sin x)$
34. $f(x)=\ln\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$
35. $f(x)=\ln(x^2+x)$
36. $f(x)=\ln(x^3-2x+5)$
37. $f(x)=x\ln x$
38. $f(x)=\ln^3 x$
39. $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$
40. $f(x)=\ln(\ln x)$
41. $f(x)=e^{(4x+5)}$
42. $f(x)=a^{x^2}$
43. $f(x)=7^{(x^2+2x)}$
44. $f(x)=e^x(1-x^2)$
45. $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$
46. $f(x)=e^{\sin x}$
47. $f(x)=e^{\cos x}\sin x$
48. $f(x)=e^x\ln(\sin x)$
49. $f(x)=x^x$
50. $f(x)=e^{x^x}$

Font: http://www.uv.es/~montes/biologia/matcero.pdf

* Davant d'un polinomi, la temptació de desfactoritzar-lo és forta, però no és el bon camí. Ben al contrari, hem d'intentar sempre factoritzar els polinomis, principalment traient factor comú

Exercici resolt 1: *deriva* $f(x)=(1-x)^4(x+3)^5$

Solució: Apliquem la fórmula de la derivada del producte i la regla de la cadena:

$$\left.\begin{array}{l}(1-x)^4 \to 4(1-x)^3(-1)=-4(1-x)^3\\(x+3)^5 \to 5(x+3)^4(1)=5(x+3)^4\end{array}\right\} \to f'(x)=-4(1-x)^3(x+3)^5+(1-x)^4 5(x+3)^4$$

traiem factor comú:
$$\begin{aligned}f'(x)&=(1-x)^3(x+3)^4\left[-4(x+3)+5(1-x)\right]=\\&=(1-x)^3(x+3)^2\left(-4x-12+5-5x\right)=(1-x)^3(x+3)^2\left(-9x-7\right)\end{aligned}$$

Només després de treure factor comú podem resoldre l'equació $f'(x)=0$:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow (1-x)^3(x+3)^2\left(-9x-7\right)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}(1-x)^3=0 \Leftrightarrow x=1\\(x+3)^2=0 \Leftrightarrow x=-3\\-9x-7=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-7}{9}\end{cases}$$

Les solucions són $x=1$, $x=-3$ i $x=\dfrac{-7}{9}$

Exercici resolt 2. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ troba *f''(x)*

Solució: Apliquem la fórmula de la derivada de la divisió de funcions:

$$\left.\begin{array}{l}x^2+1 \to 2x\\x^2-1 \to 2x\end{array}\right\} \to f'(x)=\frac{2x(x^2-1)-(x^2+1)2x}{(x^2-1)^2}$$

Ara no caiem en la temptació de *desfactoritzar* el numerador, i en comptes de fer les multiplicacions traiem factor comú:

$$f'(x)=\frac{2x(x^2-1)-(x^2+1)2x}{(x^2-1)^2}=\frac{2x\left(x^2-1-x^2-1\right)}{(x^2-1)^2}=\frac{2x(-2)}{(x^2-1)^2}=\frac{-4x}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{-4x}{(x^2-1)^2}=0 \Leftrightarrow -4x=0 \Leftrightarrow x=0$$

Per calcular la segona derivada, en comptes de *desfactoritzar* el denominador apliquem la Regla de la Cadena:

$$\left.\begin{array}{l}-4x \to -4\\\left(x^2-1\right)^2 \to 2\left(x^2-1\right)2x=4x\left(x^2-1\right)\end{array}\right\} \to f''(x)=\frac{-4(x^2-1)^2-(-4x)4x(x^2-1)}{(x^2-1)^4}$$

I ara, en comptes de treure parèntesis al numerador, en traiem factor comú:

$-4(x^2-1)^2-(-4x)4x(x^2-1)=4(x^2-1)[-(x^2-1)-(-4x^2)]=$
$4(x^2-1)[-x^2+1+4x^2]=4(x^2-1)(3x^2+1)$

Perquè d'aquesta manera podem simplificar numerador i denominador *tatxant* el factor repetit:

$$f''(x)=\frac{4(x^2-1)(3x^2+1)}{(x^2-1)^4}=\frac{4(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}$$

I, ara sí, podem resoldre còmodament l'equació $f''(x)=0$:

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{4(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}=0 \Leftrightarrow 4(3x^2+1)=0 \Leftrightarrow 3x^2+1=0$$, que no té solució.

3.13 La regla de la cadena.

3.13.1 Exercici del Youtube: Determina la derivada de les següents funcions:

a) $f(x)=e^{3x}$ b) $f(x)=\ln(5x)$ c) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ d) $f(x)=x^3(2x-5)$

Solució: https://youtu.be/U_qp0isxQYU

3.13.2 Exercici Youtube. Determina la derivada de les funcions

a) $f(x)=2x^3\ln x$ b) $f(x)=\sqrt{x}(x^2+1)$ Solució: https://youtu.be/1lcHncmcPkI

3.13.3 Exercici Youtube. Determina les derivades (i simplifica els resultats) de

a) $f(x)=(x^2-x)e^x$ b) $f(x)=\dfrac{x^2-x}{e^x}$ Solució: https://youtu.be/Zh0vhnv8Row

3.13.4 Exercici Youtube. Determina les derivades de les següents funcions:

a) $f(x)=(2x^3-3x+1)^3$ b) $f(x)=\sqrt{x^2-2x}$ c) $f(x)=\left[(2x^3)^2+2\right]^4$

Solució: https://youtu.be/c6d9zthw1s0

3.13.5 Exercici Youtube. Determina la derivada de la següent funció: $f(x)=\ln\left(\dfrac{x^3}{x^2-4}\right)$

Solució: https://youtu.be/tjN3ZGU5N3Y

3.13.6 Exercici Youtube Derivació de funcions exponencials

a) $f(x)=e^x$ b) $f(x)=e^{5x}$ c) $f(x)=e^{3x^2+8}$

d) $f(x)=3x^2e^{x^3}$ e) $f(x)=8e^{2x^5+3x^2+1}$

Solució: https://youtu.be/Y1Cid21Yq7M

3.13.7 Exercici Youtube Deriva les següents funcions:

a) $f(x)=(3x^2-5x)^3$ b) $f(x)=(5x^4-6x^3+x)^5$

c) $f(x)=(2x^5-3x+4)^4$ d) $f(x)=(x+3)^2$

Solució: https://youtu.be/m_5-WS9Nd68 (Matemáticas profe Alex)

3.13.8 Exercici Youtube. Deriva les següents funcions:

a) $f(x)=(3x+1)^7$ b) $f(x)=(x^2+5x-6)^9$

Solució: https://youtu.be/H-ybCx8gt-8 (NancyPi)

3.13.9 Exercici Youtube Derivació de funcions logarítmiques.

a) $f(x)=\ln(3x)$ b) $f(x)=\ln(5x^2)$ c) $f(x)=3\ln(2x^3)$

d) $f(x)=2\ln(x^3)$ e) $f(x)=\ln(3x^2-2x)$

Solució: https://youtu.be/wl1joYQQ3CI (Matemáticas profe Alex)

3.13.10 Exercici Youtube Derivació de funcions exponencials.

a) $f(x)=e^{3x}$ b) $f(x)=e^{x^3}$ c) $f(x)=e^{2x^2}$

d) $f(x)=e^{x^2+2x}$

Solució: https://youtu.be/bEmCMdwXy5o (Matemáticas profe Alex)

3.13.11 Exercici Youtube Derivació d'un producte.

a) $f(x)=5x\cdot ln(x)$ b) $f(x)=e^x\cdot ln(x)$ c) $f(x)=3x^2\cdot e^x$

Solució: https://youtu.be/0dKlkb3GhuU (Matemáticas profe Alex)

Solucions:

3.1.1 4

3.1.2 -3

3.1.3 TVM [0 , 2]= 0 ,TVM[0 , 4]=15.97

3.1.4 -16

3.1.5

h	$TVM=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$	$\alpha=\arctan(TMV)$
1	$TVM=\frac{f(1+1)-f(1)}{1}=\frac{2^2-1^2}{1}=\frac{3}{1}=3$	$\alpha=\arctan(3)\cong 71.6^{\circ}$
0.5	$TVM=\frac{f(1+0.5)-f(1)}{0.5}=\frac{1.5^2-1^2}{0.5}=2.5$	$\alpha=\arctan(3)\cong 68.2^{\circ}$
0.1	$TVM=\frac{f(1+0.1)-f(1)}{0.1}=\frac{1.1^2-1^2}{0.1}=2.1$	$\alpha=\arctan(2.1)\cong 64.5^{\circ}$
0.01	$TVM=\frac{f(1+0.01)-f(1)}{0.01}=\frac{1.01^2-1^2}{0.01}=2.01$	$\alpha=\arctan(2.01)\cong 63.5^{\circ}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(h)}{h}=2\to\alpha=\arctan(2)\cong 63.43^{\circ}$$

3.1.6

h	$TVM=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$	$\alpha=\arctan(TMV)$
1	$TVM=\frac{f(2+1)-f(2)}{1}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1}=0.32$	$\alpha=\arctan(0.32)\cong 17.1^{\circ}$
0.5	$TVM=\frac{f(2+0.5)-f(2)}{0.5}=\frac{\sqrt{2.5}-\sqrt{2}}{0.5}=0.33$	$\alpha=\arctan(0.33)\cong 18.3^{\circ}$
0.1	$TVM=\frac{f(2+0.1)-f(2)}{0.1}=\frac{\sqrt{2.1}-\sqrt{2}}{0.1}=0.34$	$\alpha=\arctan(0.34)\cong 19.3^{\circ}$
0.01	$TVM=\frac{f(2+0.01)-f(2)}{0.01}=\frac{\sqrt{2.01}-\sqrt{2}}{0.01}=0.35$	$\alpha=\arctan(0.35)\cong 19.3^{\circ}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=0.354\to\alpha=\arctan(0.354)\cong 19.49^{\circ}$$

3.1.7

h	$TVM=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$	$\alpha=\arctan(TMV)$
1	$TVM=\frac{\ln 1.7-\ln 0.7}{1}=0.89$	$\alpha=\arctan(0.87)\cong 41.67^{\circ}$
0.5	$TVM=\frac{\ln 1.2-\ln 0.7}{0.5}=1.08$	$\alpha=\arctan(1.08)\cong 47.20^{\circ}$
0.1	$TVM=\frac{\ln 0.8-\ln 0.7}{0.1}=1.34$	$\alpha=\arctan(1.34)\cong 53.27^{\circ}$
0.01	$TVM=\frac{\ln 0.71-\ln 0.7}{0.01}=1.42$	$\alpha=\arctan(1.42)\cong 54.85^{\circ}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0.7+h)-f(0.7)}{h}=1.429\to\alpha=\arctan(1.429)\cong 55.02^{\circ}$$

3.4.1 La funció compleix les condicions de l'enunciat i tenim f(4)=16 I aquest valor és el mínim possible. En efecte, per qualsevol funció derivable, pel Teorema del valor mig, existirà un punt c (1,4) tal que f(4) – f(1) = f’(c)·(4-1) → f(4) ≤ 16

3.5.11 Continuïtat en x = 2:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=2^2-a\cdot 2-1=3-2a\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=-2^2+b\cdot 2-a=-4+2b-a\\ f(2)=-2^2+b\cdot 2-a=-4+2b-a\end{array}\right\}\Rightarrow 3-2a=-4+2b-a\Leftrightarrow 7=2b+a$$

Derivabilitat en x = 2:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f'(x)=2\cdot 2-a=4-a\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=-2\cdot 2+b=-4+b\end{array}\right\}\Rightarrow 4-a=-4+b\Rightarrow 8=a+b$$

Resolem el sistema:

$$\left.\begin{array}{l}7=2b+a\\ 8=a+b\end{array}\right\}\Rightarrow 7-8=b\Rightarrow b=-1\Rightarrow a=8-b=8-(-1)=9$$

La solució és a= 9 ; b=-1

3.5.12.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=e^0=1\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0^2+0+1=1\\ f(0)=e^0=1\end{array}\right|\ \text{contínua}\qquad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=e^0=1\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=2\cdot 0+1=1\end{array}\right\rangle\ \text{derivable}$$

3.5.13 a) $a=1$ b) $2\ln 2-5/4$

3.5.16 a) $f'(x)>0$ en $[-6,-2)\cup(1,5]$

b) En x=-2 hi ha un màxim relatiu. En x=1 hi ha un mínim relatiu.
En x=-6 hi ha un mínim absolut i en x=4 hi ha un màxim absolut.

c) La funció no és derivable en x=1

3.6.1 És contínua, però no és derivable en x=1.

3.6.2 És contínua, però no és derivable en $x=2$ b) $x-3y=0$

3.6.3 És contínua per a $k=8$, però no és derivable.

3.6.4 És contínua per a $k=1$, però no és derivable.

3.10.1 y = x y = -3x – 8 y = 5x

3.10.4

a) $y=3x-1$	b) $y=6x-9$	c) $y=12x-16$	d) $y=x/2$
e) $y=8x-13$	f) $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$	g) $y=9x-25$	h) $y=4x-6$
i) $y=12x+24$	j) $y=5$	k) $y=-5x+7$	

3.11.1 y = -2x + 3, y = -2.83x + 7.07 y = -1.414x + 1.414

3.11.2 y = -1.65x - 0.22 y = -x + 1 y = - 4.48x - 6.50

3.11.3 y = 0.25x+1.875 y = x y = 2.25x-2.71

4.1.1 a) α = -70.346 b) α = 63.435° c) α = 69.882° d) α = -36.87°

4.1.2 a) x = -2.3 b) x = 1.7 c) x = 2.103 d) x = 2.198

4.1.3 a) (1.25 , 1.125) b) (0.5 , 3.75) c) (-1 , 4), (1.667 , -5.481)
d) (-1.667 , -3.481) , (1 , 6)

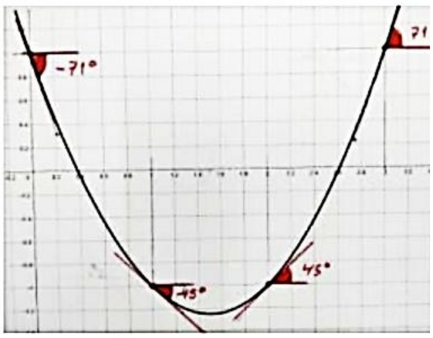
4.1.5 b)

x	$f(x)$	$f'(x)$	Angle en graus
-2	1	6	80.54°
-1	3	-1	-45°
0	1	-2	-63.43°
1	1	3	71.57°

c) $x=-1.39$, $x=0.72$.
d) $x=-1.21$, $x=0.55$

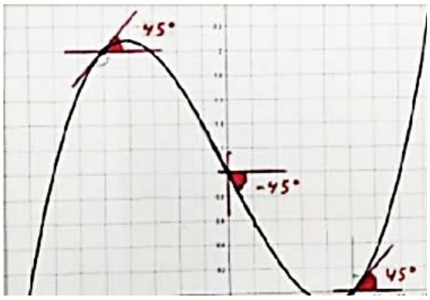
4.1.6 a) $f(x)=x^2-3x+1 \to f'(x)=2x-3$

x	$f'(x)$	Angle en x
0	$f'(0)=2\cdot 0-3=-3$	$\arctan(-3)=-71.57°$
1	$f'(1)=2\cdot 1-3=-1$	$\arctan(-1)=-45°$
2	$f'(2)=2\cdot 2-3=1$	$\arctan(1)=45°$
3	$f'(3)=2\cdot 3-3=3$	$\arctan(3)=71.57°$



b) $f(x)=x^3-2x+1 \to f'(x)=3x^2-2$

x	$f'(x)$	Angle en x
-1	$f'(-1)=3(-1)^2-2=1$	$\arctan(1)=45°$
0	$f'(0)=3\cdot 0^2-2=-1$	$\arctan(-1)=-45°$
1	$f'(1)=3\cdot 1^2-2=1$	$\arctan(1)=45°$



4 Derivació amb funcions polinòmiques.

4.1 Primera derivada de funcions polinòmiques.

$$f(x) = a_n x^n \rightarrow f'(x) = n a_n x^{n-1}$$
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \rightarrow f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_1$$

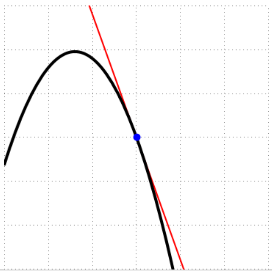
Demostració que $f(x) = x^2 \rightarrow f'(x) = 2x$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x$$

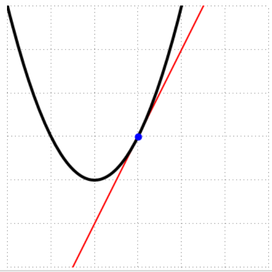
Exercicis:

4.1.1 Determina l'angle de la funció per al valor de x indicat:

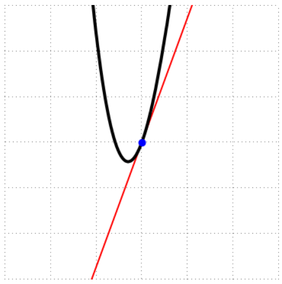
a) $f(x) = -x^2 + x - 4$; x=1,9



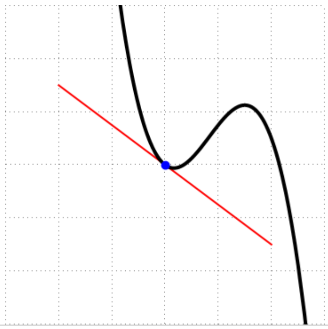
b) $f(x) = x^2 - 5x - 4$; x=3,5



c) $f(x) = -x^3 - 4x^2 + 3x + 3$; x = -2,7



d) $f(x) = -x^3 - 2x^2 - 3$; x=-1,5

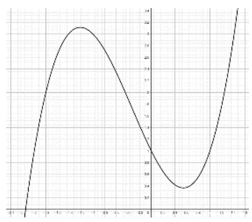


4.1.2 Exercici del Youtube: Determina les següents derivades: Solució: https://youtu.be/uZYBrgHLU-U

a) $f(x) = 2$ b) $f(x) = x$ c) $f(x) = 2x$ d) $f(x) = 2x^3$ e) $f(x) = 2x^3 - 3 + 1$

4.1.3 Del punt a l'angle. Donada la funció $f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 1$, completa la següent taula:

x	$f(x)$	$f'(x)$	Angle en graus
-2			
-1			
0			
1			



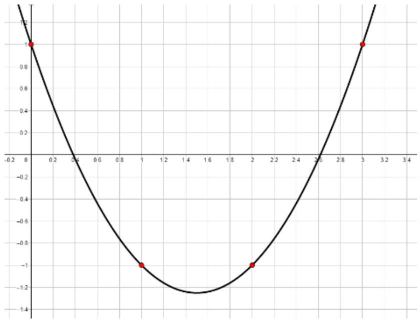
a) En primer lloc, de forma aproximada, observant detingudament la seva gràfica.
b) Després, de forma exacta, avaluant la seva expressió algèbrica, i derivant. Comprova la coherència dels valors obtinguts.
c) Determina els punts de la gràfica amb un angle de 45º. En primer lloc, de forma aproximada, estudiant la seva gràfica, i després de forma exacta, resolent una equació amb la seva derivada.
d) Determina els punts de la gràfica amb un angle de 0º. En primer lloc, de forma aproximada, estudiant la seva gràfica, i després de forma exacta, resolent una equació amb la seva derivada.

x	$f'(x)$	Angle en x

4.1.4 a) Completa la següent taula , amb $f(x)=x^2-3x+1$

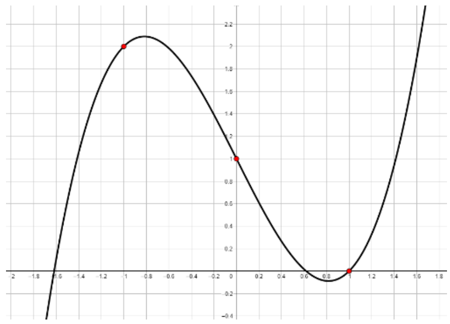
Comprova que els valors obtinguts es corresponen amb la realitat, mesurant amb el transportador d'angles els corresponents angles en els punts indicats:

0		
1		
2		
3		



b) Completa la següent taula , amb $f(x)=x^3-2x+1$

Comprova que els valors obtinguts es corresponen amb la realitat, mesurant amb el transportador d'angles els corresponents angles en els punts indicats:

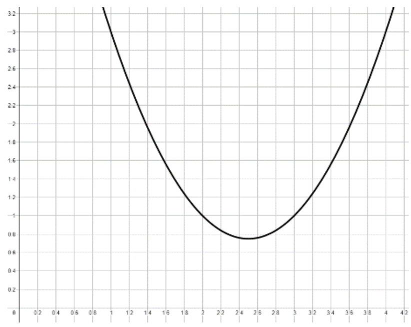


x	$f'(x)$	Angle en x
-1		
0		
1		

4.1.5 De l'angle al punt.

a) Completa la següent taula , amb $f(x)=x^2-5x+7$

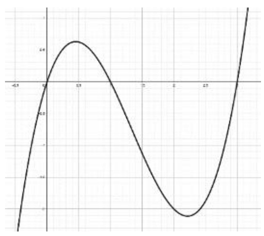
Comprova que els valors obtinguts es corresponen amb la realitat, mesurant amb el transportador d'angles els corresponents angles en els punts indicats:



Angle	Pendent	Equació	Solució x
70º			
45º			
0º			
-70º			

b) Completa la següent taula , amb $f(x)=x^3-4x^2+3x$

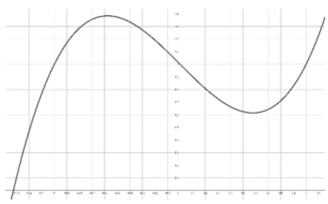
Comprova que els valors obtinguts es corresponen amb la realitat, mesurant amb el transportador d'angles els corresponents angles en els punts indicats:



Angle	Pendent	Equació	Solucions x
0º			
80º			
-45º			

c) Completa la següent taula , amb $f(x)=x^3-x+1$

Comprova que els valors obtinguts es corresponen amb la realitat, mesurant amb el transportador d'angles els corresponents angles en els punts que has calculat anteriorment:



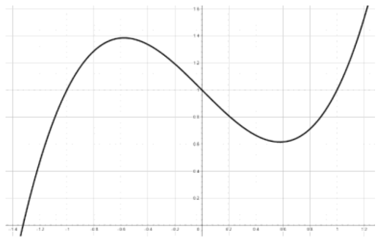
Graus	Equació	Punt x
80º		
30º		
0º		
-45º		

4.1.6 Donada la funció $f(x)=x^3-x+1$

a) Calcula l'angle que determina la seva gràfica als punts $x=0.4$ i $x=-0.2$

b) Determina els punts de la seva gràfica en els que determina un angle de 70º.

c) Comprova amb el transportador d'angles la coherència dels resultats obtinguts als apartats anteriors.



4.1.7 Determina els punts de la gràfica de la funció $f(x)=x^3-7x+1$ amb pendent igual a 5.

4.1.8 Exercici del Youtube Deriva els següents polinomis:

a) $f(x)=8x^5+5x^4+7x^2+5$ b) $f(x)=7x^8+4x^6+3x^3+4x+3$

4.2 Estudi de funcions polinòmiques mitjançant derivació.

4.2.1 Exercici resolt. Estudi de la funció $\boldsymbol{f(x)=x^3-3x+2}$

Solució:

a) Domini de la funció: Tot IR, perquè és polinòmica.

b) Punt de tall amb l'eix Y: $f(0)=2$

c) Punts de tall amb l'eix X: $f(x)=0 \Leftrightarrow x^3-3x+2=0 \Leftrightarrow x=-2, x=1$ (Per Ruffini)

d) Creixement, decreixement i extrems relatius: $f'(x)=3x^2-3$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1, x=1$

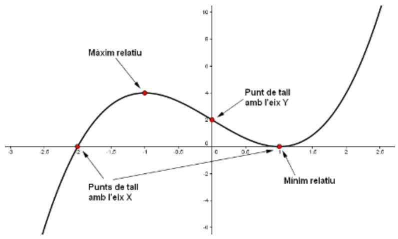
Fem un estudi per intervals:

$(-\infty,-1)$	$x=-1$	$(-1,1)$	$x=1$	$(1,+\infty)$
Agafem, per exemple, $x=-2$ $f'(-2)=9>0$		Agafem, per exemple, $x=0$ $f'(0)=-3<0$		Agafem, per exemple, $x=2$ $f'(2)=9>0$
Creixent		Decreixent		Creixent

De la taula anterior deduïm que la funció té un màxim relatiu en $x=-1$, $y=f(-1)=4$

i un mínim relatiu en $(1,0)$, $y=f(1)=0$

e) Gràfica →



4.2.2 Exercici resolt. Estudi i representació de la funció $\boldsymbol{f(x)=3x^5-5x^3}$

Solució: a) $Dom(f)=\Re$, una funció polinòmica no dona problemes de domini.

b) Signe i zeros: $f(x)=3x^5-5x^3=x^3(3x^2-5)=0 \Leftrightarrow x=0, x=\sqrt{\frac{5}{3}}, x=-\sqrt{\frac{5}{3}}$

c) Creixement i decreixement: $f'(x)=15x^4-15x^2 \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0, x=1, x=-1$

$(-\infty,-1) \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow$ f creixent $(-1,0) \Rightarrow f'(x)<0 \Rightarrow$ f decreixent

$(0,1) \Rightarrow f'(x)<0 \Rightarrow$ f decreixent $(1,\infty) \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow$ f creixent

La funció té un mínim en (1,-2) i un màxim en (-1,2).

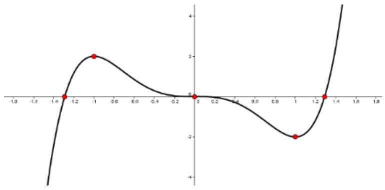
d) Concavitat-convexitat: $f''(x)=60x^3-30x \Rightarrow f''(x)=0 \Leftrightarrow x=0, x=\frac{1}{\sqrt{2}}, x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow f''(x)<0 \Rightarrow$ f còncava $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right) \Rightarrow f''(x)>0 \Rightarrow$ f convexa

$\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow f''(x)>0 \Rightarrow$ f convexa $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty\right) \Rightarrow f''(x)<0 \Rightarrow$ f còncava

La funció té punts d'inflexió a $(0,0)$, $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{7}{4\sqrt{2}}\right)$ i $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-7}{4\sqrt{2}}\right)$

e) Gràfica →



4.2.3 Estudi de les següents funcions (Punts de tall amb els eixos, monotonia, extrems relatius, curvatura i punts d'inflexió):

a) $f(x)=8x^3-84x^2+240x$ b) $f(x)=-x^4+8x^2-7$

c) $f(x)=x^3-4x$ d) $f(x)=x^4+8x^3+22x^2+24x+9$

e) $f(x)=3x-x^3$ f) $f(x)=4x^2-x^4$

g) $f(x)=x^4-2x^3$ h) $f(x)=x^6-x^3$

4.2.4 Exercici del Youtube Estudi del creixement, decreixement, màxims i minims de la funció $f(x)=x^4-2x^2+3$ Solució: https://youtu.be/YHE81T4b7KU (MateFacil)

4.2.5 Exercici del Youtube Estudi complet de la funció $f(x)=x^3-6x^2-15x+40$ Solució: https://youtu.be/Q73XxigqTP8

4.2.6 Exercici del Youtube (en anglès) Determina els màxims i mínims de la funció $f(x)=2x^3-15x^2+36x$ en l'interval $[1,5]$ Solució: https://youtu.be/Mx39JbbzEAo?t=3940 (Professor Leonard)

4.2.7 Exercici del Youtube Determina la curvatura i els punts d'inflexió de la funció $f(x)=x^4-4x^3+12$ https://youtu.be/29GbRaQxtzY?t=481 (Professor Leonard)

4.2.8 Busqueu els extrems relatius i els punts de tall amb els eixos, i feu una representació aproximada de la corba d'equació $y=x^4-x^3$. ~~A continuació, calculeu l'àrea del recinte tancat per aquesta corba i l'eix d'abscisses.~~ PAU CAT TEC JUNY 2007 1.3

4.2.9 Trobeu els màxims i mínims relatius de la funció $f(x)=6x^5-15x^4+10x^3$. PAU CAT TEC JUNY 2005 4.3

4.2.10 a) Trobeu els extrems relatius de la funció polinòmica $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x-3$ i calculeu els valors de f(x) en aquests punts. A partir d'aquestes dades, feu un dibuix aproximat de la seva gràfica.

b) Demostreu que l'equació $x^3-\frac{3}{2}x^2-6x-3=0$ té, exactament, tres solucions reals.

PAU CAT TEC 2000 2.1

4.2.11 D'una funció $y=f(x)$ sabem que la seva derivada és $f'(x)=x^3-4x$.

a) Determineu els intervals de creixement i de decreixement de la funció $y=f(x)$.

b) Determineu les abscisses dels seus extrems relatius i classifiqueu-los.

PAU CAT CCSS JUNY 2017 1.1 (Solució: PAUCCSS pàg. 390)

4.2.12 Considereu la funció $y=(x-1)^2x^3$. Digueu quin és el seu domini de definició. Calculeu els seus intervals de creixement i decreixement, així com els màxims i mínims (si en té). Calculeu també els punts en què la gràfica talla els eixos. Feu després un esbós d'aquesta gràfica. PAU CAT CCSS SET 2000 2.6

4.2.13 a) Estudi del creixement, decreixement, màxims i mínims de la funció $f(x)=x^3-3x^2+2$

b) Estudi de la curvatura i punts d'inflexió de la funció anterior.

4.2.14 Estudi complet de la funció $f(x)=x^4-13x^2+36$
a) Punts de tall amb els eixos.
b) creixement, decreixement, màxims i mínims.
c) curvatura i punts d'inflexió.
d) Representació gràfica.

4.2.19 Estudi complet de les següents funcions (Tipus de funció, domini, continuïtat, periodicitat, simetries, asímptotes, punt de tall amb l'eix Y, signe, monotonia, curvatura, , recorregut o imatge, gràfica) a) $f(x)=4x^2-x^4$ b) $f(x)=x^4-2x^3$

4.2.20 Exercici del Youtube Estudi complet de la funció $f(x)=x^3-3x^2$

4.2.21 Exercici del Youtube Estudi complet de la funció $f(x)=\frac{-1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+4x^2$

4.2.22 Exercici del Youtube Estudi de monotonia i curvatura de la funció $f(x)=x^3-6x^2+9x$

Solució: https://youtu.be/-OwSv1HnTTQ?si=p1kSKG5qLM-01h8u (Mates con Andrés)

4.2.23 Exercici del Youtube Estudi de monotonia i curvatura de la funció $f(x)=x^3-3x^2$

Solució: https://youtu.be/5xsQvwsG0VA?si=UNBEv2v31dOy77P4 (Xavi Mates)

4.2.24 Exercici del Youtube Estudi dels punts de tall amb els eixos, monotonia i curvatura de la funció $f(x)=3x-x^3$ Solució: https://www.youtube.com/live/vmegw722HLA?si=VEkCXuygasWF4I8u (Susi Mates)

4.2.25 Exercici del Youtube Estudi de la funció $f(x)=x^4-2x^3$

Solució: https://www.youtube.com/watch?v=82kLvBbd6Ws (Mates con Andrés)

4.2.26 Estudi de la funció $f(x)=x^4-2x^3$

4.2.27 Estudi de la funció $f(x)=x^4-4x^3$

4.2.28 Exercici del Youtube Estudi complet de la funció $f(x)=x^3-3x^2+4$

Solució en vídeo: https://www.youtube.com/watch?v=pUEnqZLoB-8 (Los Profes De Ciencias)

14.2.29 Donada la funció $f(x)=x^3-2x^2+x$, es demana:
a) El seu domini i els punts de tall amb els eixos coordenats.
b) Intervals de creixement i decreixement.
c) Màxims i mínims locals.
d) Representació gràfica.
e) A partir dels resultats obtinguts en els apartats anteriors, raona en quins punts la funció $g(x)=(x-2)^3-2(x-2)^2+x-2$ té un màxim i un mínim local.

PAU València CCSS Junio 2017 #A2

14.2.30 Una explotació minera extrau $f(t)=30+\frac{3}{2}t-\frac{1}{800}t^3$ Tones de carbó per any , on la variable t indica el temps que ha passat, en anys, des de l'inici de l'explotació. Es demana:
a) Calcula en quin any s'aconsegueix el màxim d'extracció i quin és aquest valor.
b) Si es necessita extraure com a mínim 10 Tones per any perquè l'explotació siga rendible, estudia si en l'any t=40 és rendible.
c) Existeix algun període de temps, a partir dels 40 anys, en el qual l'explotació és rendible? Raona la resposta.

PAU València CCSS Juliol 2018 #B2

14.2.31
a) Determina els màxims i minims de la funció $f(x)=-3x^4+4x^3$
b) Estudia la curvatura de la funció anterior.

4.3 Funcions polinòmiques amb paràmetres.

4.3.1a Calculeu els coeficients a, b, c i d de la funció $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ si sabem que l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció f en el punt d'inflexió (1, 0) és y = –3x + 3 i que la funció té un extrem relatiu en el punt de la gràfica d'abscissa x = 0.
PAU CAT TEC JUNY 2023 #1 (Solució: PAUTEC, pàg. 788)

4.3.1 Youtube La gràfica de la funció $f(x)=ax^3+bx+c$ passa pels punts (0,0), (1,-1) i té un extrem relatiu en $x=1$. Determina els coeficients a,b,c. Solució: https://youtu.be/q_5nmjP7W4I

4.3.2 Youtube Determina a,b si sabem que la funció $f(x)=x^2+ax+b$ té un mínim en $x=2$ i la seva gràfica passa pel punt (2,2). Solució: https://youtu.be/5TH1hIm3D5Y

4.3.3 Youtube Determina a,b si sabem que la funció $f(x)=ax^3+bx^2+x+1$ té extrems relatius en $x=1$ y $x=2$. Solució: https://youtu.be/PpHzPM1IMUs

4.3.4 Determineu b i c per a què la funció $f(x)=x^2+bx+c$ passi pel punt (-2,1) i tingui un extrem relatiu a $x=-3$.

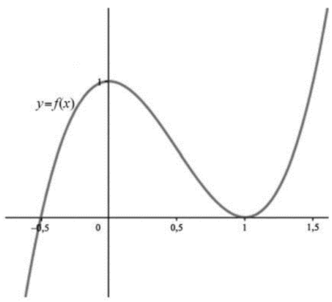
4.3.5 Determineu a, b i c per a què la funció $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ tingui un màxim en $x=-4$, un mínim en $x=0$ i que compleixi $f(1)=1$.

4.3.6 Youtube Determina els paràmetres a , b, i c de la funció $f(x)=ax^3+x^2+bx+c$ de forma que la seva gràfica tingui un màxim relatiu al punt (0 , 3) i un punt d'inflexió en $x=1$ Solució: https://youtu.be/rUF3BJCOtEg (Unicoos)

4.3.7 Un inversor s'adona que en el moment actual les seves accions tenen unes pèrdues de 2.000 €. El seu assessor financer té una previsió del valor de les accions per als propers 30 dies. Li diu que el valor de les accions ja ha començat a augmentar i que d'aquí a pocs dies deixarà de tenir pèrdues. Segons les previsions, durant els propers 10 dies el valor de les accions creixerà; del dia 10 al dia 20 els beneficis disminuiran, i a partir d'aquest dia els beneficis tornaran a créixer. L'assessor també diu a l'inversor que la previsió dels beneficis per als propers 30 dies té com a model la funció $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, en què x∈[0, 30].

a) Calculeu els valors dels paràmetres a, b i c.
b) Si l'inversor vol vendre les seves accions durant aquests 30 dies, quin és el dia en el qual obtindrà més beneficis de la venda? Quins beneficis obtindrà?
PAU CAT CCSS SET 2022 3.6 (Solució: PAUCCSS pàg. 612)

4.3.8 a) En la figura es mostra la gràfica de la funció f(x). Representeu de manera esquemàtica la gràfica de la funció derivada de f(x). Expliqueu el raonament que heu seguit.
b) Calculeu els valors de a i b perquè la funció $g(x)=ax^3+bx^2+1$ tingui un punt d'inflexió en $x=1/2$ i la seva derivada en aquest punt sigui $-3/2$. PAU CAT TEC SET 2021 1.4 (Solució: PAUTEC pàg. 694)



4.3.9 Donada la funció $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$.

a) Determineu la relació que han de complir els paràmetres a, b i c perquè f(x) tingui un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x=-1$.
b) Calculeu el valor del paràmetre a perquè hi hagi un punt d'inflexió de la funció f(x) en el punt d'abscissa $x=0$.
c) Determineu la relació entre els paràmetres a, b i c sabent que la gràfica de f(x) talla l'eix OX en el punt d'abscissa $x=-2$.
d) Calculeu el valor dels paràmetres a, b i c perquè es compleixin les tres propietats anteriors alhora.
PAU CAT TEC SET 2011 2.3

4.3.10 Sigui $P(x)=ax^2+bx+c$ un polinomi qualsevol de segon grau.

a) Trobeu la relació existent entre els paràmetres a, b i c sabent que es compleix que $P(1)=0$ i $P(2)=0$ b) Quan es compleix la condició anterior, indiqueu quins valors pot tenir $P'(3/2)$
PAU CAT TEC JUNY 2010 4.3

4.3.11 Considereu la funció polinòmica de tercer grau $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, $(a\neq 0)$.

a) Trobeu els valors de a, b, c i d per als quals f(x) talla l'eix OX en els punts x = 0 i x = 1 i presenta un mínim relatiu en el punt x = 0.
b) Feu un esbós de la gràfica de la funció que heu trobat, i cabeu de calcular els elements necessaris per dibuixar-la. PAU CAT TEC SET 2004 5.5

4.3.12 Sabent que la funció $y=(x+a)(x^2-4)$, on a és un nombre real, té un màxim i un mínim relatius, i que el màxim relatiu s'assoleix en el punt $x=-\frac{1}{3}$, trobeu l'abscissa del mínim relatiu. PAU CAT TEC JUNY 2002 2.2

4.3.13 Considereu la funció real de variable real $f(x)=4x^3+ax^2-2$.
a) Determineu el valor del paràmetre real a per tal que la funció tingui un extrem relatiu en el punt d'abscissa x = –1.
b) Calculeu els intervals de creixement i decreixement de la funció $f(x)$ quan $a=12$. Indiqueu també els punts en què hi ha extrems relatius i classifiqueu-los.

PAU CAT CCSS JUNY 2021 2.6 (Solució: PAUCCSS pàg. 532)

4.3.14 Una botiga obre al públic des de les 10 hores fins a les 21 hores. Sabem que els ingressos per vendes, en funció de l'hora del dia, venen donats per la funció:

$$I(t)=-5(m-t)^2+n \quad , \quad \text{per a } 10\le t\le 21 .$$

a) Trobeu el valor de m sabent que els ingressos màxims es produeixen a les 18 hores.
b) Trobeu el valor de n sabent que a les 21 hores hi ha uns ingressos de 500 €.
PAU CAT CCSS JUNY 2019 1.6 (Solució: PAUCCSS pàg. 433)

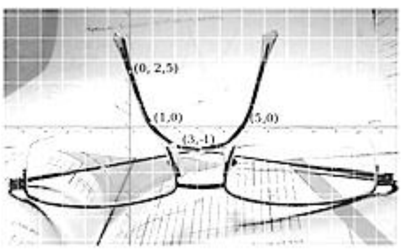
4.3.15 Considereu una funció $f(x)$ que té com a primera derivada $f'(x)=2x^2+bx+4$, en què b és un paràmetre real.
a) Determineu el valor de b perquè f(x) tingui un extrem relatiu en x = –1 i raoneu si es tracta d'un màxim o d'un mínim.
b) Si sabem que la gràfica de la funció f(x) passa pel punt (0, 3), trobeu l'equació de la recta tangent a f(x) en aquest punt.
PAU CAT CCSS SET 2019 5.5 (Solució: PAUCCSS pàg. 438)

4.3.16 Sigui $y=f(x)$ una paràbola que té el vèrtex en el punt V = (0, −4) i talla l'eix de les abscisses en els punts (−2, 0) i (2, 0).
a) Determineu-ne l'equació.
b) Sigui una funció g tal que $g'(x)=f(x)$. Estudieu el creixement de la funció g, determineu-ne les abscisses dels extrems relatius i classifiqueu-los.
PAU CAT CCSS JUNY 2018 5.3 (Solució: PAUCCSS pàg. 412)

4.3.17 El vèrtex d'una paràbola és el punt (1, 2).
a) Si la paràbola talla l'eix de les abscisses pel punt $\left(\frac{-1}{2}\ ,\ 0\right)$, quin serà l'altre punt de tall de la paràbola amb l'eix de les abscisses?
b) Trobeu l'equació de la paràbola. PAU CAT CCSS SET 2017 2.6

4.3.18 Determineu els valors de a, b i c que fan que la funció $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ passi pel punt (0, 4) i tingui extrems relatius en els punts d'abscissa x = 1 i x = 3. Classifiqueu aquests extrems.
PAU CAT CCSS SET 2016 5.3

4.3.19 La *fotografia matemàtica* següent sembla indicar que les branques de les ulleres formen una paràbola. Tanmateix, no totes les corbes en forma de «U» són paràboles. Hem marcat sobre uns eixos de coordenades alguns dels punts: (0, 2.5), (1, 0), (3, –1) i (5, 0).
Justifiqueu si la gràfica correspon a una paràbola o no.
PAU CAT CCSS SET 2016 1.3

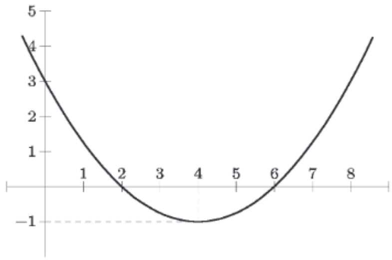


4.3.20 Donades les funcions $f(x) = x^3 + 5x^2 + (3+k)x$ i $g(x) = x^2 + kx$.
a) Determineu les abscisses dels punts de tall de les dues corbes.
b) Determineu k perquè la paràbola donada per la funció g tingui el vèrtex en el punt d'abscissa x= 2, i determineu-ne l'ordenada.
PAU CAT CCSS JUNY 2013 3.2

4.3.21 Sigui f una funció polinòmica de grau 3, amb un màxim a (0, 0) i un mínim a (2, –4).
a) Feu una gràfica aproximada de f.
b) Determineu la fórmula de la funció.
PAU CAT CCSS JUNY 2012 3.5

4.3.22 Considereu la funció $f(x)= x^3 - ax^2 + 9x + b$.
a) Determineu a i b, sabent que la gràfica de f passa pel punt (2, 2) i té un extrem en $x = 1$.
b) Per a a=6 i b= 0, determineu els possibles màxims i mínims de f i classifiqueu-los.
PAU CAT CCSS SET 2010 2.2

4.3.23 La gràfica següent representa una funció polinòmica de segon grau (paràbola).
a) Trobeu el vèrtex de la paràbola i les interseccions amb els eixos.
b) Determineu l'equació de la paràbola.
PAU CAT CCSS SET 2008 4.4



4.3.24 La funció $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ té un màxim en el punt (1, 4) i passa pel punt (3, 0).
Trobeu a, b i c. PAU CAT CCSS JUNY 2007 1.4

4.3.25 Trobeu els valors de b i c per tal que la funció $f(x) = x^2 + bx + c$ tingui un extrem relatiu en el punt (–1, –4). Quin tipus d'extrem és? PAU CAT CCSS JUNY 2004 4.4

4.3.26 La funció $f(x) = -5ax^2 + 700x + 1440$ té un extrem relatiu per x = 10. Calculeu el valor de a.
PAU CAT CCSS JUNY 2003 5.2

4.3.27 Calculeu a i b sabent que la funció $f(x) = ax^2 + bx - 7$ té un extrem local en el punt (2, 1). És un màxim o un mínim? PAU CAT CCSS SET 2001 4.2

4.3.28 Trobeu els nombres a i b de manera que la funció $f(x) = ax^2 + bx$ tingui un màxim en el punt (3, 9). PAU CAT CCSS JUNY 1998 3.3

4.3.29 Donada la funció $f(x) = -x^3 + bx^2 + x + d$, determina els valors de b i de d per als què la funció té un mínim relatiu en el punt $(-1, 2)$.

4.3.30 Determina els valors de a i b de forma que la funció $f(x) = ax^3 + bx^2 - x + 2$ tingui:
- Un mínim en $x = 2$ - Un punt d'inflexió en $x = 1/3$ Solució: https://youtu.be/Hj31kEHgPLM

4.3.31 Sigui la funció $f(x) = ax^3 + bx^2 + x$ Determina els valors dels paràmetres a i b sabent que la funció té un màxim en $x = 1$ i que $f(1) = 2$.

4.3.32 Donada la funció $f(x) = ax^3 + bx$, determina a i b de forma que $f(2) = 4$ i la funció tingui un mínim relatiu en $x = 1$.

4.3.33 Determina els paràmetres a, b i c de la funció $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, si sabem que la seva gràfica passa pel punt $(-1, 0)$ i té un màxim relatiu en el punt $(0, 4)$.

4.3.34 Calcula els valors de a i b per als què la funció $f(x) = ax^2 + bx^3$ tingui un punt d'inflexió en $(2, 16)$.

4.3.35 Sigui la funció $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ Determina els coeficients a, b i c si sabem que té extrems en $x = -1$ i en $x = 1$ i que passa per l'origen de coordenades.

4.4 Funcions polinòmiques en context general.

4.4.1 Un fabricant de vehicles elèctrics ha tret al mercat un model nou amb tant d'èxit que ven tots els que fabrica. El preu de venda de cada cotxe és de 35.000 €. Fabricar un cert nombre de cotxes li suposa unes despeses de $C(x) = x^2 + 34.880x + 1.100$,
en què x representa el nombre de vehicles fabricats.
a) Entre quins valors ha de mantenir la producció per tal de no tenir pèrdues?
b) Quants vehicles ha de fabricar per tal d'obtenir el màxim benefici? Quin valor pren aquest benefici màxim? PAU CAT CCSS SET 2023 2.2 (Solució: PAUCCSS pàg. 654)

4.4.2 El nombre de kilograms de menjar que han gastat en un alberg d'animals durant una setmana concreta es pot calcular mitjançant la funció $f(t) = 10\left(-\frac{t^3}{8} + \frac{3t^2}{2} - \frac{9t}{2} + 10\right)$
en què t és el temps en dies i va des del dia t = 1 (dilluns) fins al dia t = 8 (dilluns de la setmana següent).
a) Calculeu quants kilograms de menjar es van gastar el primer dilluns i el dilluns següent. Trobeu quin dia d'aquella setmana es van gastar 100 kg de menjar.
b) Determineu els dies de la setmana en què la despesa en menjar va ser més gran i els dies en què va ser més petita. Quants kilograms de menjar es van gastar aquests dies?
PAU CAT CCSS JUNY 2023 #5 (Solució: PAUCCSS pàg. 634)

4.4.3 Experimentalment s'ha comprovat que la producció d'un tipus de fruita determinat que es cultiva en hivernacles depèn de la temperatura, segons la funció $f(x) = -x^2 + 46x - 360$, en què x representa la temperatura de l'hivernacle en graus Celsius i $f(x)$ és la producció anual en centenars de quilograms per hectàrea. El preu de venda de la fruita es manté estable a 1,2 euros per cada quilogram.
a) Determineu l'interval de temperatures entre les quals cal mantenir l'hivernacle perquè hi hagi producció de fruita. Calculeu els ingressos anuals per hectàrea si es manté l'hivernacle a 20 °C de temperatura.
b) A quina temperatura s'obté la producció màxima de fruita? Quins ingressos per hectàrea s'obtenen en aquest cas? PAU CAT CCSS JUNY 2022 S2 #2

4.4.4 En els models matemàtics que s'utilitzen per a descriure l'evolució d'una malaltia, s'anomena R_0 el nombre mitjà de noves infeccions que cada persona infectada provoca en la població. Quan aquest nombre és inferior a 1, cada individu infectat transmet la malaltia, de mitjana, a menys d'una persona i la malaltia tendeix a desaparèixer. En canvi, si R_0 és més gran que 1, la malaltia s'estén i es produeix una epidèmia.
Quan es descobreix una vacuna efectiva contra la malaltia, es pot controlar l'epidèmia vacunant només una proporció p de la població. És el que es coneix com a immunitat de grup. Efectivament, un cop vacunada una proporció $p \in (0,1)$ de la població, la nova R_0, que s'anomena *efectiva* i es denota amb R_e, és el producte de la R_0 original per la proporció d'individus que no estan vacunats, 1 – p. I s'aconsegueix controlar l'epidèmia si la R_e és inferior a 1.
a) En el cas del xarampió, s'estima que $R_0 = 15$. Si analitzem una població amb un percentatge d'individus vacunats del 95 %, segons el model descrit, hi ha risc que es produeixi una epidèmia de xarampió en aquesta població?
b) En el cas concret de l'anomenada grip espanyola del 1918, s'estima que $R_0 = 4$. Calculeu quin percentatge de població hauria calgut vacunar, com a mínim, per a aturar l'epidèmia d'aquesta malaltia.
c) Expresseu, en general, el llindar de població mínima que cal vacunar en funció del valor R_0 d'una malaltia. Feu un esbós d'aquesta funció per als valors de R_0 entre 1 i 20.
PAU CAT CCSS JUNY 2022 S2 #6

4.4.5 L'1 de gener de 2019 va sortir al mercat un nou model d'un producte tècnic d'esquí. La funció de tercer grau $f(x) = 10x^3 - 210x^2 + 1470x$ ens dona el nombre total d'unitats venudes, en què x denota el nombre de mesos transcorreguts, des del llançament del producte, durant el primer any (és a dir, $x \in [0, 12]$).

a) Quantes unitats s'havien venut al cap de 3 mesos? Quantes se'n van vendre al cap d'un any? Determineu la taxa de variació mitjana entre els mesos 3 i 12.
b) Comproveu que la funció és creixent en l'interval [0, 12] i trobeu en quin instant el creixement ha estat més lent.
PAU CAT CCSS JUNY 2020 1.2 (Solució: PAUCCSS pàg. 462)

4.4.6 La funció $Q(x) = (x+1)^2(32-x)$, en què x ∈ [–1, 32], representa la producció, en quilograms, d'una hortalissa en un hivernacle en funció de la temperatura x, expressada en graus centígrads (°C), que pot variar entre –1 °C i 32 °C.
a) Calculeu quina és la temperatura de l'hivernacle amb la qual s'obté la màxima producció. Quina producció d'hortalissa obtindrem a aquesta temperatura?
b) Calculeu a quines temperatures s'assoleix el nivell mínim de producció i quin és aquest valor mínim. PAU CAT CCSS SET 2020 4.6 (Solució: PAUCCSS pàg. 491) Sol: 21 max → 5324 b) -1 y en 32 → 0

4.4.7 Des d'una barca es dispara una bengala de salvament marítim que s'apaga al cap de 4 minuts. En aquest interval de temps, es comprova que la intensitat lumínica de la bengala en funció del temps, mesurada en percentatges del 0 % al 100 %, queda perfectament descrita per l'expressió L(t) = 25·t·(4 – t), en què el temps t varia entre 0 i 4 minuts.
a) Calculeu per a quin valor de t el percentatge d'intensitat lumínica serà màxim.
b) Si des de la costa la bengala només és visible quan la seva intensitat lumínica és superior al 75 %, quin és l'interval de temps en què serà visible des de la costa i, per tant, serà més factible el salvament? PAU CAT CCSS JUNY 2017 1.2 (Solució: PAUCCSS pàg. 387)

4.4.8 Una cadena de televisió decideix emetre un nou programa en la franja horària de les 17.00h a les 21.00h. El percentatge d'audiència P de la primera emissió en funció del temps t, mesurat en hores, és definit per la funció $P(t) = \frac{1}{5}(-t^3 + 49t^2 - 760t + 3690) \quad 17 \leq t \leq 21.$
Els directius de la cadena acorden que el programa se seguirà emetent si en algun moment s'aconsegueix un percentatge d'audiència superior al 20%.
a) Expliqueu raonadament en quins intervals de temps l'audiència del programa va augmentar i en quins intervals va disminuir.
b) En vista dels resultats, se seguirà emetent el programa? Justifiqueu la resposta.
PAU CAT CCSS JUNY 2014 3.3

4.4.9 S'han corregit unes quantes proves de selectivitat i s'han puntuat amb notes entre 0 i 10. El nombre de persones que han obtingut una determinada qualificació x és definit per la funció $N(x) = 250 - (2x-9)^2$ a) Quantes persones han tret un 10 en aquesta prova? Quantes persones han tret un 6? b) Quina és la nota que han tret més persones? Quantes persones han tret aquesta nota? PAU CAT CCSS SET 2014 5.2 Sol: 129; 241; 4'5; 250

4.4.10 Un equip científic ha estudiat l'evolució de la població d'una petita illa de la Polinèsia. Com a conclusió, ha determinat que, per tal d'obtenir una bona estimació de la població, cal fer servir l'expressió $P(t) = 400 + 18t - 6t^{\frac{3}{2}}$ on t indica els anys transcorreguts des del principi de l'estudi.
a) Determineu la població de l'illa quan va començar l'estudi, i al cap d'un any. Quina ha estat la taxa de creixement en aquest període?
b) Al cap de quants anys després del començament de l'experiment va deixar de créixer la població de l'illa? Quin va ser el nombre màxim d'habitants? 4, 424
PAU CAT CCSS JUNY 2013 4.1 (Solució: PAUCCSS pàg. 336)

4.4.11 La demanda d'energia elèctrica d'una ciutat, comptada a partir de la mitjanit i fins a les vuit del matí, és donada per la funció $f(t) = \frac{t^2-6t+12}{6}$, on t s'expressa en hores (h) i f(t), en milions de kilowatts hora (kW h).
a) A quina hora el consum coincideix amb el de la mitjanit, i quin és aquest consum?
b) A quina hora es donarà el mínim consum? Justifiqueu que, efectivament, es tracta d'un mínim. PAU CAT CCSS SET 2013 1.6

4.4.12 Un estudi de laboratori sobre la propagació d'una espècie de mosques mostra que, passades t setmanes, el nombre d'individus és N(t) centenars de mosques, en què $N(t) = -(t-2)^2 + 9$

a) Quantes mosques formen la població al cap d'una setmana? Quantes setmanes han de transcórrer fins a la desaparició total de les mosques?

b) Quina és la població màxima d'individus? Quantes setmanes han hagut de passar per a obtenir aquesta població màxima? PAU CAT CCSS SET 2011 2.1

4.4.13 Un fons d'inversions posa en marxa un producte financer que aporta un benefici de R(x) € en fer una inversió de x centenars d'euros, segons la funció $R(x) = -0.01x^2 + 4x + 20$

a) Calculeu quina inversió produeix més beneficis.

b) Calculeu el tant per cent de benefici que s'obtindrà amb una inversió de 1000€, i el que s'obtindrà amb una de 10000€. PAU CAT CCSS SET 2010 2.3 Sol: x = 200; 5,9 % 3,2 %

4.4.14 En una explotació ramadera es declara una epidèmia, i els veterinaris preveuen que la propagació d'aquesta seguirà la funció $f(x) = -2x^2 + 48x + 162$

en què x representa el nombre de setmanes que han transcorregut des del moment de la declaració de l'epidèmia, i f(x) indica el nombre d'animals afectats.

a) Quants animals hi ha afectats en el moment de declarar-se l'epidèmia? Quantes setmanes durarà l'epidèmia fins al moment en què ja no quedi cap animal afectat?

b) Indiqueu quin serà el nombre màxim d'animals afectats, i en quina setmana es produirà.

PAU CAT CCSS JUNY 2010 4.6 ➞ a) 162 ; x=27 ; f ' (x)=0 ➞ x=12 ; y = 450

4.4.15 La taxa d'inflació interanual d'un país determinat durant l'any 2008 expressada en punts percentuals, i(t), es pot aproximar mitjançant la funció $i(t) = \frac{t^2-10t+9}{40} + 3, \quad 1 \le t \le 12$

en què t és el temps en mesos des del començament de l'any i t=1 és el mes de gener.

a) Trobeu en quins mesos la taxa d'inflació interanual és de 3 punts percentuals.

b) Trobeu en quins mesos la taxa d'inflació és decreixent i en quins mesos és creixent.

c) Trobeu en quin mes la taxa assoleix el valor mínim i calculeu aquest valor.

d) Feu un esbós de la gràfica d'aquesta funció.

e) Trobeu en quin mes la taxa assoleix el valor màxim i calculeu aquest valor. PAU CAT CCSS SET 2009 1.6

4.4.13 El benefici B(x) (expressat en milers d'euros) que obté una empresa per la venda de x unitats d'un determinat producte és representat per la funció:

$$B(x) = -x^2 + 300x - 16100 \text{ per a } 50 \le x \le 250.$$

a) Si ha venut 110 unitats, quin benefici ha obtingut?

b) Quantes unitats pot haver venut si el benefici obtingut ha estat de 3.900 milers d'euros?

c) Quantes unitats ha de vendre per tal que el benefici sigui màxim? Quin és aquest benefici màxim? d) Quina quantitat d'unitats ha de vendre per no tenir pèrdues?

PAU CAT CCSS JUNY 2006 3.5

4.4.14 Com a resultat del test efectuat amb un nou model d'automòbil per determinar-ne el consum de benzina, s'ha observat que, per a velocitats compreses entre 25 i 175 km/h, el consum C(x) de gasolina, expressat en litres consumits en 100 km, fets a la velocitat constant de x km/h, es pot aproximar per la funció $C(x) = 7.5 - 0.05x + 0.00025x^2$

a) Determineu el consum a les velocitats de 50 km/h i de 150 km/h.

b) A quina velocitat s'obté el mínim consum? Quin és aquest consum mínim?

c) Feu un estudi del creixement i decreixement de la funció C(x) a l'interval [25,175]. Determineu les velocitats que corresponen a consum màxim, així com aquest consum.

PAU CAT CCSS JUNY 2003 2.5

4.4.15 La taxa d'inflació interanual d'un país determinat durant l'any 2008 expressada en punts percentuals, i(t), es pot aproximar mitjançant la funció $i(t) = \frac{t^2-10t+9}{40} + 3, \quad 1 \le t \le 12$

en què t és el temps en mesos des del començament de l'any i t = 1 és el mes de gener.

a) Trobeu en quins mesos la taxa d'inflació interanual és de 3 punts percentuals.

b) Trobeu en quins mesos la taxa d'inflació és decreixent i en quins mesos és creixent.

c) Trobeu en quin mes la taxa assoleix el valor mínim i calculeu aquest valor.

d) Feu un esbós de la gràfica d'aquesta funció.

e) Trobeu en quin mes la taxa assoleix el valor màxim i calculeu aquest valor.

PAU CAT CCSS SET 2009 1.6

4.4.16 El benefici B(x) (expressat en milers d'euros) que obté una empresa per la venda de x unitats d'un determinat producte és representat per la funció:

$$B(x) = -x^2 + 300x - 16100 \text{ per a } 50 \leq x \leq 250.$$

a) Si ha venut 110 unitats, quin benefici ha obtingut?
b) Quantes unitats pot haver venut si el benefici obtingut ha estat de 3.900 milers d'euros?
c) Quantes unitats ha de vendre per tal que el benefici sigui màxim? Quin és aquest benefici màxim?
d) Quina quantitat d'unitats ha de vendre per no tenir pèrdues?

PAU CAT CCSS JUNY 2006 3.5

4.4.17 Com a resultat del test efectuat amb un nou model d'automòbil per determinar-ne el consum de benzina, s'ha observat que, per a velocitats compreses entre 25 i 175 km/h, el consum C(x) de gasolina, expressat en litres consumits en 100 km, fets a la velocitat constant de x km/h, es pot aproximar per la funció $C(x) = 7.5 - 0.05x + 0.00025\,x^2$

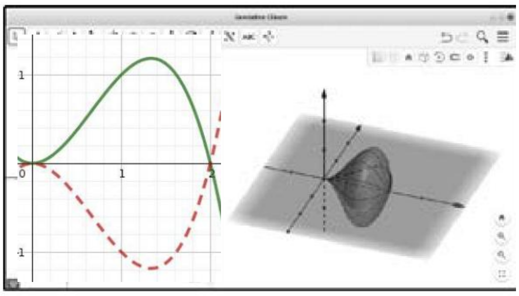
a) Determineu el consum a les velocitats de 50 km/h i de 150 km/h.
b) A quina velocitat s'obté el mínim consum? Quin és aquest consum mínim?
c) Feu un estudi del creixement i decreixement de la funció C(x) a l'interval [25,175]. Determineu les velocitats que corresponen a consum màxim, així com aquest consum.

PAU CAT CCSS JUNY 2003 2.5

4.4.18 El valor d'un producte electrònic, en funció del nombre de mesos que fa que està a la venda, t, és donat per la funció f (t) = –(t + 25)(t – 75).

a) Trobeu els intervals de creixement i decreixement de la funció f (t). En quin moment el producte assolirà el valor màxim? Quin és aquest valor màxim?
b) Sabem que el producte es deixarà de comercialitzar quan arribi a un valor de 475 €. En quin moment es deixarà de comercialitzar? PAU CCSS JUNY 2022 5.1 (Sol. PAUCCSS pàg. 605) t=25 màx

4.4.19 Una jove emprenedora vol crear una empresa de baldufes, que té pensat d'imprimir amb una impressora 3D a partir d'un disseny matemàtic fet amb el programa *GeoGebra*. Per a fer-ho, fa girar el perfil de la funció *f(x) = –x³ + 2x²* al voltant de l'eix de les abscisses entre els dos punts de tall amb aquest eix, i així obté una baldufa tombada. Les unitats estan expressades en centímetres.



a) Quina serà l'alçària de la baldufa? Observeu que per a obtenir-la heu de calcular la distància entre els dos punts de tall amb l'eix de les abscisses.
b) Quina serà l'amplària de la baldufa? Observeu que l'amplària correspon al doble del valor que pren la funció en el màxim que hi ha entre els dos punts de tall amb l'eix de les abscisses.

PAU CCSS JUNY 2023 5.6 (Sol. PAUCCSS pàg. 681) Sol: a) 2cm b) 2,37

4.4.20 Considereu la funció polinòmica $f(x) = 3x^{13} + 5x^3 + 2$.

a) Justifiqueu que la seva gràfica talla l'eix de les abscisses en un punt de l'interval [–2, 0]. Doneu un interval de longitud 0,5 on es trobi aquest punt de tall.
b) Estudieu les zones de creixement i de decreixement, i els màxims i els mínims de $y = f(x)$. Quants punts de tall té exactament la gràfica d'aquesta funció amb l'eix de les abscisses? Justifiqueu la resposta.

PAU CAT TEC SET 2024 #3.1 (Sol. PAUTEC pàg 926)

4.5 Funcions polinòmiques en context comercial.

4.5.1 El cost de producció (en euros) de x unitats d'un producte determinat és donat per la funció $C(x) = 0{,}02x^2 + 3x + 100$. Aquestes unitats es posen a la venda i el preu de venda unitari (en euros) depèn del nombre d'unitats produïdes x. Concretament, és donat per la funció $p(x) = 47 - 0{,}06x$. Suposem que es venen totes les unitats que es produeixen.

a) Determineu la funció que dona els beneficis obtinguts en funció del nombre d'unitats produïdes x. *(Sol: $B(x) = -0{,}08x^2 + 44x - 100$)*

b) Determineu quantes unitats cal produir per a obtenir el benefici màxim i digueu quin és aquest benefici. *(Sol: f(275)=5.950 €)* PAU CAT CCSS SET 2022 3.1 (Solució: PAUCCSS pàg. 606)

4.5.2 Una empresa posa a la venda un producte que distribueix en caixes. El benefici B obtingut per l'empresa, expressat en milers d'euros, és donat per l'expressió $B(x) = -x^2 + 16x - 55$, en què x > 0 és el preu de venda de cada caixa, expressat en euros.

a) Quin benefici obtindrà si el preu de venda de cada caixa és de 6 euros? Entre quins valors cal fixar el preu de venda d'una caixa per a obtenir beneficis? *(Sol: 6mil ; [5,11])*

b) A quin preu ha de vendre cada caixa perquè el benefici sigui el més gran possible? Quin és aquest benefici màxim? *(Sol: f(8)=9mil)* PAU CAT CCSS SET 2021 1.5 (Solució: PAUCCSS pàg. 562)

4.5.3 Un fabricant va tenir un producte a la venda durant deu anys. Durant aquest temps, el preu del producte P, en euros, va estar relacionat amb el temps que feia que estava a la venda *t*, expressat en anys, seguint la funció següent: $P(t) = \begin{cases} 5(t+1)^2 - 5 & si\ 0 \le t \le 2 \\ -4t + 48 & si\ 2 < t \le 10 \end{cases}$

a) Indiqueu els intervals de creixement i de decreixement del preu del producte durant aquests deu anys. b) Trobeu el preu màxim que va assolir el producte durant el temps que va estar a la venda i calculeu la taxa de variació mitjana del preu del producte durant els darrers cinc anys que va estar a la venda. PAU CAT CCSS SET 2020 4.2 (Solució: PAUCCSS pàg. 485)

4.5.4 Els beneficis d'una companyia de transport de viatgers són donats per la funció $B(x) = ax^2 + bx + c$, on x és el preu que la companyia cobra per cada viatge. Sabem que si cobren 40 € per viatge, els beneficis són 19.000 €. A més, si augmentem el preu un 25 %, el benefici que s'obté és el màxim, 20.000 €. Tenint en compte aquestes dades, determineu els valor de *a*, *b* i *c*.
PAU CAT CCSS JUNY 2013 4.4

4.5.5 Una empresa que fabrica bicicletes ven la totalitat de la producció. Anomenarem x el nombre de bicicletes que fabrica mensualment. Els costos mensuals de producció, en euros, segueixen la funció $C(x) = 180x + 12000$. La venda de les bicicletes li reporta uns ingressos que segueixen la funció $I(x) = 500x - \frac{1}{2}x^2$. Els beneficis de l'empresa són, lògicament, la diferència entre ingressos i costos.

a) En quin interval cal situar la producció per a no perdre diners?

b) Quantes bicicletes ha de produir mensualment l'empresa per a obtenir el benefici màxim? En aquest cas, quant guanya per cada bicicleta? PAU CAT CCSS JUNY 2011 1.5

4.5.6 Una fàbrica de televisors ven cada aparell a 300€. Les despeses derivades de fabricar x televisors són $D(x) = 200x + x^2$, en què $0 \le x \le 80$.

a) Suposant que es venen tots els televisors que es fabriquen, trobeu la funció dels beneficis que s'obtenen després de fabricar i vendre *x* televisors.

b) Determineu el nombre d'aparells que convé fabricar per a obtenir el benefici màxim, i també quin és aquest benefici màxim. *Sol: B(50)=2500* PAU CAT CCSS JUNY 2008 5.4

4.5.7 Els beneficis mensuals d'un artesà expressats en euros, quan fabrica i ven x objectes, s'ajusten a la funció $B(x) = -0.5x^2 + 50x - 800$, en què $20 \le x \le 60$.

a) Trobeu el benefici que obté en fabricar i vendre 20 objectes i en fabricar i vendre 60 objectes.

b) Trobeu el nombre d'objectes que ha de fabricar i vendre per a obtenir el benefici màxim, així com aquest benefici màxim.

c) Feu un esbós del gràfic de la funció B(x).

d) El benefici mitjà per x objectes és $M(x) = \frac{B(x)}{x}$. Digueu quants objectes ha de fabricar i vendre perquè el benefici mitjà sigui màxim, i quin és aquest benefici. PAU CAT CCSS JUNY 2007 2.5

4.5.8 Una fàbrica de vídeos decideix introduir al mercat un nou model. El departament de màrqueting de l'empresa estima que la relació entre la demanda x del producte, mesurada en unitats, i el preu de venda p de cada unitat, mesurat en milers de ptes., ve donada per l'expressió $p = 100 - \frac{x}{12}$ Els costos de producció estimats responen a la fórmula: C(x) = 1250 + 10x

Determineu:

a) la demanda x en funció de p; ; b) els costos C(p) en funció del preu;

c) els ingressos I(p) que rep el fabricant per la venda d'aparells, en funció del preu;

d) el benefici B(p) del fabricant per la venda dels aparells, en funció del preu;

e) el preu pel qual el benefici és màxim, el benefici màxim i el nombre d'unitats venudes corresponent. Sol: $B(p) = -12p^2 + 13200+13250 \rightarrow B(55)=23050$ PAU CAT CCSS SET 2001 4.5

4.5.9 En una indústria es produeixen recanvis de peces d'automòbil. S'ha fet un estudi de costos d'un dels recanvis fabricats i ha resultat que el cost diari de producció de x peces (en ptes.) ve donat per la funció $C(x) = 3200 + 20x + 2x^2$.

a) Quantes peces d'aquest recanvi s'han de produir diàriament perquè el cost unitari (el cost de cada peça) sigui el mínim possible?

b) Quin és el cost diari de fabricar aquest nombre de peces?

c) Quin és, en aquest cas, el preu de cost de cada peça? PAU CAT CCSS JUNY 2001 2.5

4.5.10 Una entitat financera llança al mercat un pla d'inversió, la rendibilitat R(x) del qual, en milers de pessetes, ve donada en funció de la quantitat x que s'inverteixi, per mitjà de l'expressió següent: $R(x) = -0.001x^2 + 0.5x + 2.5$

a) Deduïu raonadament quina quantitat de diners li convé invertir a un client en aquest pla per obtenir rendibilitat màxima.

b) Quina rendibilitat obtindria en aquest cas?

PAU CAT CCSS JUNY 2000 3.1

4.5.11 Una empresa que fabrica un determinat producte ha observat experimentalment que la venda de x milers d'unitats diàries d'aquest producte li produeix uns ingressos en milions de pessetes donats per la funció següent: $I(x) = -\frac{11}{54}x^2 + \frac{235}{108}x - \frac{28}{27} \quad 2 \le x \le 5$

Així mateix el cost de fabricació de x milers d'unitats diàries del producte el dóna (també en milions de pessetes) la funció $C(x) = \frac{3}{4}x + 1 \quad 2 \le x \le 5$ Determineu quants milers d'unitats hauria de fabricar d'aquest producte per obtenir un benefici màxim.

PAU CAT CCSS JUNY 1999 6.5

4.5.12 En els primers 6 anys, una empresa va obtenir uns beneficis (en desenes de milers d'euros) que es poden representar mitjançant la funció $f(t) = t^3 - 8t^2 + 15t$

on t és el temps en anys transcorreguts.

a) Determina els períodes en què l'empresa va tenir beneficis i en què va tenir pèrdues.

b) En quin valor de t es va assolir el màxim benefici i quin va ser aquest?

c) En quin valor de t es va assolir la màxima pèrdua i quina va ser aquesta?

d) Suposant que a partir dels 6 anys els beneficis segueixen la mateixa funció, tornarà l'empresa a tenir períodes alterns de beneficis i pèrdues?

PAU València CCSS Juny 2019 (Solució: Valencia pág. 280)

4.5.13 Una màquina està productiva durant un any des de la seua compra. Se sap que el rendiment (en kilograms de producció) que té la màquina x mesos després de la compra ve donat per la funció $f(x) = 800 + 15x + 6x^2 - x^3$

per a qualsevol x entre 0 i 12.

a) Determina el rendiment, en kilograms de producció, d'aquesta màquina un any després de la seva compra.

b) Després de quants mesos després de la compra arriba la màquina al seu major rendiment? quin és aquest rendiment màxim?

4.5.14 Una empresa ha estimat que els ingressos i despeses mensuals (en euros) que genera la fabricació de x unitats d'un producte venen donades per les funcions següents:

Ingressos: $I(x)=4x^2+800x$ Despeses: $G(x)=6x^2+460x+672$

a) Quin serà el benefici si produeix 100 unitats?
b) Quina haurà de ser la producció si volem obtenir un benefici de 5328 € mensuals?
c) En quin interval d'unitats de producció s'ha de mantenir aquesta empresa si no vol tenir pèrdues?
d) Quin és el nombre d'unitats que ha de fabricar l'empresa perquè el benefici siga màxim? Quin és el benefici obtingut en aquest cas?

4.5.15 Dues companyies de taxi, A i B, ofereixen tarifes diferents. La companyia A ofereix un cost fix de 20 € més 0,4 € per kilòmetre recorregut, mentre que el preu de la companyia B segueix la funció $g(x)=0{,}01x^2+0{,}1x+10$, en què x representa el nombre de kilòmetres recorreguts.
a) Quina de les dues companyies ofereix la tarifa més econòmica si fem un recorregut de 10 km? I si en fem un de 80 km? Calculeu la diferència de preu en cada cas. Hi ha cap cost fix en la tarifa de la companyia B només pel sol fet de pujar al taxi?
b) Determineu per a quin nombre de kilòmetres recorreguts les dues tarifes coincideixen. Si considerem només els trajectes inferiors a aquesta quantitat, per a quin nombre de kilòmetres la diferència de preu entre una tarifa i l'altra és màxima? Quina és aquesta diferència màxima de preu?

PAU CAT CCSS JUNY 2024 1.1 (Solució: PAUCCSS pàg. 727)

4.5.16 Una fàbrica de vehicles produeix cotxes d'un model anomenat *Paradís* i els ven a 58.000 €. Sabem que els costos mensuals de producció són donats per la funció $C(x)=\frac{1}{2}x^2-64x+4.704$ (en milers d'euros), en què x denota el nombre de cotxes que es fabriquen mensualment.
a) Suposant que es venen tots els cotxes que es fabriquen, verifiqueu que la funció de beneficis és $B(x)=-\frac{1}{2}x^2+122x-4.704$ (en milers d'euros).
b) Determineu el nombre de cotxes que cal fabricar mensualment per a no tenir pèrdues. Per a quin nombre d'unitats produïdes s'obté el benefici màxim i quin és aquest benefici màxim?
c) Es vol augmentar el preu de venda per unitat, de manera que el benefici màxim s'obtingui amb 130 unitats (la funció que dona el cost mensual en milers d'euros no varia). Quin ha de ser el nou preu de venda del cotxe?

PAU CCSS JUNY 2022 5.5 (Sol. PAUCCSS pàg. 609)

4.5.17 Els beneficis o pèrdues diaris d'una nova empresa durant el primer any de funcionament són donats per la funció $B(x) = -x^2 + 260x - 12.000$, en què x representa el dia des de l'inici de l'activitat de l'empresa.
a) Quin benefici o pèrdua va tenir l'empresa el dia 45? Quins dies va obtenir un benefici de 4.000 €?
b) Calculeu quin dia l'empresa va obtenir el benefici màxim i quin va ser aquest valor. Calculeu també entre quins dies l'empresa no va tenir pèrdues.

PAU CAT CCSS SET 2024 #3.1 (Sol. PAUCCSS pàg 751)

4.5b Funcions polinòmiques en la PAU València.

4.5b.1 Els ingressos i costos anuals, en milers d'euros, d'una fàbrica de motxilles vénen donats, respectivament, per les funcions: $I(x) = 4x - 9$, $C(x) = 0.01x^2 + 3x$

on la variable x expressa en euros el preu de venda d'una motxilla. Es demana:

a) Calcula la funció de beneficis.

b) Quin ha de ser el preu de venda x perquè el benefici siga màxim? Quin és aquest benefici màxim?

c) Amb la funció de beneficis, determina els punts de tall amb els eixos i les zones de creixement i decreixement. Representa gràficament aquesta funció.

d) Raona per a quins preus de venda (valors de x) l'empresa tindria pèrdues.

PAU València CCSS Juliol 2018 #2

4.5b.2 En els primers 6 anys, una empresa va obtenir uns beneficis (en desenes de milers d'euros) que es poden representar mitjançant la funció $f(t) = t^3 - 8t^2 + 15t$

on t és el temps en anys transcorreguts.

a) Determina els períodes en què l'empresa va tenir beneficis i en què va tenir pèrdues.

b) En quin valor de t es va assolir el màxim benefici i quin va ser aquest?

c) En quin valor de t es va assolir la màxima pèrdua i quina va ser aquesta?

d) Suposant que a partir dels 6 anys els beneficis segueixen la mateixa funció, tornarà l'empresa a tenir períodes alterns de beneficis i pèrdues? PAU València CCSS Juny 2019 #2

4.5b.3 Una botiga de lloguer de bicicletes disposa mensualment de 350 bicicletes. Tot fent un estudi entre els ingressos i els costos d'explotació s'ha determinat que els beneficis mensuals, en euros, s'ajusten a la funció $f(x) = 350x - x^2 - 15000$

sent x el nombre de bicicletes llogades en un mes.

a) Calcula el nombre de bicicletes que s'han de llogar cada mes per a obtindre un benefici màxim.

b) Quin és aquest benefici màxim?

c) Determina a partir de quina quantitat de bicicletes llogades el taller obté beneficis.

d) Pot tindre pèrdues a pesar de llogar una quantitat major de bicicletes que l'obtinguda en l'apartat anterior?

PAU València CCSS Set 2020 #5

4.5b.4

Des de l'inici de 1980, la capacitat (quantitat que es pot extreure) de una explotació gasística, expressat en milers de metres cúbics, ve donada per la funció: $f(x) = 36600 + 1500\,x - 15x^2$

on la variable x representa el temps en anys transcorreguts des de l'inici de l'any 1980.

a) Calcula la capacitat de la explotació a l'inici de 1980.

b) Calcula quant de temps ha de passar des de l'inici de 1980 perquè la capacitat arribe al seu valor màxim, i quin és aquest valor màxim (en milers de metres cúbics).

c) Si el benefici en euros per metre cúbic de gas disminueix amb els anys segons la funció

$$g(x) = 3 - \frac{3x^2}{12100}$$

calcula quant de temps ha de passar perquè l'explotació deixe de ser rendible i quina serà la capacitat (en milers de metres cúbics) de la explotació en aquest moment.

PAU València CCSS Juny 2021 #4 (Solució: València pàg. 346)

4.5b.5 Una empresa ha estimat que els ingressos i despeses mensuals (en euros) que genera la fabricació de x unitats d'un producte venen donades per les funcions següents:

Ingressos: $I(x) = 4x^2 + 800x$ Despeses: $G(x) = 6x^2 + 460x + 672$

a) L'empresa considera rendible el producte si el benefici que hi obté és major o igual que 0. Quin és el nombre mínim d'unitats que ha de fabricar l'empresa perquè el producte siga rendible?

b) Quin és el nombre d'unitats que ha de fabricar l'empresa perquè el benefici siga màxim? Quin és el benefici obtingut en aquest cas?

c) El mes vinent s'introduirà una nova normativa que obligarà l'empresa a fabricar almenys 100 unitats d'aquest producte. Quin és el màxim benefici que podrà obtindre l'empresa després de la implantació d'aquesta normativa? Justifiqueu la vostra resposta.

PAU València CCSS Juliol 2021 #4

4.5b.6 En una empresa s'ha comprovat que els seus beneficis estan relacionats amb la seua inversió en publicitat segons la funció $B(x) = 5000 + 40x - \left(\frac{x}{10}\right)^2$

en què x és la inversió en publicitat ($x \geq 0$) i $C(x)$ és el benefici obtingut, tots dos en euros.

a) Calculeu la quantitat invertida en publicitat que produeix un benefici màxim. Quin és aquest benefici màxim?

b) Calculeu els intervals per a la inversió en publicitat en els quals els beneficis creixen o decreixen a mesura que s'inverteix en publicitat.

c) Hi ha un valor per a la inversió en publicitat a partir del qual els beneficis obtinguts serien més baixos que si no s'invertira res en publicitat? En cas afirmatiu, determineu-ho.

PAU València CCSS Juny 2022 #4 (Solució: València pàg. 378)

4.5b.7 Una màquina està productiva durant un any des de la seua compra. Se sap que el rendiment (en percentatge) que té la màquina *x* mesos després de la compra ve donat per la funció $f(x) = \frac{1}{10}(800 + 15x + 6x^2 - x^3)$ per a qualsevol x entre 0 i 12.

a) És el rendiment que té la màquina un mes després de la compra superior al rendiment que té dos mesos després de la compra?

b) Després de quants mesos després de la compra arriba la màquina al seu major rendiment?; quin és aquest rendiment màxim?

c) Al llarg de l'any, té en algun moment la màquina un rendiment inferior al 10%?

Sol: a) 82,84,6; b) x=5; c) No PAU València CCSS Juliol 2022 #4

4.5b.8 Una empresa farmacèutica llança al mercat un nou fàrmac que es distribueix en caixes de sis unitats. La relació entre el preu de cada caixa i el benefici mensual obtingut en euros ve donada per la funció $B(x) = -x^2 + 16x - 55$, on x és el preu de venda d'una caixa. Es demana:

a) Quin benefici obté quan ven cada caixa a 6 euros?

b) Entre quins valors ha de fixar el preu de venda de cada caixa per a obtindre beneficis?

c) Calcula a quin preu ha de vendre cada caixa perquè el benefici siga màxim. Quin és el benefici màxim?

d) Entre quins valors el benefici creix i entre quins valors el benefici decreix?

PAU VALÈNCIA JUNY 2020 #5

Solució en vídeo: https://youtu.be/lWM6VSGuBJI?si=Hbx803c82-GER5pT&t=3434 (Mates con Andrés)

4.6 Les llistes *Percada*.

Problemes PAU CCSS model "Percada" (que si *per cada* això, que si *per cada* allò...☺)

4.6.1b El preu d'un vol entre Barcelona i Islàndia és de 500 €. Una companyia aèria té capacitat per a 300 passatgers diaris, però hi ha una determinada època de l'any en què només ven 180 bitllets. Després de fer un estudi de mercat, la companyia s'adona que la relació entre el preu del bitllet i el nombre de passatgers és lineal, de manera que per cada 5 € de descompte en el preu del bitllet aconsegueix dos passatgers més.

a) Si anomenem x el nombre de vegades que s'aplica el descompte, escriviu la funció que dona els ingressos diaris de la companyia per la venda de bitllets en funció de x.

b) A quin preu cal vendre cada bitllet per a obtenir el màxim d'ingressos? Quins ingressos s'obtindran amb aquest preu?

PAU CAT CCSS JUNY 2023 #1 (Solució: PAUCCSS pàg. 629)

4.6.1 El cost d'elaboració d'un menú en un restaurant és de 8 €. S'ha realitzat un estudi de mercat i s'ha arribat a la conclusió que si el preu del menú és de 18 € entren a dinar al restaurant 120 clients. També s'ha conclòs que la relació entre el preu del menú i el nombre de clients és lineal, de manera que, per cada euro que augmentem el preu del menú, disminueix en 4 el nombre de clients. I a l'inrevés, per cada euro que disminuïm el preu, augmenta en 4 el nombre de clients.

a) Obteniu la funció que expressa el benefici del restaurant en funció del nombre d'euros en què augmentem o disminuïm el preu inicial del menú.

b) Trobeu en quants euros cal augmentar o disminuir el preu inicial del menú per tal que el restaurant obtingui el màxim benefici. Quin seria el preu final del menú i quin seria el benefici obtingut amb aquest preu?

AU CAT CCSS JUNY 2020 #3 (Solució: PAUCCSS pàg. 463)

4.6.2 Per a la campanya d'aquest estiu, una botiga d'esports que ven patinets elèctrics espera vendre 40 patinets a un preu de 1.000 € per patinet. Segons un estudi de mercat, la relació entre el nombre de vegades que es rebaixa el preu del patinet en 50 € i el nombre de patinets venuts és lineal, i, per cada 50 € de rebaixa en el preu de venda de cada patinet, hi haurà un increment de les vendes de 10 patinets més.

a) Escriviu la funció d'ingressos de la botiga en funció del nombre de vegades que rebaixi en 50 € el preu inicial de 1.000 € del patinet.

b) Trobeu quin ha de ser el preu del patinet per tal d'obtenir els ingressos màxims. Trobeu també el nombre de patinets que es vendran i els ingressos que s'obtindran amb aquest preu.

PAU CAT CCSS SET 2019 5.2 (Solució: PAUCCSS pàg. 438)

4.6.3 Una companyia de mòbils va presentar fa un any un telèfon intel·ligent al preu de 750 €. Recentment, un estudi de mercat ha arribat a la conclusió que, amb aquest preu, compren el telèfon 2.000 clients al mes, i que la relació entre aquestes dues variables és lineal, de manera que per cada 10 € que s'incrementa el preu del mòbil, el compren 100 clients menys, i a l'inrevés: per cada 10 € de descompte sobre el preu inicial de 750 €, el compren 100 clients més.

a) Deduïu que la funció que determina els ingressos mensuals de la companyia segons el preu del mòbil és $I(p) = -10p^2 + 9500p$.

b) Trobeu quin ha de ser el preu del mòbil per a obtenir ingressos, el preu del mòbil que dona els ingressos mensuals més elevats i el valor d'aquests ingressos màxims. (a 475; b 2.256.250€)

PAU CAT CCSS JUNY 2018 1.5 (Solució: PAUCCSS pàg. 412)

4.6.4 Un gimnàs cobra una quota de 42 euros mensuals i té 2.000 usuaris. Un estudi de mercat afirma que per cada euro que s'apuja (o s'abaixa) la quota es perden (o es guanyen) 20 usuaris.

a) Expresseu el nombre d'usuaris del gimnàs en funció de la quota, tenint en compte que la relació entre les dues variables és lineal. Per a quin valor de la quota el gimnàs es quedaria sense usuaris?

b) Determineu en quin preu cal fixar la quota per a obtenir un benefici mensual màxim. Quin seria aquest benefici i quants usuaris tindria el gimnàs en aquest cas?

PAU CAT CCSS SET 2017 2.2 (Solució: PAUCCSS pàg. 400)

4.6.5 Un hotel cobra 45 € per habitació i nit. Per aquest preu, té ocupades 165 habitacions cada nit. S'ha fet un estudi a partir del qual s'ha deduït que, per cada euro que s'apugi el preu de l'habitació, se n'ocuparà una menys cada nit.
a) Si x és la quantitat que s'apuja el preu de l'habitació per sobre dels 45 € inicials, determineu la funció que dona els ingressos diaris de l'hotel segons el valor de x. Indiqueu també els ingressos màxims que pot obtenir l'hotel.
b) Indiqueu entre quins preus obtindrà ingressos l'hotel. PAU CAT CCSS SET 2016 5.2

4.6.6 Una fàbrica de mobles de cuina ven 1.000 unitats mensuals d'un model d'armari a 200 € per unitat. Per tal de reduir-ne l'estoc, fa una oferta als compradors i estima que, per cada euro de reducció del preu, les vendes mensuals del producte s'incrementaran en 100 unitats.
a) Quantes unitats caldrà vendre per a obtenir el màxim d'ingressos mensuals?
b) A quant pujaran aquests ingressos? PAU CAT CCSS JUNY 2016 3.1

4.6.7 Un arbre té un volum de 30 m^3 i, per la qualitat de la seva fusta, es ven a 50 € per metre cúbic. Cada any l'arbre augmenta el volum en 5 m^3. Alhora, la qualitat de la fusta de l'arbre disminueix, i també el preu, que cada any és un euro per metre cúbic més barat. D'aquí a quants anys aconseguirem el màxim d'ingressos per la venda de la fusta de l'arbre? Quins seran aquests ingressos? PAU CAT CCSS JUNY 2016 2.1

4.6.8 Els dos darrers anys, el valor de les accions en borsa d'una empresa ha baixat un 20% anual.
a) Aquest any, en canvi, les accions han pujat un 30 %. Quin és el percentatge global de pèrdua en aquests tres anys?
b) Quin hauria de ser el percentatge de guanys d'aquest tercer any si el balanç global dels tres anys acaba sent equilibrat, és a dir, sense pèrdues ni guanys? PAU CAT CCSS SET 2013 1.3

4.6.9 Una empresa agrícola ha recollit un total de 40 tones de fruita que produeixen un benefici de 0,80 €/kg. Cada setmana que passa es produeix una pèrdua de 400 kg de fruita, però el benefici augmenta en un cèntim per cada kilogram.
a) Quin benefici s'obté si es ven la fruita al cap de nou setmanes? Quin percentatge de fruita s'ha hagut de llençar?
b) Quina setmana de venda serà la que obté un benefici màxim?
PAU CAT CCSS JUNY 2013 3.4

4.6.10 En un hort hi ha plantades 50 pomeres. Cada arbre produeix 800 pomes. Per cada arbre addicional que hi plantem, la producció de cada arbre es redueix en 10 pomes. Quants arbres més ens cal plantar per a obtenir la producció més alta possible? Quina és aquesta producció?
PAU CAT CCSS JUNY 2013 4.3

4.6.11 El preu de cost d'una unitat d'un cert producte és de 120€. Si es ven a 150€ la unitat, el compren 500 clients. Per cada 10€ d'augment en el preu, les vendes disminueixen en 20 clients.
a) Trobeu una fórmula mitjançant la qual obtinguem els beneficis.
b) Calculeu a quin preu p per unitat hem de vendre el producte per a obtenir un benefici màxim. (110)
c) En el cas anterior, trobeu el nombre d'unitats que es venen i calculeu el benefici màxim.
PAU CAT CCSS JUNY 2009 4.6

4.6.12 Un equip de treballadors ha de fer la collita d'un camp de pomeres a partir de l'1 d'octubre i només pot treballar durant un dia. Si la collita es fa l'1 d'octubre, es colliran 60 tones i el preu serà de 2000 €/tona. Sabem que a partir d'aquest dia, la quantitat que es pot collir augmenta en una tona cada dia, però el preu de la tona disminueix en 20 €/dia.
a) Determineu la fórmula que expressa els ingressos que s'obtenen en funció del nombre de dies que es deixen passar des de l'1 d'octubre per fer la collita.
b) Trobeu quants dies han de passar perquè els ingressos per la collita siguin màxims.
c) Digueu quin és el valor màxim dels ingressos per la collita.
d) Trobeu quants dies han de passar perquè els ingressos per la collita siguin els mateixos que si es fes el dia 1 d'octubre.

PAU CAT CCSS JUNY 2008 2.6

4.6.13 Si el preu de l'entrada d'un cinema és de 6€, hi van 320 persones. El propietari sap per experiència que per cada augment de 0,25€ en el preu de l'entrada hi van 10 espectadors menys. Trobeu:

a) la funció que determina el nombre d'espectadors en funció del preu de l'entrada.
b) la funció que determina els ingressos del cinema en funció del preu de l'entrada.
c) el preu de l'entrada per tal que els ingressos del propietari siguin màxims.
d) el nombre d'espectadors que aniran al cinema quan el preu sigui el que correspon als ingressos màxims i aquests ingressos màxims.

PAU CAT CCSS JUNY 2006 1.5

4.6.14 Si una joguina es ven a 130€, la compren 1000 persones. Per cada euro que augmenta aquest preu, disminueix en 50, respectivament, el nombre de compradors.

a) Feu un gràfic del nombre de joguines que es venen en funció del preu de venda i doneu la fórmula que l'expressa.
b) El preu de cost d'una joguina és de 80 €. Calculeu el preu p, que dóna un benefici total màxim.
c) Trobeu el nombre de joguines que es venen si el preu és p i calculeu-ne el benefici màxim.

PAU CAT CCSS SET 2005 3.5

4.6.15 El preu de cost d'una joguina és de 80 €. Venuda a 130 € la compren 1000 persones. Per cada € que augmenta o disminueix aquest preu, el nombre de compradors disminueix o augmenta, respectivament, en 60.

a) A quin preu s'ha de vendre la joguina per obtenir un benefici màxim?
b) Calculeu també el benefici màxim i el nombre de compradors corresponent.

PAU CAT CCSS JUNY 2002 3.5

Més problemes model “Percada”.

4.6.16 Si una joguina es ven a 130 €, la compren 1000 persones. Per cada euro que augmenta aquest preu, disminueix en 50, respectivament, el nombre de compradors. Calculeu el preu que dóna un benefici total màxim, el nombre de joguines venudes en eixe cas i eixe benefici màxim.

4.6.17 Una agencia inmobiliaria maneja 40 apartamentos. Cuando el alquiler es de 270 dólares mensuales, todos están ocupados, mientras que por cada 20 euros de aumento se produce, en término medio, una vacante. Cada apartamento ocupado requiere un promedio de 10 euros mensuales de conservación y servicios.
¿Qué alquiler debe cobrarse para obtener el beneficio máximo?

4.6.18 Una huerta tiene actualmente 24 árboles, que producen 600 frutos cada uno. Se calcula que, por cada árbol adicional plantado, la producción de cada árbol disminuye en 15 frutos.
a) ¿Cuál debe ser el número total de árboles que debe tener la huerta para que la producción sea máxima?
b) ¿Cuál será esa producción?

4.6.19 Una agencia organiza un viaje para el que ya se han inscrito 25 personas. Ha contratado un avión por 3.000 euros y además debe asumir unos gastos por persona de 450 euros. Cada viajero debe pagar 1.500 euros. La agencia propone la siguiente oferta: por cada nuevo viajero inscrito, rebajará en 6 euros el precio del viaje. ¿Cuál será el número óptimo de viajeros que maximice los beneficios? ¿A cuánto ascienden esos máximos beneficios? 100 ; 57.999

PAU CANTABRIA JUNIO 2009

4.6.20 Durante el anterior periodo de rebajas, una tienda ofreció un artículo a 50 euros la unidad y las ventas fueron de 20 unidades. Un estudio revela que por cada euro que disminuya el precio en las próximas rebajas, conseguirá vender 4 unidades más. Por otro lado la tienda ha asumido un coste de 35 euros por cada unidad del producto. ¿Qué precio de venta por unidad debe fijar para maximizar los beneficios obtenidos durante el nuevo periodo de rebajas?

PAU Junio 2017

4.6.21 La confitería de una pequeña localidad elabora un dulce típico, una tarta de hojaldre y crema, para venderlo durante las fiestas del pueblo. En las fiestas del año anterior fijó el precio de venta en 15 € la unidad, vendiendo así 20 tartas en total. Este año quiere bajar el precio y calcula que por cada euro menos, venderá 4 tartas más. Por otro lado, la elaboración de cada tarta le supone un gasto de 6 euros. ¿A qué precio debe vender cada tarta para maximizar los beneficios obtenidos con este dulce durante las fiestas? ¿Qué beneficios se alcanzan? 13

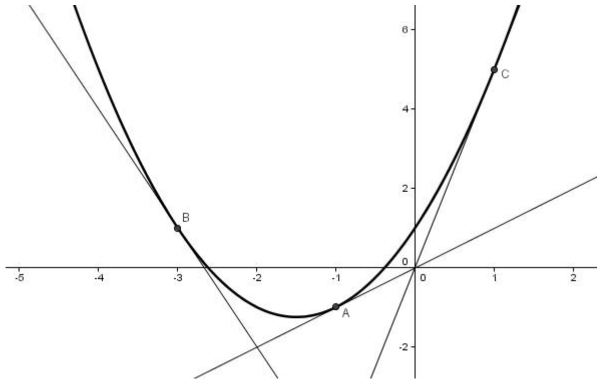
PAU Septiembre 2012

4.6.22 Un heladero ha comprobado que, a un precio de 50 céntimos de euro la unidad, vende una media de 200 helados diarios. Por cada céntimo que aumenta el precio, vende dos helados menos al día. Si el coste por unidad es de 40 céntimos,
a) ¿A qué precio de venta es máximo el beneficio diario que obtiene el heladero?
b) ¿Cuál será ese beneficio? (45 ; 60,5)

4.6.23 La cafeteria de l’institut ofereix la bossa de gusanitos a 30 cèntims d’euro a una clientela de 120 alumnes. Observa que, per cada cèntim d’euro que augmenta aquest preu, perd tres clients.
a) Quin és el preu òptim de la bossa de gusanitos per obtenir el màxim benefici?
b) Quin serà el benefici màxim?

4.7 Determinació de recta tangent amb funcions polinòmiques.

4.7.1 Dona da la funció $f(x)=x^2+3x+1$, troba l'equació de la recta tangent en els punts d'abscissa x = -1 , x = -3 , x = 1



4.7.2 Determina la recta tangent a la funció en el punt $x=p$ indicat.

a) $f(x)=3x-1$ $p=1$ b) $f(x)=x^2$ $p=3$

c) $f(x)=x^3$ $p=2$ d) $f(x)=x/2$ $p=3$

e) $f(x)=2x^2-5$ $p=2$ f) $f(x)=\dfrac{x^2}{4}$ $p=1$

g) $f(x)=x^3-3x^2+2$ $p=3$ h) $f(x)=x^3-2x^2+2$ $p=2$

i) $f(x)=x^3+8$ $p=-2$ j) $f(x)=x^4-8x^2+12x$ $p=1$

k) $f(x)=(3x-x^2)(3-x-x^2)$ $p=1$

4.7.3 Considereu la funció $f(x)=\dfrac{x^3}{30}-15x^2+2500$.

a) Calculeu l'equació de la recta tangent en el punt d'abscissa x = 0.

b) En quin punt de la corba és mínim el pendent de la recta tangent? Quin és el valor del pendent mínim?

PAU CAT CCSS JUNY 2004 1.5

4.7.4 Calculeu les equacions de les dues rectes del pla que passen pel punt P = (1, –1) i que són tangents a la corba d'equació $y=(x-1)^2$.

PAU CAT TEC JUNY 2003 2.1

4.7.5 Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x)=3x^2+5x+1$ en el punt d'abscissa x = 2.

PAU CAT CCSS JUNY 2002 2.1

4.7.6 Trobeu l'equació de la recta tangent a la funció $f(x)=x^2-4x+3$ en els punts en què la paràbola talla l'eix horitzontal.

4.7.7 Exercici del Youtube Determina la recta tangent a la funció $f(x)=x^2-4x+1$ en el punt $(3,-2)$ Solució: https://youtu.be/OlLawWyvdLk

4.8 Determinació del punt de tangència amb funcions polinòmiques.

De vegades ens donen la recta tangent i necessitem obtenir el punt de tangència. En aquests casos la propietat fonamental de la recta tangent: $a = f'(x)$
esdevé <u>una equació</u> que hem de resoldre.

4.8.1 Exercici resolt. Donada la paràbola $f(x) = 2 - x^2$

a) Determineu la recta tangent a la seva gràfica al punt $x = 2$.

b) Determineu la recta tangent a la seva gràfica que sigui paral·lela a la recta d'equació $2x + y = 4$.

Solució: a) $f(x) = 2 - x^2 \Rightarrow f'(x) = -2x \Rightarrow \begin{cases} a = f'(2) = -4 \\ b = f(2) - a \cdot 2 = -2 - (-4) \cdot 2 = 6 \end{cases}$

La recta buscada és $y = -4x + 6$

b) $a = f'(x) = -2 \Leftrightarrow -2x = -2 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = f'(1) = -2 \\ b = f(1) - a \cdot 1 = 1 - (-2) \cdot 1 = 3 \end{cases}$

La recta buscada és $y = -2x + 3$

Exercicis

4.8.2 Trobeu els punts de la funció $f(x) = x^3 + x^2 + x$ en què la recta tangent és paral·lela a la recta $y = 2x + 5$.

4.8.3 Trobeu l'equació de les rectes tangents a la funció $f(x) = x^3 - 3x^2$ que són paral·leles a la recta $9x - y + 3 = 0$.

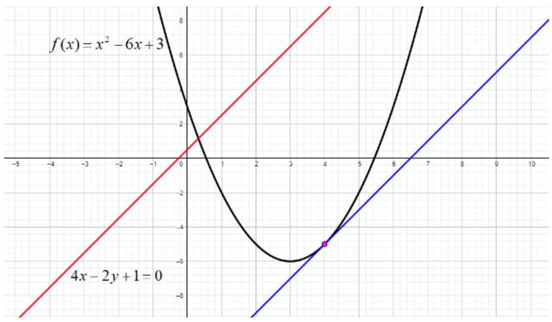
4.8.4 Trobeu els valors d'x on les rectes tangents a les funcions $f(x) = x^2 - x + 3$ i $g(x) = x^3 - x^2$ són paral·leles. Doneu les seves equacions.

4.8.5 Youtube Determineu l'equació de la recta tangent a la funció $f(x) = x^2 - 6x + 3$ que és paral·lela a la recta $4x - 2y + 1 = 0$. Solució: https://youtu.be/VmQ03FOyy0w

4.8.6 Donada la funció $f(x) = x^2 - 10x + 9$, determina el punt en el què la recta tangent és paral·lela a l'eix d'abscisses.

4.8.7 Exercici del Youtube Determina l'equació de la recta tangent a la funció $f(x) = x^2 - 6x + 3$ que és paral·lela a la recta $4x - 2y + 1 = 0$

Solució: https://youtu.be/VmQ03FOyy0w (Mates con Andrés)



4.8.8 Considereu la funció $f(x) = x^3$.

a) Calculeu en quin punt del tercer quadrant la recta tangent a $y = f(x)$ és paral·lela a la recta $3x - y = 4$. Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica en aquest punt i feu un dibuix aproximat de la gràfica de la funció i les dues rectes.

~~b) Calculeu l'àrea de la regió delimitada per $y = f(x)$ i la recta $y = 3x + 2$.~~

PAU CAT TEC JUNY 2020 #6 (Solució: PAUTEC pàg. 581)

4.8.9 Sigui la funció $f(x) = x^3 - x^2$.

a) Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica i que és paral·lela a la recta d'equació x + 3y = 0.

b) Calculeu, si n'hi ha, els punts de la gràfica en què la funció presenta un màxim o mínim relatiu o un punt d'inflexió.

PAU CAT TEC JUNY 2018 1.3

4.8.10 Donades la recta $y = 3x + b$ i la paràbola $y = x^2$,
a) Calculeu l'abscissa del punt on la recta tangent a la paràbola és paral·lela a la recta donada.
b) Calculeu el valor del paràmetre b perquè la recta sigui tangent a la paràbola.
PAU CAT TEC JUNY 2012 3.2

4.8.11 Sigui $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x + 1$.
Donades les rectes $r_1 : y = x + 2$ i $r_2 : y = 7x - 2$:
a) Expliqueu, raonadament, si alguna de les dues rectes pot ser tangent a la corba $y = f(x)$ en algun punt.
b) En cas que alguna d'elles ho sigui, trobeu el punt de tangència.
PAU CAT TEC SET 2009 1.3

4.8.12 Sigui la paràbola $y = 2x^2 + x + 1$ i sigui A el punt de la paràbola d'abscissa 0.
a) Trobeu l'equació de la recta tangent a la paràbola en el punt A.
b) En quin punt de la paràbola la recta tangent és perpendicular a la recta que heu trobat en l'apartat anterior?
PAU CAT TEC JUNY 2005 4.4

4.8.13 a) Calculeu els punts del gràfic de la corba $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$ on la recta tangent té pendent $-1/3$.
b) Determineu la recta tangent en aquests punts.
PAU CAT TEC JUNY 2005

4.8.14 La corba d'equació y = $3x^2$ – 1 i la recta y = 4x + b són tangents.
a) Determineu el punt de tangència.
b) Determineu b.
PAU CAT CCSS SET 2005 3.3

4.8.15 a) Calculeu els punts del gràfic de la corba $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$ on la recta tangent té pendent $-1/3$.
b) Determineu la recta tangent en aquests punts. PAU CAT CCSS JUNY 2005 4.3

4.8.16 Considereu la funció $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$.
a) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de f(x) en el punt d'abscissa x=3.
b) Existeix alguna altra recta tangent a la gràfica de f(x) que sigui paral·lela a la que heu trobat? Raoneu la resposta i, en cas afirmatiu, trobeu-ne l'equació. PAU CAT TEC JUNY 2004 3.1

4.8.17 Calculeu el punt de la corba $y = 2 + x - x^2$ en què la tangent és paral·lela a la recta y = x .
PAU CAT TEC SET 2003 3.2

4.8.18 Esbrineu si les gràfiques de la funció $f(x) = x^2 - 2x + 2$ i de la recta y = 2x – 2 són tangents en algun punt. En cas que ho siguin, determineu aquest punt. Hi ha algun altre punt d'intersecció entre la recta i la gràfica de la funció?
PAU CAT TEC SET 2003

4.8.19 Esbrineu si les gràfiques de la funció $f(x) = x^2 - 2x + 2$ i de la recta $y = 2x - 2$ són tangents en algun punt. En cas que ho siguin, determineu aquest punt. Hi ha algun altre punt d'intersecció entre la recta i la gràfica de la funció?
PAU CAT CCSS SET 2003 3.3

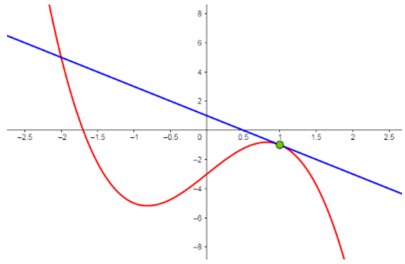
4.8.20 Determineu els punts de la gràfica de $f(x) = x^4 + 5x$ on la recta tangent és paral·lela a la bisectriu del primer quadrant. Calculeu l'equació d'aquestes rectes tangents.
PAU CAT TEC JUNY 2000 3.2

4.8.21 Exercici del Youtube Determina l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$ que és paral·lela a la recta $8x - y + 7 = 0$
Solució: https://youtu.be/Vq2e8CBwtRo (Ronny Online)

4.9 Determinació de funcions polinòmiques amb recta tangent.

4.9.1 Exemple resolt.

Determina els paràmetres a i b de la funció $f(x)=ax^3+bx-3$ de forma que tingui associada la recta tangent $y=-2x+1$ en el punt d'abscissa $x=1$.



Solució:

$f(x)=ax^3+bx-3 \Rightarrow f'(x)=3ax^2+b$

$$y=-2x+1 \Rightarrow \begin{cases} -2=f'(1)=3a\cdot 1^2+b=3a+b \\ 1=f(1)-A\cdot 1 \Rightarrow 1=a1^3+b\cdot 1-3-(-2)\cdot 1=a+b-1 \end{cases}$$

Resolem el sistema: $\begin{cases} -2=3a+b \\ 1=a+b-1 \end{cases} \Rightarrow a=-2\,,\, b=4 \Rightarrow f(x)=-2x^3+4x-3$

4.9.2 Exemple resolt. Donada la funció $f(x)=a(2x-1)^2+bx$, determineu a i b de forma que la gràfica d'aquesta funció passi pel punt de coordenades (1 , 3) i tingui un extrem relatiu al punt d'abscissa $x=4$.

Solució:

$3=f(1)=a(2\cdot 1-1)^2+b\cdot 1 \Rightarrow a+b=3$

$f(x)=a(2x-1)^2+bx \Rightarrow f'(x)=2a(2x-1)\cdot 2+b=4a(x-1)+b$

$0=f'(4)=4a(2\cdot 4-1)+b=4a\cdot 7+b=28a+b \Rightarrow 28a+b=0$

Hem de resoldre el sistema

$\begin{cases} a+b=3 \\ 28a+b=0 \end{cases} \Rightarrow b=-28a \Rightarrow a-28a=3 \Rightarrow -27a=3 \Rightarrow$

$\Rightarrow a=\dfrac{3}{-27}=\dfrac{-1}{9} \Rightarrow b=-28\left(\dfrac{-1}{9}\right)=\dfrac{28}{9}$

4.9.3 Determineu el polinomi $P(x)=x^3+ax^2+bx+c$ de forma que es verifiquin les condicions següents:

a) El polinomi té extrems relatius als punts $x=\dfrac{-1}{3}$, $x=-1$.

b) La recta tangent a la gràfica de $P(x)$ al punt $(0,P(0))$ és $y=x+3$.

4.9.4 Determina a,b,c si sabem que la funció $f(x)=ax^2+bx+c$ passa per (0,3), (2,1) i en aquest últim punt la seva recta tangent té pendent 3.

4.9.5 Youtube Determina els paràmetres a i b de la funció $f(x)=ax^2+bx+1$ de forma que tingui associada la recta tangent $y=3x+10$ en el punt (1 , 2).

Solució: https://youtu.be/J1vP_SDYNJI

4.9.6 Resoleu les dues qüestions següents:

a) Sigui $f(x)=2x^3+mx^2+nx+p$ una funció que té dos extrems relatius en x = –3 i en x = 1 i que passa pel punt (3, 4). Calculeu els valors de m, n i p.

b) Calculeu l'equació de la recta tangent a la funció $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$ en x = –3.

PAU CAT TEC JUNY 2021 S5 #6 (Solució: PAUTEC pàg. 669)

4.9.7 Considereu la funció $f(x)=px^3-4x^2+7px-18$.

a) Calculeu quin ha de ser el valor del paràmetre p perquè les rectes tangents a la corba en els punts d'abscisses x = 1 i x = 3 siguin paral·leles.

b) Escriviu l'equació de la recta tangent al punt d'abscissa x = 3 per al valor de $p=2$.

PAU CAT CCSS SET 2021 S1 #6 (Solució: PAUCCSS pàg. 563)

4.9.8 Considerem les funcions $f(x) = x^2 + ax + b$ i $g(x) = -x^2 + c$

a) Calculeu els valors dels paràmetres a, b i c per tal que les gràfiques de $f(x)$ i $g(x)$ es tallin en els punts (–1, 3) i (3, –5).

b) Per a c = 4, trobeu l'equació de la recta tangent a $g(x)$ en el punt d'abscissa $x = -1$.

PAU CAT CCSS SET 2020 5.4 (Solució:PAUCCSS pàg. 489)

4.9.9 Considereu la funció polinòmica $f(x) = x^3 - ax^2 + bx + c$

a) Calculeu els valors dels paràmetres a, b i c, sabent que la funció té un extrem relatiu en el punt d'abscissa x = 1 i que la recta tangent a la gràfica de la funció en el punt d'abscissa x = 0 és la recta y = x + 3.

b) Per als valors a = 2, b = 1 i c = 3, calculeu les abscisses dels extrems relatius de la funció i classifiqueu-los.

PAU CAT TEC SET 2018 3.1

4.9.10 Considereu la funció $f(x) = -x^2 + bx + c$, amb b i c nombres reals.

a) Trobeu b i c de manera que la gràfica de la funció passi pel punt (–1, 0) i tingui un extrem local en el punt d'abscissa x = 3. Raoneu de quin tipus d'extrem relatiu es tracta.

b) Per al cas b = 3 i c = 2, trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica que és paral·lela a la recta y = 5x – 2.

PAU CAT CCSS JUNY 2017 1.6 (Solució: PAUCCSS pàg. 392)

4.9.11 Considerem una funció f(x) tal que la seva primera derivada és $f'(x) = x^2 + bx - 3$, en què b és un paràmetre real.

a) Determineu el valor de b perquè f(x) tingui un extrem relatiu en x = –3 i raoneu si es tracta d'un màxim o d'un mínim.

b) Per a b = –8, trobeu l'equació de la recta tangent a $f(x)$ en el punt (0, 2).

PAU CAT CCSS SET 2017 2.3

4.9.12 La gràfica de la derivada f' de la funció f és una paràbola que talla l'eix d'abscisses en els punts (5,0) i (1,0), i té el vèrtex en el punt (3, –4).

a) Expliqueu raonadament en quins intervals la funció f és creixent i en quins intervals és decreixent. Indiqueu-ne els extrems relatius i classifiqueu-los.

b) Sabem que $f(3) = 2$. Determineu l'equació de la recta tangent a la funció f en el punt (3,2).

PAU CAT CCSS JUNY 2014 3.2

4.9.13 Sigui $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Sabem que la gràfica d'aquesta funció és tangent a la recta r: y = x + 3 en el punt d'abscissa x = –1, i que en el punt d'abscissa x = 1 la recta tangent és paral·lela a la recta r. Calculeu el valor dels paràmetres a, b i c.

PAU CAT TEC JUNY 2013 3.6

4.9.14 Determineu els valors dels paràmetres a , b i c que fan que les corbes d'equació $f(x) = x^3 + ax + b$ i $g(x) = x^3 + cx^2 - 2$ tinguin la mateixa recta tangent en el punt (1, 1).

PAU CAT CCSS JUNY 2013 4.6

4.9.15 Considerem les funcions $f(x) = (x - a)^3$ i $g(x) = -x^2 + bx + c$.

a) Determineu els valors dels paràmetres que fan que les dues corbes tinguin la mateixa tangent en el punt (2, 1).

b) En el cas a= 1, feu una gràfica aproximada de la funció f.

PAU CAT CCSS SET 2012 4.1

4.9.16 Donades la recta $y = ax + 1$ i la paràbola $y = 3x - x^2$,

a) Calculeu els valors del paràmetre a perquè siguin tangents.

b) Calculeu els punts de tangència.

PAU CAT TEC SET 2012 4.6

4.9.17 Sabem que la funció $f(x) = ax^3 + 3x^2 - bx - \frac{1}{3}$ passa pel punt (1, 0), i que la recta tangent a la gràfica de la funció en aquest punt és paral·lela a la recta $12x - 2y = 3$.

a) Determineu els valors dels paràmetres a i b.

b) Per a a=1 i b=9, determineu, si n'hi ha, les abscisses dels extrems possibles (màxims o mínims) de la funció, i classifiqueu-los.

PAU CAT CCSS SET 2011 2.6

4.9.18 Calculeu els paràmetres a, b i c de la funció $f(x) = ax^2 + bx + c$, sabent que la recta 5x – y – 2 = 0 és tangent a la corba f(x) en el punt d'abscissa x= 0 i que el valor mínim absolut que pren la funció és –49/12.

PAU CAT CCSS SET 2009 1.3

4.9.19 Considereu la funció $f(x) = ax^2 + x + b \ (a, b \in IR)$. Trobeu els valors de a i b que fan que la recta $y = 2x + 1$ sigui tangent a la gràfica de f quan x = 1.

PAU CAT TEC SET 2008 4.1

4.9.20 Calculeu els valors del paràmetre a, $a \neq 0$, que fan que les tangents a la corba d'equació $y = ax^4 + 2ax^3 - ax + 1512$ en els punts d'inflexió siguin perpendiculars.

PAU CAT TEC JUNY 2007 2.3

4.9.21 Considereu la funció $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 7$

a) Calculeu c sabent que la seva recta tangent en el punt d'abscissa x = 0 és horitzontal.

b) Per al valor de c trobat a l'apartat anterior, calculeu a i b sabent que aquesta funció té un extrem relatiu en el punt d'abscissa x = -2 i que talla l'eix OX quan x = 1.

c) Per als valors obtinguts als altres apartats, calculeu els intervals on la funció creix i decreix, els seus extrems relatius i feu una representació gràfica aproximada.

PAU CAT TEC 2006 1.6

4.9.22 Calculeu els valors de a tals que les tangents a la gràfica de la funció $f(x) = ax^3 + 2x^2 + 3$ en els punts d'abscisses x = 1 i x = –1 siguin perpendiculars entre si.

PAU CAT TEC JUNY 2000 1.1

4.9.23 Sigui $f(x) = x^3 + ax^2 + 3x + 5b$. Trobeu els valors de a i b de manera que la gràfica de f(x) tingui la tangent horitzontal per a x=1 i, a més, la corba passi pel punt (-1,-8) .

PAU CAT TEC JUNY 1998 6.2

4.9.24 Determina a , b i c de la funció $f(x) = ax^2 + bx + c$ de forma que

- Tingui un extrem relatiu en $x = -3$
- La recta tangent en $x = 0$ és $y = 6x + 8$

Solució: https://youtu.be/JPRbx_zX8L0 (Unicoos)

4.9.25 Problem-solving. La recta $y = ax + 16$ talla la gràfica de $y = x^3$ en dos punts diferents. Determina el valor de a.

SMT 2022 Calculus Test #2

4.9.26 Youtube Determina els valors a i b de la funció $f(x)=ax^3-bx^2-x+2$ si sabem que té un mínim relatiu en x = 2 i un punt d'inflexió en x =1/ 3.

4.9.27 Exercici del Youtube Determina el valor dels coeficients a, b i c de forma que la funció

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

passi pel punt $A = (1, 0)$ i tingui un punt d'inflexió en $B = (3, 2)$

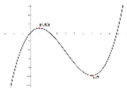
4.9.28 Trobeu el valor de a i b de forma que la funció $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ tingui un punt d'inflexió en $(0, 1)$ i la pendent de la recta tangent en aquest punt valgui 1.

4.9.29 La funció $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ té un punt d'inflexió en $(1, 0)$, en aquest punt la seva recta tangent és $y = 3x + 3$, i presenta un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x = 0$. Determina a, b, c i d.

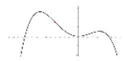
4.10 Funcions polinòmiques amb paràmetres i sistemes 3×3.

En aquesta secció presentem problemes de derivació que es resolen amb sistemes lineals 3×3, una forma de repassar el mètode de triangularització Gauss-Jordan que es desenvolupa en el Tema 1 del llibre d'Àlgebra Lineal

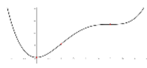
4.10.1 Determina a, b i c de la funció $f(x)=ax^3+bx^2+cx$, si sabem que té un màxim en $(1,10)$ i un mínim en $x=7$.



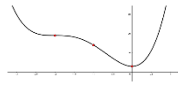
4.10.2 Determina a, b i c de la funció $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2$, si sabem que la seva gràfica passa pel punt $(1,1)$ i té un punt d'inflexió en $(-1,3)$



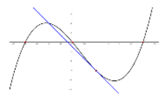
4.10.3 Determina a, b i c de la funció $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2$, si sabem que té un mínim en $x=0$, punts d'inflexió en $x=1$ i $x=3$ i, a més a més, $f(1)=11$.



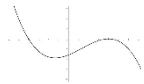
4.10.4 Determina a, b i c de la funció $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+3$, si sabem que té un mínim en $x=0$, un punt d'inflexió en $(-2,19)$, i passa pel punt $(-1,14)$.



4.10.5 Determina a, b i c de la funció $f(x)=ax^3+bx^2+cx$, si sabem que talla l´eix X en els punts $x=0$, $x=3$ i $x=-2$, i la seva recta tangent en $x=1$ és $y=-5x-1$.

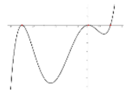


4.10.6 Determina a, b i c de la funció $f(x)=ax^3+bx^2+cx-8$, si sabem que té arrels en $x=-2$ i $x=2$ i presenta un mínim relatiu en aquest últim punt.

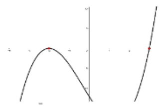


4.10.7 Determina a, b i c de la funció $f(x)=ax^3+bx^2+cx$, si sabem que la seva gràfica té un punt d'inflexió $x=1$, un màxim $x=-6$ i un mínim en $x=8$.

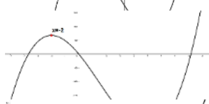
4.10.8 Determina a, b i c de la funció $f(x)=x^5+ax^4+bx^3+cx^2$, si sabem que la seva gràfica té un màxim relatiu en $(-3,0)$ i en $(0,0)$ i a més a més també talla l'eix X en $x=1$.



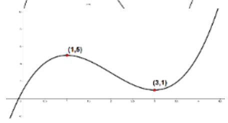
4.10.9 Determina a, b i c de la funció $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, si sabem que la seva gràfica té un extrem relatiu en $(-2,0)$ i talla l'eix X en $x=3$.



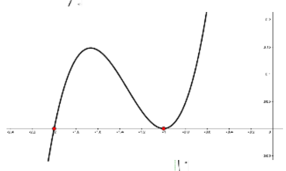
4.10.10 Determina a, b i c de la funció $f(x)=ax^3+bx^2+cx$, si sabem que la seva gràfica té un màxim relatiu en $x=-2$ i un mínim relatiu en $x=5$



4.10.11 Determina a, b i c de la funció $f(x)=ax^3+bx^2+cx+1$, si sabem que la seva gràfica té un mínim en $(3,1)$ i un màxim en $(1,5)$.

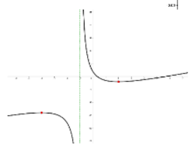


4.10.12 Determina els valors d'a,b i c en la funció $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ si sabem que $x=-2$ i $x=-1$ són arrels (punts de tall amb l'eix X) i la funció té un mínim en aquest últim punt.



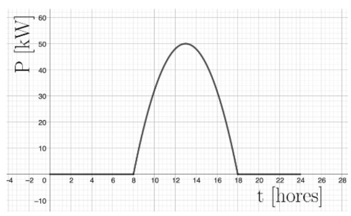
4.10.13 Exercici resolt pas a pas

Determina a, b i c de la funció $f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{x+1}$, si sabem que té un mínim en $(2,-2)$ i passa pel punt $(-4,-14)$.



4.10.14 La potència generada per una placa solar, P (mesurada en kW), depèn del temps transcorregut, t (mesurat en hores), segons l'expressió següent:

$$P(t)=\begin{cases}0 & 0\le t<8\\ at^2+bt+c & 8\le t<18\\ 0 & 18<t\le 24\end{cases}$$ i té associada la següent gràfica:



A més a més, sabem s'assoleix una potència màxima de 50 kW exactament a les 13 hores. Determina els valors d'a, b i c.

5 Derivació amb funcions racionals.

5.1 Derivada de funcions racionals.

- **Derivada del producte** de funcions: $f(x) = g(x) \cdot h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$
- **Derivada d'una potència** d'una funció: $f(x) = g(x)^n \Rightarrow f'(x) = ng(x)^{n-1} \cdot g'(x)$
- **Derivada del quocient** de funcions: $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{h(x)^2}$

Exercicis:

5.1.1 Calcula $f'(x)$

a) $f(x) = \dfrac{4x+3}{2x-1}$ b) $f(x) = \dfrac{2x+8}{x+5}$ c) $f(x) = \dfrac{1}{7x+1}$

d) $f(x) = \dfrac{x+5}{x-5}$ e) $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2}{x^2}$ f) $f(x) = \dfrac{1}{3x} + \dfrac{x}{3}$

g) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ h) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-4}$ i) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-4}$

5.1.2 Exercicis del Youtube

a) Determina i simplifica la derivada de la funció $f(x) = \frac{3x^2+5}{2x^3}$ Solució: https://youtu.be/HUq8qmH68x8

b) Determina i simplifica la derivada de la funció $f(x) = \frac{3x^2-4x}{5x^2-3}$ Solució: https://youtu.be/_Hrx6MM9Qo4

c) Determina (i simplifica) les 2 primeres derivades de la funció $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

Solució: https://youtu.be/I0f3629NjmI

5.1.3 Calcula la derivada de les següents funcions, i resol les equacions $f(x) = 0$ i $f'(x) = 0$. (Totes les funcions tenen una desigualtat evitable, un punt de tall amb l'eix X i dos extrems relatius, tots enters)

a) $f(x) = \frac{x^2-x-12}{x^3-3x^2-6x+8}$ b) $f(x) = \frac{x^2-9}{x^3+2x^2-5x-6}$

c) $f(x) = \frac{x^2-x}{x^3+3x^2}$ d) $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x^3-6x^2+9x}$

e) $f(x) = \frac{x^2-16}{x^3+x^2-12x}$ f) $f(x) = \frac{x^2+x}{x^3-4x^2-x+4}$

g) $f(x) = \frac{x^2-4x}{x^3-3x^2}$ h) $f(x) = \frac{x^2}{x^3+5x^2+4x}$

5.1.4 Calcula la derivada de les següents funcions, i resol les equacions $f(x) = 0$ i $f'(x) = 0$. (Totes les funcions tenen una desigualtat evitable, dos punts de tall amb l'eix X i dos extrems relatius, tots enters)

a) $f(x) = \frac{x^3+10x^2+29x+20}{x^3-21x+20}$ b) $f(x) = \frac{x^3+2x^2-8x}{x^3-8x^2+17x-10}$

c) $f(x) = \frac{x^3-9x^2+18x}{x^3+x^2-2x}$ d) $f(x) = \frac{x^3-8x^2+12x}{x^3+2x^2-3x}$

5.1.5 Totes aquestes funcions tenen:

a) Una discontinuïtat evitable. b) Dos punts de tall amb l'eix X.

c) Dues asímptotes verticals. d) Dos extrems relatius (màxims o mínims locals) i tots aquests valors són nombres enters. Determina aquests valors.

a) $f(x) = \frac{x^3+4x^2-21x}{x^3+5x^2-6x}$ b) $f(x) = \frac{x^3-5x^2-12x+36}{x^3-3x^2-4x+12}$

c) $f(x) = \frac{x^3+x^2-4x-4}{x^3+11x^2+31x+21}$ d) $f(x) = \frac{x^3-21x-20}{x^3+2x^2-5x-6}$

e) $f(x) = \frac{x^3-7x^2+14x-8}{x^3+3x^2-6x-8}$

5.1.6 Exercici Youtube Determina la derivada de la funció $f(x) = \frac{x^2}{3x-1}$ Sol: $y' = \frac{3x^2-2x}{(3x-1)^2}$

5.2 Estudi de funcions racionals (només primera derivada).

5.2.1 Representa les següents funcions racionals (sense fer servir la segona derivada):

a) $f(x)=\frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$ b) $f(x)=\frac{x^4+3}{x}$ c) $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$

d) $f(x)=\frac{-4x}{(x^2+1)^2}$ e) $f(x)=\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$ f) $f(x)=\frac{(x+2)^2}{x+1}$

g) $f(x)=\frac{3x^2+x+3}{x^2+1}$ h) $f(x)=\frac{x^3-x^2-4x+4}{2x^3}$ i) $f(x)=\frac{x^3}{(x-2)^2(x-1)}$

5.2.2 Exercici del Youtube Estudi de la funció $f(x)=\frac{x^2-2x-1}{x-1}$ Solució: https://youtu.be/-fJ7nXLBQew

5.2.3 Exercici del Youtube Determina el creixement, decreixement i els extrems relatius de la funció $f(x)=\frac{x^2-3}{x^2-9}$ Solució: https://youtu.be/Fc2uINlZB8M (Unicoos)

5.2.4 Determina els intervals de creixement i decreixement de la funció $f(x)=\frac{2x^2+8}{x}$

5.2.5 Determina els extrems relatius de la funció $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$

5.2.6 Estudi de la funció $f(x)=\frac{x^2+3x}{x-1}$

5.2.7 Estudi complet de la funció $f(x)=\frac{x^3+5x^2}{x^3+x^2-16x+20}$

5.2.8 Donada la funció $f(x)=\frac{x^2+4x+4}{x-2}$ Determina:

a) Domini de definició. b) Asímptotes verticals.
c) Estudi de la monotonía: Creixement, decreixement, màxims i mínims
d) Representa gràficament aquesta funció, indicant clarament els elements trobats als aparats anteriors.

5.2.9 Exercici del Youtube Estudi de la funció $f(x)=\frac{x}{x^2+5x+4}$ Solució: https://youtu.be/zvbz7J94BDA

5.3 Estudi de funcions racionals (amb segona derivada).

Quadre resum general.

Primer pas: Simplificar-la factoritzant numerador i denominador $f(x)=\frac{num(x)}{den(x)}$

a) Discontinuïtats evitables. Són els factors que han marxat al fer la simplificació..

b) Domini de definició. Una funció racional està definida sempre que no tingui asímptotes verticals o discontinuïtats evitables (és a dir, quan no s'anu·la el denominador, abans de simplificar)

$Dom(f)=\Re-\{x\mid den(x)=0\}$

c) Punt de tall amb l'eix Y. Avaluem la funció per a $x=0\Rightarrow f(0)$

d) Punts de tall amb l'eix X. Una funció racional té un zero (punt de tall amb l'eix X) en $x=a$ si $num(a)=0$

e) Asímptotes verticals. Una funció racional té una asímptota vertical en $x=a$ si $den(a)=0$, és a dir, s'anul·la el denominador però no el numerador.

f) Comportament d'una funció racional en l'infinit.
Podem trobar infinits, asímptotes horitzontals i asímptotes obliqües.

g) Monotonia: Creixement, decreixement, extrems relatius.
Hem de fer un estudi de la primera derivada.

h) Curvatura: Concavitat, convexitat i punts d'inflexió.
Hem de fer un estudi de la segona derivada.

g) Gràfica.

5.3.1 Exercici autocorrectiu de derivació de funcions racionals.

Calcula la primera i segona derivada de les següents funcions. Comprova que els resultats.

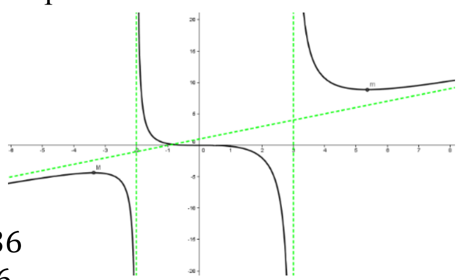
$f(x)$	$f(x)=0$	$f'(x)=0$	$f''(x)=0$
$f(x)=\dfrac{x+1}{x^3}$	-1	-3/2	-2
$f(x)=\dfrac{2x}{x^2-1}$	0	$\varnothing$	0
$f(x)=\dfrac{x^2}{x-3}$	0	0, 6	$\varnothing$
$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^3}$	-1, 1	$-\sqrt{3},\sqrt{3}$	$-\sqrt{6},\sqrt{6}$
$f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+4}$	0	0	$\dfrac{-2}{\sqrt{3}},\dfrac{2}{\sqrt{3}}$
$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$	1, -1	0	$\dfrac{1}{\sqrt{3}},-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
$f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$	0	$\varnothing$	0
$f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$	0	1, -1	$0,\sqrt{3},-\sqrt{3}$
$f(x)=\dfrac{(x-3)^2}{x+3}$	3	-9, 3	$\varnothing$
$f(x)=\dfrac{(x-2)^3}{x^2}$	2	2, -4	2
$f(x)=\dfrac{4x}{(1-x^2)^2}$	0	$\varnothing$	0
$f(x)=\dfrac{2x^3-3x}{(x^2-1)^2}$	$0,\sqrt{\dfrac{3}{2}},-\sqrt{\dfrac{3}{2}}$	$-\dfrac{-\sqrt{3+\sqrt{33}}}{2},\dfrac{\sqrt{3+\sqrt{33}}}{2}$	$0,\sqrt{3},-\sqrt{3}$

5.3.2 Exercici resolt. Estudi de la funció $f(x)=\frac{x^3}{x^2-x-6}$

a) Punt de tall amb l'eix Y.
b) (Possibles) punts de tall amb l'eix X.
c) (Possibles) asímptotes verticals.
d) Comportament de la funció en l'infinit.
e) Creixement, decreixement, màxims i mínims.
f) Representació gràfica de la funció, amb la informació dels apartats anteriors.

Solució:

a) (0,0)
b) (0,0)
c) x =-2 i x = 3
d) Asímptota obliqua y = x + 1



e) (indicacions) $f'(x)=\frac{x^2(x^2-2x-18)}{(x^2-x-6)^2}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-3.36 \\ x=5.36 \end{cases}$

Estudiant el signe de la derivada comprovem que la funció té un mínim en x = -3.36 i un màxim en x =5.358. El punt x = 0 no és un extrem relatiu. $f(-3.36)=-4.386$ $f(5.36)=8.87$

5.3.3 Exercici resolt. Estudi de la funció $f(x)=\frac{x^2}{x+4}$

Solució:

a) Domini: $\Re-\{-4\}$ b) Punt de tall amb l'eix Y: (0,0)

c) Punt de tall amb l'eix X: (0,0) d) Asímptotes verticals : x = -4

e) La gràfica de la funció té una asímptota obliqua: $y=x-4$

f) Monotonia. $x^2 \to 2x x+4 \to 1$

$$\frac{x^2}{x+4}\to\frac{2x(x+4)-x^2}{(x+4)^2}=\frac{2x^2+8x-x^2}{(x+4)^2}=\frac{x^2+8x}{(x+4)^2}=\frac{x(x+8)}{(x+4)^2}$$

$$f'(x)=\frac{x(x+8)}{(x+4)^2}=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\x=-8\end{cases}$$

$(-\infty,-8)$	$(-8,-4)$	$(-4,0)$	$(0,+\infty)$
$f'(-10)=0.55>0$ f creixent	$f'(-6)=-3<0$ f decreixent	$f'(-2)=-3<0$ f decreixent	$f'(-2)=0.36>0$ f creixent

Deduïm que la funció té un màxim relatiu a x = -8 , $y=f(-8)=-16$
i un mínim relatiu a x = 0 , $y=f(0)=0$

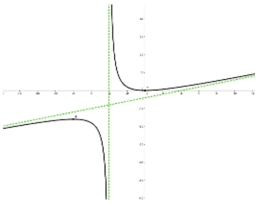
g) Curvatura. $x^2+8x\to 2x+8=2(x+4)$; $(x+4)^2\to 2(x+4)$

$$\frac{x^2+8x}{(x+4)^2}\to\frac{2(x+4)(x+4)^2-(x^2+8x)2(x+4)}{(x+4)^4}=\frac{32}{(x+4)^3}\qquad f'(x)=\frac{32}{(x+4)^3}=0 \text{ no té solució}$$

$(-\infty,-4)$	$(-4,+\infty)$
$f''(-6)=-4>0$ f corbada cap a baix	$f'(-3)=32>0$ f corbada cap a dalt

La funció no presenta punts d'inflexió perquè canvia la seva curvatura a l'asímptota vertical.

h) Gràfica.



5.3.4 Exercici resolt. Estudi de la funció $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2+1}$

Solució:

a) Punts de tall amb l'eix X. No en té. b) Punt de tall amb l'eix Y: 1

c) Asímptotes verticals: No en té

d) Comportament de la funció en l'infinit : La funció tendeix a una asímptota horitzontal y=1

e) Monotonia: $f'(x)=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ $f'(x)=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\x=-1\end{cases}$

$(-\infty,-1)$ decreixent , $(-1,1)$ creixent , $(1,+\infty)$ decreixent

Per tant, la funció té un mínim en P = $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$ i un màxim en P = $\left(1,\frac{3}{2}\right)$

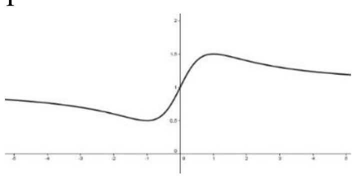
f) Curvatura:

$$f''(x)=\frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}\qquad f''(x)=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\x=-\sqrt{3}\cong-1.732\\x=\sqrt{3}\cong 1.732\end{cases}$$

$(-\infty,-\sqrt{3})$ corbada cap a baix $(-\sqrt{3},0)$ corbada cap amunt

$(0,\sqrt{3})$ corbada cap a baix $(\sqrt{3},+\infty)$ corbada cap amunt

g) Gràfica:



5.3.5 Exercici resolt. Estudi de la funció $f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$

Solució: a) Punt de tall amb l'eix Y: $f(0)=\frac{0^3}{0^2-1}=0$

b) Punts de tall amb l'eix X: $f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}=0 \Leftrightarrow x^3=0 \Leftrightarrow x=0$

c) Asímptotes verticals: $x^2-1=0 \Leftrightarrow x=1,\ x=-1$

d) Comportament a l'infinit: $\left.\begin{matrix} Grau\ Num=3 \\ Grau\ Den=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ Asímptota obliqua $y=x$

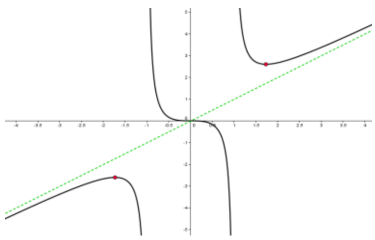
e) Monotonia: $f'(x)=\frac{3x^2(x^2-1)-x^3(2x)}{(x^2-1)^2}=\frac{x^2[3(x^2-1)-2x^2]}{(x^2-1)^2}=\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}=0 \Leftrightarrow$

$$x=0,\ x=\sqrt{3}\cong 1.73,\ x=-\sqrt{3}\cong -1.73$$

Estudi per intervals:

	$f'(-2)=4/9>0$	f creixent
$x=-\sqrt{3}\cong -1.73$		màxim relatiu
	$f'(-1.5)=-1.08<0$	f decreixent
$x=-1$		asímptota vertical
	$f'(-0.5)=-1.22<0$	f decreixent
$x=0$		No n'hi ha extrem relatiu
	$f'(0.5)=-1.22<0$	f decreixent
$x=1$		asímptota vertical
	$f'(1.5)=-1.08<0$	f decreixent
$x=\sqrt{3}\cong 1.73$		mínim relatiu
	$f'(2)=4/9>0$	f creixent

La funció té un màxim relatiu a: $x=-\sqrt{3}\cong -1.73 \Rightarrow y=f(-\sqrt{3})=-3\sqrt{3}/2\cong -2.60$
i un mínim relatiu a: $x=\sqrt{3}\cong 1.73 \Rightarrow y=f(\sqrt{3})=$
$3\sqrt{3}/2\cong 2.60$ f) Gràfica de la funció:



5.3.6 Estudi complet de la funció $f(x)=\frac{x^3}{(x-1)^2}$

5.3.7 Estudi complet de la funció $f(x)=\frac{x^4+1}{x^2}$

5.3.8 Estudi complet de les següents funcions:

a) $f(x)=\frac{(x-2)^2}{x+1}$ b) $f(x)=\frac{x^2-7x+10}{x+3}$ c) $f(x)=\frac{1}{x^2+x-6}$ d) $f(x)=\frac{x+2}{x^2-2x-3}$

Indicació per a la curvatura: l'equació $x^3+6x^2-3x+8=0$ només té una solució real $x\cong -6.634$

e) $f(x)=\frac{x^4-4x^3}{x+2}$ Indicació per a la curvatura: l'equació $x^3+4x^2-16=0$ només té una solució real $x\cong 1.679$

f) $f(x)=\frac{x^3}{(x-1)^2}$ g) $f(x)=\frac{x^2}{x^2+3}$ h) $f(x)=\frac{5x^2+5x-10}{x^2+x-30}$

5.3.9 Exercici Youtube Estudi complet de la funció $f(x)=\frac{1}{x^2+x-2}$

Solució: https://youtu.be/leenFjt8L5M (Mates con Andrés)

5.3.10 Exercici Youtube Estudi complet de la funció $f(x)=\frac{x}{x^2+2}$

Solució: https://youtu.be/S0isI3zWswY (Mates con Andrés)

5.3.11 Exercici Youtube Estudi complet i representació gràfica de la funció $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$

Solució: https://youtu.be/ARUEwJ_7sGc (Mates con Andrés)

5.3.12 Exercici del Youtube Estudi de la funció $f(x)=\frac{x^2-4}{x}$

a) Asímptotes. b) Intervals de creixement, decreixement i extrems relatius.

Solució: https://youtu.be/RRofEhQjaRs (Matematica Abierta)

5.3.13 Estudieu la monotonia de la funció $f(x)=\frac{-4x}{(1+x^2)^2}$

5.3.14 Estudi de la funció $f(x) = \frac{x^2-4x-5}{x^2-6x+9}$

a) Asímptotes verticals b) Comportament en l'infinit c) Signe
d) Monotonia e) Gràfica.

5.3.15 Estudi complet de les següents funcions.

a) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ b) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$ c) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ d) $f(x) = \frac{x}{x^2+2}$

5.3.16 Estudi complet de la funció $f(x) = \frac{2x^2-20x+42}{x^2-4}$

a) Asímptotes verticals i domini. b) Comportament en l'infinit
c) Signe d) Monotonia e) Gràfica

5.3.17 Estudi complet de la funció $f(x) = \frac{2x^2-20x+42}{x^2-4}$

a) Asímptotes verticals i domini. b) Comportament en l'infinit
c) Signe d) Monotonia e) Gràfica

5.4 Problemes PAU d'estudi de funcions racionals.

5.4.1 4. El nombre de noves persones infectades per una malaltia, en milers, és donat per la funció següent: $f(t) = \frac{30t}{t^2-2t+4}$, $t \geq 0$ en què t representa el temps transcorregut, en setmanes, des que es va iniciar la infecció.

a) Quants malalts s'infectaran a la setmana 1 i quants a la setmana 2? Podem pensar que, a llarg termini, aquesta infecció desapareixerà?

b) En quin instant es produeix el nombre màxim d'infectats per aquesta malaltia? Quin és aquest nombre? Sol: 1000 b) 2 set ; PAU CAT CCSS SET 2023 2.4

5.4.2 El Museu de Matemàtiques de Catalunya (MMACA) té previst muntar una exposició. S'estima que el nombre de visitants setmanals que rebrà l'exposició, expressat en desenes de persones, és donat per la funció $f(x) = \frac{240x}{x^2-2x+4}$

en què $x \geq 1$ representa el temps, expressat en setmanes, que fa que l'exposició està oberta al públic.

a) Quantes persones aniran a veure l'exposició la primera setmana? Calculeu la taxa de variació mitjana del nombre de visitants entre la setmana 1 i la setmana 4.

b) Quina setmana es preveu que anirà més gent a veure l'exposició? Quants visitants s'estima que hi aniran aquella setmana? PAU CAT CCSS SET 2022 3.3 (Solució: PAUCCSS pàg. 608)

5.4.3 Considereu la funció $f(x) = \frac{x^3}{x-2}$.

a) Estudieu si té punts crítics i, en cas que en tingui, justifiqueu de quin tipus són. Determineu també quins són els intervals de creixement i decreixement de la funció.

b) Comproveu que l'equació $f(x) = 0$ té una única solució en l'interval (–2, 1).

Sol: P(0,0) pi Q(3,27) mínim, creixent (3,+∞) PAU CAT TEC SET 2021 1.6 (Solució: PAUTEC pàg. 707)

5.4.4 Sigui la funció $f(x) = \frac{x^2-3x}{x^2-4}$.

a) Indiqueu-ne justificadament el domini i determineu els punts en què la gràfica de f talla l'eix de les abscisses.

b) Estudieu-ne el creixement i feu un esbós aproximat de la gràfica de la funció.

PAU CAT CCSS JUNY 2018 5.1 (Solució: PAUCCSS pàg 411)

5.4.5 Sigui la funció $f(x) = \frac{1}{x^2-k}$, en què k és un paràmetre real diferent de 0. Per als diferents valors del paràmetre k:

a) Calculeu el domini i les asímptotes de la funció.

b) Calculeu els punts amb un màxim o un mínim relatiu. PAU CAT TEC JUNY 2017 1.3

5.4.6 Considereu la funció de variable real $f(x) = \frac{2x^3}{x^2-1}$

a) Trobeu-ne el domini.

b) Calculeu l'equació de les seves asímptotes, si en té.
c) Estudieu-ne els intervals de creixement i decreixement, Així com les abscisses dels seus extrems relatius, si en té, i classifiqueu-los. PAU CAT TEC SET 2009 1.5

5.4.7 Se sap que la derivada d'una funció f(x) és: $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x+1}$
Calculeu les abscisses dels punts on la funció f(x) té els seus extrems relatius, especificant per a cada un dels valors que obtingueu si es tracta d'un màxim o d'un mínim relatiu.
PAU CAT TEC SET 2002 1.2

5.4.8 Considereu la funció $f(x) = \frac{x^2-2x}{2x^2+1}$ a) Determineu les seves asímptotes.
b) Calculeu els intervals on creix i on decreix, i els extrems relatius.
c) D'acord amb els resultats que heu obtingut, dibuixeu aproximadament la seva gràfica.
d) Fixant-vos en la gràfica anterior, expliqueu quina seria la gràfica de la funció $g(x) = -f(x)+3$ (feu-ne un esquema). En quins punts té màxims la funció g(x)?
PAU CAT TEC 2001 2.6

5.4.9 Considereu la funció $f(x) = \frac{1}{8x-x^2}$ a) Trobeu el domini de f(x) i les asímptotes.
b) Determineu el signe de la funció en el seu domini (determinar el signe de f(x) vol dir establir per a quins valors de x es compleix f(x) ≥0 i per a quins f(x) ≤0).
c) Trobeu-ne els intervals de creixement i decreixement i els extrems relatius.
d) Feu un esquema de la gràfica de la funció. PAU CAT TEC JUNY 1999 2.5

5.4.10 Considereu la funció $y = f(x) = \frac{x^2-x}{x+1}$ a) Feu un estudi de les seves asímptotes.
b) Calculeu els punts en què aquesta funció té extrem relatiu i digueu per a quins intervals del domini la funció és creixent.
c) Feu un esbós de la gràfica de la funció a partir de les dades obtingudes en els apartats anteriors. PAU CAT TEC JUNY 1999 6.5

5.4.11 Considereu la funció $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$. a) Determineu-ne, si en té, les asímptotes horitzontals i verticals. b) Justifiqueu que és decreixent en tot el domini de f. PAU CAT CCSS SET 2014 5.6

5.4.12 Considereu la funció següent: $f(x) = \frac{3x-1}{x+2}$
a) Determineu-ne les asímptotes horitzontals i verticals, si n'hi ha.
b) Si f'(x) > 0 en tot el domini de la funció f, calculeu els límits laterals quan x tendeix a –2 i feu un esbós de la gràfica de la funció f.
PAU CAT CCSS JUNY 2010 1.1

5.4.13 Considereu la funció real de variable real $f(x) = \frac{x^2+5x}{x-4}$. a) Determineu-ne els intervals de creixement i decreixement. b) Trobeu-ne els extrems relatius.
PAU CAT CCSS SET 2008 4.1

5.4.14 Sigui la funció $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$. a) Trobeu les equacions de les asímptotes de f(x). b) Estudieu el signe de la funció. c) Estudieu el creixement i decreixement de la funció i indiqueu quins són els seus màxims i mínims. d) Feu un esbós de la gràfica de f(x).
PAU CAT CCSS SET 2004 5.5

5.4.15 Considereu la funció $f(x) = \frac{x+3}{1-x}$ a) Determineu les seves asímptotes verticals i horitzontals (si en té) i els intervals de creixement i decreixement. Feu després un esquema senzill de la seva gràfica. b) Determineu els punts de la gràfica de la funció on la tangent és paral·lela a la recta d'equació y = x. PAU CAT CCSS SET 2000 6.5

5.4.16 Representeu gràficament la funció $f(x) = \frac{1}{x^2-5x+4}$ de manera raonada (domini de definició, asímptotes, intervals de creixement i decreixement, màxims i mínims...).
PAU CAT CCSS SET 1999 5.5

5.4.17 Considereu la funció $f(x) = \frac{x^2+4x+4}{x^2+1}$ Trobeu el domini de definició, els punts de tall amb els eixos, les possibles asímptotes, els intervals de creixement i decreixement, així com els possibles màxims i mínims. Feu després un esquema senzill de la gràfica d'aquesta funció.
PAU CAT CCSS JUNY 1999 1.6

5.4.18 Digueu raonadament quin és l'interval de creixement de la funció $y = \frac{x}{x^2+1}$
PAU CAT CCSS JUNY 1999 6.2

5.4.19 Considereu la funció $f(x) = \frac{x^2-x}{8x^2+1}$ Busqueu-ne el domini de definició, els límits quan $x \to +\infty$ i quan $x \to -\infty$, les asímptotes, els punts de tall amb els eixos, els intervals de creixement i decreixement, i els màxims i mínims locals. Feu després un dibuix aproximat de la seva gràfica.

PAU CAT CCSS SET 1998 5.5

5.5 Funcions racionals amb paràmetres.

5.5.1 Donada la funció $f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$, determina el valor de a per al què $f(x)$ tingui un mínim en $x=1$.

5.5.2 Donada la funció $f(x) = \frac{bx}{x^2+1}$, amb un paràmetre b diferent de 0, determina el valor de b per al què la funció tingui un màxim en (1,3).

5.5.3 Donada la funció $f(x) = \frac{x^2}{a-bx}$, determina els valors dels paràmetres a i b per als què $f(2) = -4$ i tingui un mínim relatiu en $x = 6$.

5.5.4 Determina el valor de a per al què $f(x) = \frac{3x^2-ax}{x+2}$ tingui un mínim relatiu en $x = 2$.

5.5.5 Donada la funció $f(x) = ax + b + \frac{9}{x}$, determina a i b de forma que la gràfica de la funció passi pel punt $(2,4)$ i en aquest punt tingui un extrem relatiu.

5.5.6 Determina els paràmetres a i b per als què la funció $f(x) = \frac{ax+b}{x^2-1}$ passi pel punt (0,-5) i tingui un extrem relatiu en $x = -3$.

5.5.7 Youtube Determina els valors dels paràmetres a, b i c de forma que la funció $f(x) = \frac{x-c}{ax+b}$ passi pel punt (0,0) i tingui asímptota vertical $x = 2$ i asímptota horitzontal $y = 1$

Solució: https://youtu.be/IEHbxHb-iAQ (Manuel BS – MBS)

5.5.8 Youtube Determina els valors del paràmetre k de forma que la funció $f(x) = \frac{2x+4}{x^2-k^2}$ tingui algun extrem relatiu (màxim o mínim)

Solució: https://youtu.be/13nko0cs2VI (Anil Kumar)

5.5.9 Un grup de biòlegs està estudiant un cultiu de bacteris. La població d'aquests bacteris (en centenars) és donada per la funció $P(t) = a + \frac{12t}{t^2+b}$, en què a i b són constants positives reals i $t \geq 0$ és el temps transcorregut en minuts.
Sabem que a l'instant inicial de l'estudi la població de bacteris era de 6 centenars i que el valor màxim de població s'ha assolit al cap de 2 minuts d'haver iniciat l'estudi.
a) Trobeu els valors de les constants a i b.
b) Calculeu la població màxima de bacteris i estudieu-ne el comportament a llarg termini, és a dir, cap a quin valor s'estabilitza el nombre de bacteris.

PAU CAT CCSS JUNY 2022 2.4 (Solució: PAUCCSS pàg. 586

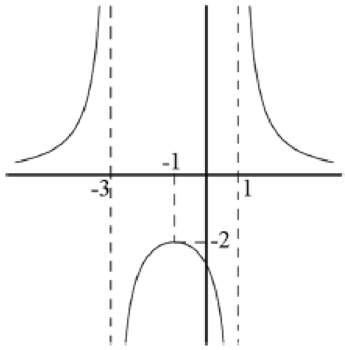
5.5.10 Considereu la funció $f(x) = \frac{ax^2+b}{x}$, en què a i b són dos paràmetres reals. Calculeu els valors de a i b de manera que la funció $f(x)$ tingui una asímptota obliqua de pendent 1 i un mínim en el punt de la gràfica d'abscissa x=2.

PAU CAT TEC JUNY 2020 1.4

5.5.11 Sigui $f(x) = \frac{ax^2}{x+b}$, en què a≠0.
a) Determineu si té alguna asímptota vertical, en funció del paràmetre b.
b) Indiqueu el valor dels paràmetres a i b perquè la funció f (x) tingui la recta y = 2x − 4 com a asímptota obliqua a +∞.

PAU CAT TEC SET 2012 4.2

5.5.12 Determineu el valor dels paràmetres a, b i c perquè la gràfica de la funció $f(x)=\dfrac{a}{x^2+bx+c}$ sigui la següent:



PAU CAT TEC JUNY 2010 5.3

5.5.13 Considereu la funció $f(x)=1+\dfrac{a}{x}+\dfrac{6}{x^2}$ on a és un paràmetre.

a) Calculeu el valor del paràmetre a sabent que f(x) té un extrem relatiu en el punt d'abscissa x = 3.
b) Aquest extrem relatiu, es tracta d'un màxim o d'un mínim? Raoneu la resposta.

PAU CAT TEC JUNY 2004 3.3

5.5.14 a) Determineu el valor del paràmetre a que fa que la funció $f(x)=\frac{x+a}{x^3}$
Presenti un extrem relatiu en el punt d'abscissa x = 3.
b) Per a aquest valor del paràmetre a, calculeu els intervals de creixement i decreixement, i les asímptotes de la funció.
c) A partir de les dades que heu obtingut, feu una gràfica aproximada d'aquesta funció.

PAU CAT TEC JUNY 2003 5.5

5.5.15 Determineu el valor que ha de tenir k perquè la funció $f(x)=\frac{2x^2-3kx+5}{x-2}$ tingui límit quan x tendeix a 2 (és a dir, existeixi $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$) i calculeu el valor que tindrà aquest límit.

PAU CAT TEC JUNY 2002 3.2

5.5.16 Sigui $f(x)=\frac{mx-2}{x-1}$, on m és un paràmetre.

a) Determineu per a cada valor del paràmetre m el valor del límit $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ (si existeix).
b) Per a quins valors de m la derivada f'(x) de la funció f(x) és positiva per a tot x?

PAU CAT TEC JUNY 2002 2.3

5.5.17 Considereu la funció $f(x)=\frac{x^2}{x+a}$, on a és un paràmetre.

a) Calculeu a sabent que la recta y = x+2 és una asímptota obliqua d'aquesta funció.
b) Prenent el valor de a obtingut en l'altre apartat, calculeu el domini, les interseccions de la gràfica amb els eixos, els intervals de creixement I decreixement i els extrems relatius de la funció f. Feu una gràfica aproximada d'aquesta funció a partir de les dades que heu obtingut.

PAU CAT TEC JUNY 2000 3.5 (Problema)

5.5.18 Sobre la funció $f(x)=\frac{a}{x^2+bx+c}$ disposem de les dades següents:

- les seves asímptotes verticals són x=-3 i x=1;
- la seva gràfica passa pel punt (0, -4).

a) Determineu la fórmula de la funció i feu un dibuix aproximat de la gràfica corresponent.
b) En el cas a=1, b=-2 i c=-1, determineu i classifiqueu, si existeixen, els extrems relatius de la funció.

PAU CAT CCSS JUNY 2012 3.1

5.5.19 Considereu la funció següent $f(x)=\frac{2x^2}{ax+1}$:

a) Determineu el valor de a que fa que la funció f tingui un extrem en el punt x=1, i indiqueu si es tracta d'un màxim o d'un mínim.
b) Per a a=3, indiqueu les asímptotes horitzontals i verticals de la funció f.

PAU CAT CCSS JUNY 2011 1.3

5.6 Funcions racionals en context.

5.6.1 El nombre de noves persones infectades per una malaltia, en milers, és donat per la funció següent: $f(t) = \frac{30t}{t^2-2t+4}$ en què t representa el temps transcorregut, en setmanes, des que es va iniciar la infecció. a) Quants malalts s'infectaran a la setmana 1 i quants a la setmana 2? Podem pensar que, a llarg termini, aquesta infecció desapareixerà? b) En quin instant es produeix el nombre màxim d'infectats per aquesta malaltia? Quin és aquest nombre?

PAU CAT CCSS SET 2023 2.4 (Solució: PAUCCSS pàg. 858)

5.6.2 El Museu de Matemàtiques de Catalunya (MMACA) té previst muntar una exposició. S'estima que el nombre de visitants setmanals que rebrà l'exposició, expressat en desenes de persones, és donat per la funció $f(t) = \frac{240x}{x^2-2x+4}$ en què $x \geq 1$ representa el temps, expressat en setmanes, que fa que l'exposició està oberta al públic. a) Quantes persones aniran a veure l'exposició la primera setmana? Calculeu la taxa de variació mitjana del nombre de visitants entre la setmana 1 i la setmana 4. b) Quina setmana es preveu que anirà més gent a veure l'exposició? Quants visitants s'estima que hi aniran aquella setmana? *Sol: a) 0 ; b) 1200 ; PAU CAT CCSS SET 2022 3.3*

5.6.3 La funció $C(t) = 3 - \frac{1}{t^2-4t+5}$ en què t són els anys transcorreguts i $C(t)$ la quantitat de clients, expressada en milers, modelitza l'evolució d'una empresa que ha entrat en crisi.
a) Calculeu quants clients tenia l'empresa en el moment inicial i quants en tenia al cap d'un any.
b) Trobeu l'instant en què l'empresa deixa de perdre clients i calculeu quants clients té en aquell instant.
c) Calculeu quant temps haurà de passar perquè l'empresa aconsegueixi tenir de nou el mateix nombre de clients que en el moment d'iniciar l'estudi.

PAU CAT CCSS SET 2021 1.4 (Solució: PAUCCSS pàg. 561)

5.6.4 Suposeu que la temperatura de l'aigua del mar en una zona concreta és donada per la funció $f(x) = \frac{x^2+5x+4}{x^2+4}$ en què x representa la fondària en metres negatius (per exemple, $f(-5)$ representa el valor de la temperatura de l'aigua en graus Celsius a 5 metres de profunditat).
a) Quina és la temperatura de l'aigua a la superfície? A quines profunditats la temperatura és de zero graus? Cap a quin valor tendeix la temperatura quan baixem a molta profunditat?
b) Calculeu a quina fondària la temperatura és més baixa i quin és el valor d'aquesta temperatura mínima. Sol: a) 1,

PAU CAT CCSS JUNY 2021 5.4 (Solució: PAUCCSS pàg. 538)

5.6.5 *Youtube***:** Una fàbrica estima que el benefici mensual, en milers d'euros, per cada tona de confeti venuda és donat per la funció $f(x) = \frac{-0{,}2x^2+5x-20}{x}$ en què x representa el nombre de tones de confeti venudes.
a) Determineu en quin interval de valors s'ha de trobar la variable *x* perquè la fàbrica no tingui pèrdues.
b) Calculeu la quantitat de tones de confeti que proporciona el benefici màxim i digueu quin és aquest benefici. Sol: a. [5,20] b $f(10)=1000$. PAU CAT CCSS JUNY 2021 2.1 (Solució: PAUCCSS pàg. 526)

5.6.6 El benefici d'una empresa, expressat en milions d'euros, és donat per la funció següent, en què x indica el nombre d'anys que han passat des del moment que va començar a funcionar:

$$B(x) = \frac{5x+20}{x^2+9} - \frac{20}{9}$$

a) Quin és el benefici en el moment en què l'empresa comença a funcionar? En quin moment l'empresa passa de tenir beneficis a tenir pèrdues?
b) En quin moment aconsegueix l'empresa el benefici màxim? Quin és aquest benefici màxim?

PAU CAT CCSS JUNY 2020 1.6 (Solució: PAUCCSS pàg. 463)

5.6.7 Es preveu un canvi important en la població d'una determinada zona per qüestions mediambientals. El nombre d'habitants de la zona, en milions, vindrà donat per la funció $P(t)=\dfrac{t^2+28}{(t+2)^2}$, en què t mesura el temps en anys des del moment actual (t = 0).

a) Digueu quin és el nombre d'habitants de la zona actualment i quin serà aquest nombre a molt llarg termini.

b) En quin moment s'arribarà al nombre mínim d'habitants? Quants habitants hi haurà en aquell moment? Quin és el nombre màxim d'habitants que s'assoleix en aquesta zona?

PAU CAT CCSS SET 2019 5.3 (Solució: PAUCCSS pàg. 436)

5.6.8 La funció $f(x)=\frac{40}{x^2-22x+125}$ ens mostra aproximadament la venda diària, en milers d'unitats, d'un perfum de moda en funció de x, en què x és el dia del mes de febrer.

a) Quantes unitats de perfum es van vendre, aproximadament, el dia 5 de febrer? Quin és l'increment de vendes entre el dia 7 i el dia 9 de febrer?

b) Quin dia del mes de febrer es van vendre més perfums i quantes unitat se'n van vendre?

PAU CAT CCSS JUNY 2019 1.4 (Solució: PAUCCSS pàg. 428)

5.6.9 La despesa mensual en tabac d'un fumador ve determinada pel seu salari mitjançant la funció $f(x)=\dfrac{400x}{x^2+4}$, en què x representa el salari en milers d'euros i $f(x)$ la despesa mensual en tabac en euros.

a) Determineu el salari per al qual la despesa en tabac és màxima. A quant ascendeix aquesta despesa?

b) Per a quins salaris la despesa mensual és inferior a 60 €?

PAU CAT CCSS SET 2018 3.4 (Solució: PAUCCSS pàg. 421)

5.6.10 El nombre d'individus, en milions, d'una població ve determinat per la funció $P(t)=\frac{5+t^2}{(t+1)^2}$, en què t mesura el nombre d'anys transcorreguts.

a) Quina és la població inicial i la població després de 9 anys? A partir de quin moment la població serà inferior a un milió d'individus?

b) Amb el pas dels anys, cap a quin valor tendirà el nombre d'individus de la població?

PAU CAT CCSS JUNY 2018 1.6 (Solució: PAUCCSS pàg. 413)

5.6.11 Una empresa ven un producte a un preu de p euros. El nombre d'unitats venudes depèn del preu que fixem segons la funció $V(p)=\frac{30p+10}{p}$

a) Demostreu que, en augmentar els preus, les vendes disminueixen.

b) És possible que l'empresa vengui 20 unitats del producte? Si el preu augmenta indefinidament, què passarà amb les vendes?

PAU CAT CCSS SET 2016 1.2

5.6.12 S'ha observat que el nombre d'entrades que es venen al cinema d'un poble està lligat al sou mitjà x de la població, expressat en milers d'euros, segons la funció $N(x)=\frac{50x}{x^2+1}$.

a) Determineu el sou mitjà de la població que correspon a la màxima venda d'entrades i justifiqueu la resposta.

b) Si suposem que els sous de la població creixen indefinidament, com incidiria aquest fet en la venda d'entrades del cinema?

PAU CAT CCSS SET 2015 5.4

5.6.13 Una fàbrica produeix diàriament x tones d'un producte A i (40 – 5x)/(10 – x) tones d'un producte B. La quantitat màxima de producte A que es pot produir és 8 tones. El preu de venda del producte A és 100€ per tona i el del producte B és 250€ per tona.

a) Construïu la funció de la variable x que ens proporciona els ingressos diaris, suposant que es ven tota la producció.

b) Calculeu quantes tones de cada producte s'han de produir diàriament per a obtenir el màxim d'ingressos, i comproveu que és realment un màxim relatiu.

PAU CAT TEC SET 2012 4.4

5.6.14 En una empresa artesana que pot produir fins a 25 cadires setmanals, la funció de costos en relació amb el nombre q de cadires produïdes és $C(q) = \frac{q^3}{100} + 4q + 20$
Si q és el nombre de cadires produïdes, el cost mitjà de cada cadira s'expressa mitjançant la funció $Q(q) = \frac{C(q)}{q}$
a) Calculeu el cost mitjà de cada cadira, si l'empresa produeix 5 cadires. I si en produeix 20?
b) Determineu quantes cadires cal produir perquè el cost mitjà sigui mínim, justifiqueu que es tracta efectivament d'un mínim i calculeu aquest cost mitjà. PAU CAT CCSS JUNY 2010 1.4

5.6.15 Segons un estudi sobre l'evolució de la població d'una espècie protegida determinada, podem establir el nombre d'individus d'aquesta espècie durant els propers anys mitjançant la funció $f(t) = \frac{50t+500}{t+1}$ en què t és el nombre d'anys transcorreguts.
a) Calculeu la població actual i la prevista per d'aquí a nou anys.
b) Determineu els períodes en què la població augmentarà i els períodes en què disminuirà.
c) Esbrineu si, segons aquesta previsió, la població tendirà a estabilitzar-se en algun valor i, si escau, determineu-lo. *Sol: 500; 95; decreix.;50* PAU CAT CCSS JUNY 2009 4.3

5.6.16 L'evolució de la població d'un estat, en milions d'habitants, es pot aproximar mitjançant la funció: $P(t) = \frac{20t}{4+t^2} + 40$ en què t és el temps en anys.
a) Calculeu la població actual (per a t = 0).
b) Determineu el límit de P(t) quan t tendeix a infinit.
c) Determineu al cap de quants anys la població serà màxima i el nombre d'habitants que la funció prediu per a aquest màxim. PAU CAT CCSS JUNY 2009 3.3

5.6.17 En els sis primers mesos, des que va obrir, una llibreria ha anat anotant el nombre de compradors de cada mes. Aquest nombre N(x) es pot ajustar per la funció $N(x) = \frac{1000x-600}{x}$ essent x el número del mes comptat des que van obrir.
a) Quants compradors van tenir el segon mes? En quin mes, comptat a partir de l'obertura, van tenir 900 compradors?
b) Suposem que aquesta fórmula serveix per predir el nombre de compradors en el futur. Podem assegurar que aquest nombre sempre anirà en augment? PAU CAT CCSS SET 2006 4.1

5.6.18 La funció $f(x) = \frac{90x+100}{x+5}$ indica el nombre de minuts que s'aconsella de caminar diàriament en funció del nombre x de setmanes que han passat des que es va començar un programa de manteniment.
a) Segons aquest programa de manteniment, a partir de quina setmana s'ha de caminar més d'una hora?
b) Feu un gràfic aproximat de la funció i expliqueu el seu creixement. Quant de temps aproximadament hauria de dedicar diàriament a caminar una persona que fa molt de temps que segueix el programa?
PAU CAT CCSS JUNY 2005 4.4

5.6.19 En una fàbrica determinada, el cost de producció expressat en pessetes de x unitats d'un producte s'ajusta aproximadament a la funció $C(x) = x^3 + 16000, \quad per\ a\ x \geq 0$
a) Feu un esquema senzill de la gràfica d'aquesta funció (només per a x≥0).
b) Trobeu la funció que representa el cost per unitat fabricada. Trobeu el cost mínim per unitat fabricada.
PAU CAT CCSS JUNY 1998 6.5

5.6.20 Una empresa vol promocionar una nova joguina per a la campanya de Nadal. Ha de decidir el preu de venda al públic d'aquesta joguina, que estarà entre 1 i 10 euros. Ha realitzat un estudi i sap que el benefici B que obtindrà en la campanya dependrà del preu de venda que li hi posi: Si li posa un preu de venda de x (en euros), el benefici que obtindrà será de $B(x) = \frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1$ on B està expressat en milions d'euros.

a) Per a quins valors de $x \in [1,10]$ el benefici será positiu?

b) Quin será el preu de venda si vol maximalitzar el benefici? Quin serà aquest benefici màxim?

5.6.21 El rendiment d'un estudiant durant les primeres 6 hores d'estudi ve donat (en una escala de 0 a 100) per la funció $R(t) = \frac{700t}{4t^2+9}$, en què t és el nombre d'hores transcorregudes.

a) Calcula el rendiment a les 3 hores d'estudi.

b) Determina l'evolució del rendiment durant les primeres 6 hores d'estudi (quan augmenta i quan disminueix). Quin és el rendiment màxim?

c) Una vegada obtingut el rendiment màxim, en quin moment el rendiment és igual a 35?

PAU València CCSS JUNY 2015 #2 (Sol: València pàg 151)

5.6.22 Cada dia, una planta productora d'acer ven x tones d'acer de qualitat baixa i y tones d'acer de qualitat alta. Per restriccions del sistema de producció, ha de succeir que $y = \frac{23-5x}{10-x}$, en què $0 < x < \frac{23}{5}$. El preu d'una tona d'acer de qualitat alta és de 900 euros, i el preu d'una tona d'acer de qualitat baixa és de 300 euros.

Obteniu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) Els ingressos obtinguts en un dia en funció de x.

b) Quantes tones de cada tipus d'acer s'han de vendre en un dia perquè els ingressos obtinguts aquest dia siguen màxims.

c) L'ingrés màxim que es pot obtenir per les vendes d'acer en un dia.

PAU VALÈNCIA JUNY 2016 TEC #B.3 (Sol. València pàg. 126)

5.6.23 L'evolució del preu d'una certa acció, en euros, un dia determinat va seguir la funció: $f(x) = 35.7\frac{x+2}{x^2+21}$ $\quad x \in [0,8]$ on x representa el temps, en hores, transcorregut des de l'obertura de la sessió. Es demana:

a) Calcular el valor màxim que assoleix l'acció i en quin moment es va assolir.

b) Calcular el valor mínim que assoleix l'acció i en quin moment es va assolir.

c) Una persona va comprar 20 accions en el moment de l'obertura (x=0) i les va vendre just al tancament (x=8). Determina si va obtenir guanys o pèrdues i la quantia d'aquests.

PAU VALÈNCIA JULIOL 2017 CCSS #A.2 (Sol. València pàg. 231)

5.6.24 La caiguda d'un meteorit a l'Antàrtida va provocar el desglaç d'una superfície amb una extensió en km² que ve donada per $f(t) = \frac{10t+21}{t+3}$, on t és el nombre de dies transcorreguts des de l'impacte.

a) Quina va ser la superfície desglaçada després de 6 dies de l'impacte? I després de 87 dies?

b) Estudia si la superfície desglaçada creix o decreix al llarg del temps.

c) Un altre científic va afirmar que la superfície desglaçada venia donada per la funció

$$g(t) = 10 - \frac{9}{t+3}$$

Comprova si hi ha o no diferències entre les dues funcions $f(t)$ i $g(t)$.

d) Té algun límit l'extensió del desglaç?

PAU VALÈNCIA JUNY 2018 CCSS #B.2 (Sol. València pàg. 248)

5.6.25 Un ramader muny una vaca des de l'endemà que aquesta ha parit fins a 300 dies després del part. La producció diària en litres de llet que s'obté d'aquesta vaca ve donada per la funció: $f(x) = \frac{120x-x^2}{5000} + 40$ on x representa el nombre de dies transcorreguts des del part.

Es demana: a) El dia de màxima producció i la producció màxima.

b) El dia de mínima producció i la producció mínima. PAU València CCSS SET 2011 #2 (Sol: València pàg 46)

5.6.26 S'estima que el benefici anual B(t), en %, que produeix una certa inversió, està determinat pel temps t en mesos que es manté aquesta inversió a través de l'expressió següent:

$B(t) = \frac{36t}{t^2+324} + 1, \quad t \geq 0.$

a) Descriviu l'evolució del benefici en funció del temps durant els primers 30 mesos.

b) Calculeu raonadament quant de temps ha de mantenir-se aquesta inversió per tal que el benefici siga màxim. Quin és el benefici màxim?

c) Quin seria el benefici de la inversió si aquesta es mantinguera en el temps de forma indefinida?

PAU València CCSS SET 2012 #2 (Sol: València pàg 74)

5.6.27 Cada dia, una planta productora d'acer ven x tones d'acer de qualitat baixa i y tones d'acer de qualitat alta. Per restriccions del sistema de producció, ha de succeir que $y = \frac{23-5x}{10-x}$, en què $0 < x < \frac{23}{5}$.

El preu d'una tona d'acer de qualitat alta és de 900 euros, i el preu d'una tona d'acer de qualitat baixa és de 300 euros.

Obteniu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) Els ingressos obtinguts en un dia en funció de x.

b) Quantes tones de cada tipus d'acer s'han de vendre en un dia perquè els ingresos obtinguts aquest dia siguen màxims.

c) L'ingrés màxim que es pot obtenir per les vendes d'acer en un dia.

5.6.28 El nombre d'individus d'una població en un determinat instant de temps, t, expressat en milions d'individus, ve donat per la funció $f(t) = \frac{t^2+15}{t+1}$

on la variable real t ≥ 0 mesura el nombre d'anys transcorreguts des de l'1 de gener de l'any 2000.

a) Calcula la població que hi havia l'1 de gener de l'any 2001.

b) Calcula els moments en els què la població serà de 15000000 d'habitants.

c) Prova que el nombre d'individus de la població assoleix un mínim. Quin any s'assoleix aquest mínim? Quants d'individus hi haurà l'any del mínim?

d) Determina l'interval de temps (de quin any a quin any) la població va estar per sota dels 8 milions d'habitants.

5.6.29 En els últims mesos, la demanda de gel hidroalcohòlic ha baixat molt respecte als primers moments de la pandèmia. La funció $f(x) = \frac{12+8x}{4x+1}$, en què x ∈ [0,+∞) indica el nombre de mesos transcorreguts des de l'inici de la pandèmia, dona les vendes mensuals, en milions de litres, de gel hidroalcohòlic.

a) Determineu si la funció f(x) és contínua en tot el seu domini. Calculeu la taxa de variació mitjana a l'interval [0,1]. A quin valor tendiran les vendes mensuals de gel al llarg del temps?

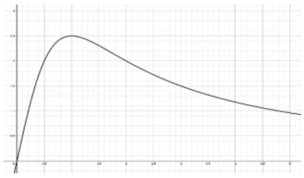
b) Comproveu que la funció és decreixent en tot el domini i trobeu la recta tangent en el punt x = 1.

PAU CCSS JUNY 2023 5.1 (Sol. PAUCCSS pàg. 675)

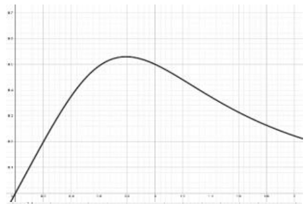
5.7 Determinació de recta tangent amb funcions racionals.

5.7.1 Determina i representa gràficament la recta tangent associada a cada funció en el punt indicat.

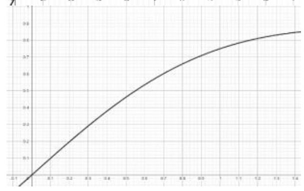
a) $f(x)=\dfrac{5x}{x^2+1}$, en el punt $x=3$



b) $f(x)=\dfrac{x}{x^3+1}$, en el punt $x=0.6$



c) $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+3}$, en el punt $x=0.8$

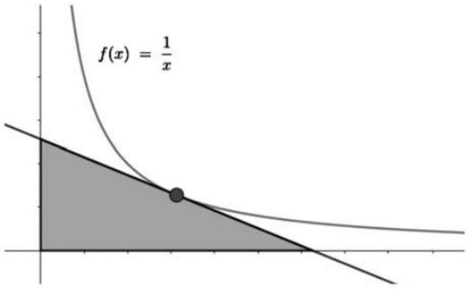


5.7.2 Sigui la funció $f(x)=\frac{1}{x}$.

a) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció f en el punt d'abscissa x = 2.

b) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció f en el punt d'abscissa x = k, en què k és un nombre real positiu.

c) Comproveu que, tal com es pot veure en la figura de sota, la recta de l'apartat b determina un triangle d'àrea constant amb els semieixos positius de coordenades. Calculeu aquesta àrea.



PAU CAT TEC SET 2023 2.2 (Solució: PAUTEC pàg. 818)

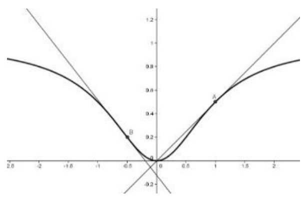
5.7.3 Considereu la funció $f(x)=\frac{9}{x^2+x-2}$.

a) Determineu el domini, les possibles asímptotes, els extrems relatius i els intervals de creixement i decreixement de la funció.

b) Calculeu l'equació general de la recta tangent a la funció f(x) en el punt d'abscissa x=4. Representeu en un mateix gràfic la funció f(x) i la recta tangent.

PAU CAT TEC SET 2022 3.2 (Solució: PAUTEC pàg 760)

5.7.4 Calcula l'equació de la recta tangent a la gràfica de $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ en el punt d'abscissa x = 1 i en el punt d'abscissa x = -0.5



5.7.5 Recta tangent amb funcions racionals. Determina la recta tangent a la funció en el punt $x=p$ indicat.

a) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$	$p=5$	b) $f(x)=\dfrac{1}{x}$	$p=1$
c) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$	$p=-1$	d) $f(x)=\dfrac{2x}{x+2}$	$p=2$
e) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$	$p=-1$	f) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$	$p=0$
g) $f(x)=\dfrac{-3}{x^2-4}$	$p=1$	h) $f(x)=\dfrac{1}{x}-x^2$	$p=1$

5.7.6 Determina la recta tangent a la funció $f(x)=\dfrac{2}{x+1}$ en el punt $x=0$.

5.7. Youtube Determina la recta tangent a les següents funcions al punt indicat:

a) $f(x)=x^3+2x$ al punt $(1,3)$

b) $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ al punt $x=2$ Solució: https://youtu.be/meONGezEXlI (NancyPi)

5.7.8 Considereu la funció $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

a) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica en aquells punts en què la recta tangent és horitzontal.

b) Calculeu les coordenades del punt de la gràfica de la funció f(x) en què el pendent de la recta tangent és màxim. PAU CAT TEC SET 2019 5.4 (Solució: PAUTEC pàg. 546)

5.7.9 Considereu la funció $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

a) Estudieu-ne el creixement i, si en té, determineu-ne i classifiqueu-ne els extrems relatius.

b) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de f en el punt d'abscissa x = 1.

PAU CAT CCSS JUNY 2016 3.2 (Solució: PAUTEC pàg. 379)

5.7.10 Considereu la funció $f(x)=\frac{x^2}{2x-1}$.

a) Trobeu l'equació de la recta tangent a la corba $y=f(x)$ en el punt d'abscissa $x=2$.

b) Determineu els intervals de creixement i decreixement, així com els extrems, si n'hi ha.

PAU CAT CCSS SET 2007 3.1

5.7.11 Considereu la funció $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$

a) Calculeu l'equació de la recta tangent a la corba que representa $f(x)$, en el punt d'abscissa x = 2. b) Quina és la funció que dóna el pendent de la recta tangent en cadascun dels punts de la corba? c) Calculeu el punt de la corba que representa f(x) en el qual el pendent de la recta tangent és màxim. Trobeu el valor d'aquest pendent màxim.

Sol: a) y=1 b) (-√3/3, ¾) PAU CAT CCSS JUNY 2005 1.5

5.7.12 Considereu la funció $f(x)=\frac{x^2}{x-a}$, en què a és un paràmetre real.

a) Trobeu per a quins valors del paràmetre a la recta tangent a la funció f en x = 1 és paral·lela a la recta y + 3x + 5 = 0.

b) Per al valor del paràmetre a = 1, trobeu els intervals de creixement i decreixement i els punts on s'assoleixen els màxims i mínims relatius de la funció f.

PAU CAT CCSS JUNY 2018 1.2 (Solució: PAUCCSS pàg. 409)

5.7.13 Considereu la funció $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$.

a) Trobeu l'equació de la recta tangent a $f(x)$ en el punt d'abscissa x = 0.

b) Estudieu en quins intervals la funció $f(x)$ és creixent i en quins és decreixent. Indiqueu-ne també els extrems relatius i digueu si són màxims o mínims.

PAU CAT CCSS JUNY 2021 5.1 (Solució: PAUCCSS pàg. 534)

5.7.14 Youtube Determineu la recta tangent a la funció $f(x)=\dfrac{3x^2-1}{2x+1}$ en el punt $x=0$.

Solució: https://youtu.be/-cyp6omla1o (Xavi Mates)

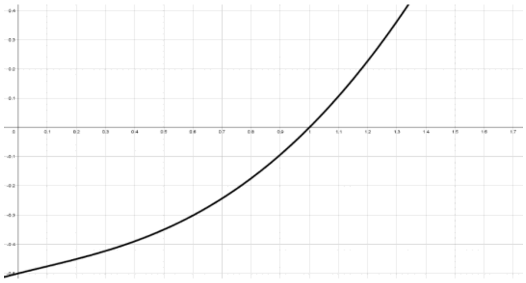
5.7.15 Youtube Trobeu l'equació de la recta tangent a $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$ en $x=3$

Solució: https://youtu.be/5r3Ycxz-uGY (Tu Matematica)

5.7.16 Youtube Determina la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x)=\dfrac{2}{x+2}$ en el punt $x=1$.

Solució: https://youtu.be/Ae8s3R9jwIw (Sergio Correa)

5.7.17 Determina i representa la recta tangent associada a la funció $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x+2}$ en el punt $x=1$.



5.7.18 Determina la recta tangent a la funció $f(x)=\dfrac{x}{1-x^2}$ en el punt $x=0$.

5.7.19 Determina la recta tangent associada a la funció $f(x)=\dfrac{2x^2+2x-2}{3x^2+3}$ en el punt $x=1$.

5.7.20 Determina la recta tangent associada a la funció $f(x)=\dfrac{2x^3}{x^2+1}$ en el punt $x=1$.

5.7.21 Determina la recta tangent a la funció $f(x)=\dfrac{x^3-2}{2x+1}$ en el punt $p=-1$.

5.8 Determinació del punt de tangència amb funcions racionals.

5.8.1 Considereu la funció $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+3}$

a) Determineu els punts en què la funció f talla cadascun dels eixos. Determineu també els intervals on la funció f és positiva.
b) Determineu els punts en què la recta tangent a la gràfica de f és horitzontal.

PAU CAT CCSS SET 2016 1.5

5.8.2 Considereu la funció $f(x)=\dfrac{2x+2}{x^2-x+2}$

a) Escriviu l'equació de la recta tangent a la gràfica de f en el punt de tall amb l'eix de les ordenades.
b) Determineu els punts de la corba en què la recta tangent és horitzontal.

PAU CAT CCSS JUNY 2016 2.3

5.8.3 Considerem la funció $f(x)=\dfrac{12}{x}$

a) Indiqueu-ne el domini i estudieu-ne el creixement.
b) Calculeu les equacions de les rectes tangents a la gràfica de f que són paral·leles a la recta $y+3x=2$.

PAU CAT CCSS SET 2012 4.2

5.8.4 Donada la funció següent: $f(x)=\dfrac{-4x^2}{x+1}$

a) Determineu-ne les asímptotes horitzontals i verticals, si n'hi ha.
b) Trobeu els punts de la corba en què la recta tangent és paral·lela a la recta $y=-3x+4$

PAU CAT CCSS JUNY 2010 4.2

5.8.5 Considereu la funció següent: $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2}$

a) En quin punt de la corba la recta tangent a la gràfica de f és paral·lela a la recta $x+y=5$?
b) Calculeu les asímptotes horitzontals i verticals de la funció, si n'hi ha, i feu un esbós de la gràfica de la funció f.

PAU CAT CCSS JUNY 2010 5.4

5.8.6 Considereu la funció $f(x)=\dfrac{3-2x}{x}$.

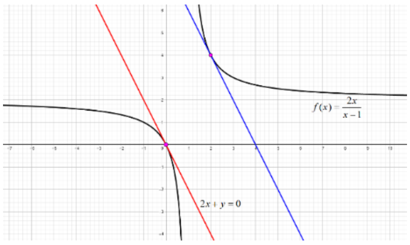
a) Trobeu els punts de la gràfica en els quals la recta tangent és paral·lela a la recta $3x+4y+5=0$.

b) Calculeu les equacions d'aquestes rectes tangents. PAU CAT CCSS JUNY 2006 1.1

5.8.7 Considereu la funció definida per $f(x)=\frac{x^2+1}{x+1}$. Calculeu quant val el pendent de la recta tangent a la seva gràfica pel punt d'abscissa x = 0. Trobeu si hi ha altres punts en els quals el pendent de la tangent sigui igual al que s'ha obtingut. PAU CAT TEC JUNY 2006 3.1

5.8.8 Donada la funció $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+2}$, determina els punts en què la recta tangent és paral·lela a l'eix d'abscisses.

5.8.9 Youtube Determineu les rectes tangents a la funció $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$ que són paral·leles a $2x+y=0$.



Solució: https://youtu.be/wQ0Gz55a0tg (Xavi Mates)

5.8.10 Youtube Determina les rectes tangents a $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$ paral·leles a la recta $2x+y=0$

Solució: https://youtu.be/jZVaJFw3y3g (fins al minut 8:48) (Unicoos)

5.8.11 a) Determina la recta tangent a la funció $f(x)=\frac{x+5}{x-3}$ en el punt $x=5$.

b) Determina els punts de la gràfica de la funció anterior en els què la recta tangent és paral·lela a la recta $y+8x=1$

5.8.12 *Problem Solving.* La recta d'equació $y=kx-k$, on k és una constant positiva, és tangent a la corba d'equació $y=-\frac{1}{2x}$. Determina el valor de k i el punt en el què la recta tangent toca la corba.

5.9 Determinació de funcions racionals amb donada recta tangent.

5.9.1 La gràfica de la funció $f(x)=ax+b+\frac{8}{x}$ passa pel punt (-2, -6) i la recta tangent en aquest punt és paral·lela a l'eix d'abscisses.

a) Calculeu el valor de a.

b) Calculeu el valor de b. PAU CAT CCSS JUNY 2019 1.3 (Solució:PAUCCSS pàg. 431)

5.9.2 Considereu la funció real de variable real $f(x)=\dfrac{2x+m}{x}$, on m és un paràmetre real.

a) Calculeu el valor que ha de tenir m perquè la tangent a la gràfica de f(x) en el punt d'abscissa x= –3 sigui paral·lela a la recta x –3y +1 = 0. Calculeu també l'equació d'aquesta tangent.

Ara fixeu el valor de m=1.

b) Determineu el domini de la funció i els intervals on és creixent o decreixent.

c) Determineu-ne les asímptotes.

d) Dibuixeu un esbós de la gràfica resultant.

PAU CAT CCSS JUNY 2007 1.5

5.9.3 Donada la funció $f(x)=ax^2-\dfrac{b}{x}$ Determineu els valors d'a i b per als què $y=7x-8$ sigui l'equació de la recta tangent a la seva gràfica en $x=1$.

6 Derivació amb funcions radicals.

6.1 Derivació de funcions radicals.

La derivada de l'arrel quadrada es pot deduir escrivint l'arrel quadrada en forma potencial:

$$f(x)=\sqrt{x}\rightarrow f(x)=x^{1/2}\rightarrow$$

$$f'(x)=(1/2)x^{1/2-1}=(1/2)x^{-1/2}=\frac{(1/2)}{x^{1/2}}=\frac{(1/2)}{\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

En general, per derivar una arrel d'índex superior a 2: $f(x)=\sqrt[n]{x}$
escriurem la funció en forma potencial i aplicarem la fórmula de la derivada de la potència:

$$f(x)=\sqrt[n]{x}=x^{1/n}\rightarrow f'(x)=(1/n)x^{1/n-1}$$

Exemples:

1. $f(x)=\sqrt[3]{x}\rightarrow f(x)=x^{1/3}\rightarrow f'(x)=(1/3)x^{1/3-1}=(1/3)x^{-2/3}=\frac{(1/3)}{x^{2/3}}=\frac{(1/3)}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
2. $f(x)=\sqrt[3]{x^2}\rightarrow f(x)=x^{2/3}\rightarrow f'(x)=(2/3)x^{2/3-1}=(2/3)x^{-1/3}=\frac{(2/3)}{x^{1/3}}=\frac{(2/3)}{\sqrt[3]{x}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

Què has de saber:

Les regles d'escriptura de les potències: $x^{-n}=\frac{1}{x^n}$ $\quad x^{n/m}=\sqrt[m]{x^n}$

i la fórmula de la derivada de la potència: $f(x)=x^n\rightarrow f'(x)=n\,x^{n-1}$

6.1.1 Youtube: Determina les derivades de les següents funcions:

a) $f(x)=x$ b) $f(x)=\frac{1}{x}$ c) $f(x)=\sqrt{x}$ d) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ e) $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt[3]{x}}$

Solució: https://youtu.be/aLpdC41pQdg

6.1.2 Youtube Estudi de la funci ó $f(x)=\sqrt{x^2-10x}$ Solució: https://youtu.be/akSVuDk_lhw (Mates con Andrés)

6.1.3 Determineu els màxims i mínims relatius de la funció $f(x)=\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}$

6.1.4 Youtube Estudi de la funció $f(x)=\sqrt{x^3+3x^2}$ Solució: https://youtu.be/6doWOcGX_CI

6.1.5 Estudi complet de la funció $f(x)=x(5-x)^{2/3}=x\sqrt[3]{(5-x)^2}$

a) Domini de definició.
b) Punts de tall amb els eixos.
c) Signe (quan la funció és positiva, negativa o zero)
d) Monotonia (creixement, decreixement, màxims i mínims)
e) Gràfica aproximada.

6.1.6 Donada la funció $f(x)=\sqrt{4-x^2}$, determina:

a) El seu domini de definició.
b) Els seus màxims i mínims.

6.1.7 Determina el domini i la monotonia de la funció $f(x)=x\sqrt{5x^2+4}$

6.1.8 Determina el domini i la monotonia de la funció $f(x)=\sqrt{(x-3)(9-x)^2}$

6.2 Recta tangent amb funcions radicals.

6.2.1 Determina la recta tangent a la funció en el punt $x=p$ indicat.

a) $f(x)=\sqrt{x}$	$p=4$	b) $f(x)=x+\sqrt{x}$	$p=1$
c) $f(x)=\sqrt{x+1}$	$p=3$	d) $f(x)=\sqrt{5x+5}$	$p=4$
e) $f(x)=\sqrt{5-x^2}$	$p=1$	f) $f(x)=\sqrt[3]{1-3x}$	$p=3$
g) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$p=9$	h) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$	$p=9$
i) $f(x)=\sqrt{x^2-x+7}$	$p=2$	j) $f(x)=\dfrac{1}{x}-x^{2/3}$	$p=1$

6.2.2 Exercici resolt.

a) Determineu els punts de la gràfica de la funció $f(x)=4\sqrt[3]{3x+2}+1$ en els què la recta tangent és paral·lela a la recta $y=x$. b) Determineu la recta tangent per a $x=2$.

Solució:

a) $f(x)=4\sqrt[3]{3x+2}+1=4(3x+2)^{1/3}+1$

$$f'(x)=4\frac{1}{3}(3x+2)^{1/3-1}=\frac{4}{3}(3x+2)^{-2/3}\cdot 3=\frac{4}{\sqrt[3]{(3x+2)^2}}$$

$$\frac{4}{\sqrt[3]{(3x+2)^2}}=1\Leftrightarrow 4=\sqrt[3]{(3x+2)^2}\Leftrightarrow 4^3=(3x+2)^2\Leftrightarrow \pm\sqrt{64}=3x+2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-10/3 \end{cases}$$

b) $a=f'(2)=1$

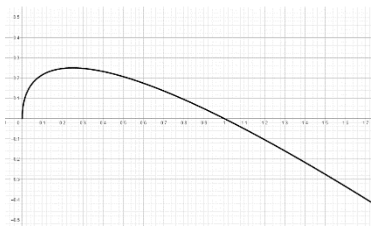
$$f(2)=4\sqrt[3]{3\cdot 2+2}+1=4\sqrt[3]{8}+1=4\cdot 2+1=9$$

$b=f(2)-a\cdot 2=9-1\cdot 2=6$, la recta tangent és $y=x+6$

6.2.3 a) Deriva la funció $f(x)=\sqrt{1-5x^2}$ b) Determina la seva recta tangent en el punt $x=0$.

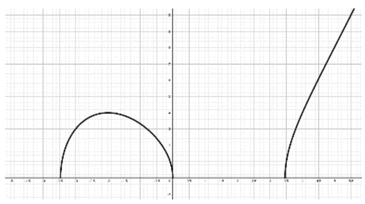
6.2.4 a) Determina la recta tangent associada a la gràfica de la funció $f(x)=\sqrt{x}-x$ en el punt $x=1$

b) Representa gràficament la recta obtinguda en l'apartat anterior.

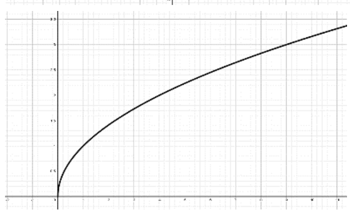


6.2.5 a) Determina la recta tangent associada a la funció $f(x)=\sqrt{x^3-12x}$ en el punt d'abscissa $x=-3$. Representa aquesta recta gràficament, comprovant que, en efecte, és tangent a la funció en aquest punt.

b) Determina els punts de la gràfica de la funció en els què la recta tangente és paralel·la a l'eix d'abscisses.



6.2.6 Determina i representa la recta tangent a la gràfica de $f(x)=\sqrt{x}$ en el punt d'abscissa $x=4$



7 Derivació amb funcions exponencials i logarítmiques.

7.1 Extrems relatius de funcions exponencials i logaritmes.

7.1.1 Youtube: Calcula la derivada de la funció $f(x)=x^2\ln x$ (i treu factor comú)

7.1.2 Youtube: Calcula la derivada de la funció $f(x)=x^3\ln x$ (i treu factor comú)

Solució: https://youtu.be/ozH4gxvqoT8 (Montero Espinosa)

7.1.3 Youtube: Calcula la derivada de la funció $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ (i simplifica)

Solució: https://youtu.be/ovvnnnHO2QM (Montero Espinosa)

Youtube: Calcula la derivada de la funció $f(x)=\frac{x^4}{e^x}$

Exercici resolt. Donada la funció $f(x)=\frac{x^2}{e^x}$

a) Determineu el seu domini.
b) Estudi de la monotonia (creixement, decreixement, màxims i mínims relatius).
c) Estudi de la curvatura (convexitat, concavitat i punts d'inflexió).
d) Estudieu el comportament d'aquesta funció en l'infinit.
e) Representeu gràficament aquesta funció.

Solució:

a) Domini: $\mathbb{R}$ (el denominador no s'anul·la mai).

b) $f(x)=\frac{x^2}{e^x}\rightarrow f'(x)=\frac{2xe^x-x^2e^x}{(e^x)^2}=\frac{xe^x(2-x)}{(e^x)^2}=\frac{x(2-x)}{e^x}$ $x^2\rightarrow 2x$; $e^x\rightarrow e^x$

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=2, x=0$

	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$f'(-1)=-3e<0$	$f'(1)=1/e>0$	$f'(3)=-3/e^3<0$
$f(x)$	decreixent	creixent	decreixent

La funció té un mínim relatiu al punt $(0,0)$ i un màxim relatiu al punt $\left(2,\frac{4}{e^2}\right)\cong(2{,}0.54)$

c) $f''(x)=\frac{2(1-x)e^x-x(2-x)e^x}{(e^x)^2}=\frac{e^x(2(1-x)-x(2-x))}{(e^x)^2}=\frac{e^x(2-4x+x^2))}{(e^x)^2}$

$x(2-x)=2x-x^2\rightarrow 2-2x=2(1-x)$ $\quad e^x\rightarrow e^x$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow\frac{e^x(2-4x+x^2)}{(e^x)^2}=0\Leftrightarrow 2-4x+x^2=0\Leftrightarrow x=\begin{cases}2-\sqrt{2}\cong 0.586\\ 2+\sqrt{2}\cong 3.414\end{cases}$$

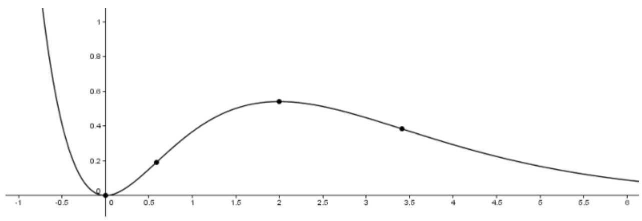
	$(-\infty,2-\sqrt{2})$	$(2-\sqrt{2},2+\sqrt{2})$	$(2+\sqrt{2},+\infty)$
$f''(x)$	$f''(0)=2>0$	$f''(1)=-1/e<0$	$f''(4)=2/e^4>0$
$f(x)$	convexa $\bigcup$	còncava $\bigcap$	convexa $\bigcup$

La funció té punts d'inflexió a $(0.586, 0.191)$ i $(3.414, 0.384)$

d) Quan $x\rightarrow+\infty$, la funció és una exponencial contra una potencial, guanya l'exponencial, per tant: $\lim_{x\rightarrow+\infty}f(x)=\lim_{x\rightarrow+\infty}\frac{x^2}{e^x}=0$

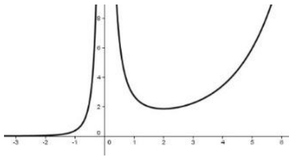
Quan $x\rightarrow-\infty$, no és cap indeterminació: $\lim_{x\rightarrow-\infty}f(x)=\lim_{x\rightarrow-\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim_{x\rightarrow-\infty}x^2\frac{1}{e^x}=\infty\cdot\infty=\infty$

e)

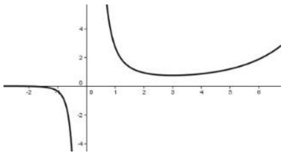


7.1.4 Determina els extrems relatius de les següents funcions:

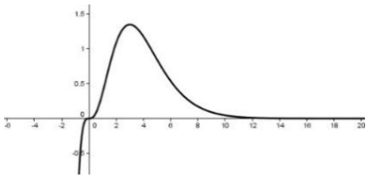
a) $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2}$



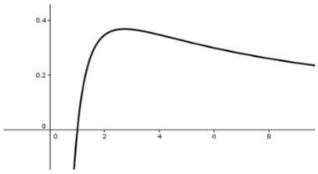
b) $f(x)=\dfrac{e^x}{x^3}$



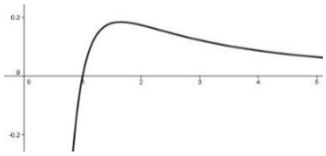
c) $f(x)=\dfrac{x^3}{e^x}$



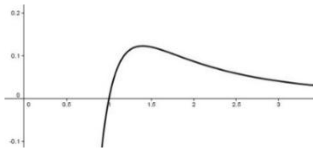
d) $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$



e) $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x^2}$

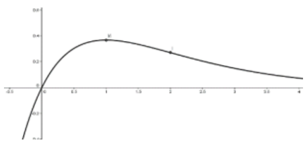


f) $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x^3}$

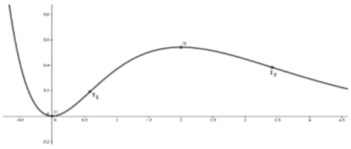


7.1.5 Determina les coordenades dels extrems relatius (màxims **M** i mínims **m**) i dels possibles punts d'inflexió **I** de les següents funcions.

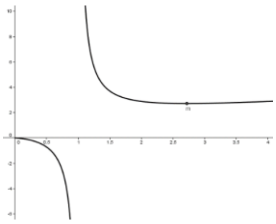
a) $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$



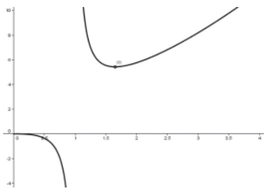
b) $f(x)=\dfrac{x^2}{e^x}$



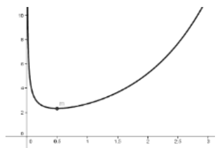
c) $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$



d) $f(x)=\dfrac{x^2}{\ln x}$



e) $f(x)=\dfrac{e^x}{\sqrt{x}}$



7.1.6 Estudieu la monotonia i la curvatura de la funció $f(x)=\ln(x^2+1)$.

7.1.7 Determineu el punt de la gràfica de la funció $f(x)=ln\left(\frac{x^2}{x-1}\right)$ en el què la recta tangent és paral·lela a l'eix OX.

7.1.8 Estudieu la monotonia de la funció $f(x)=\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$.

7.1.9 Estudieu la monotonia i la curvatura de la funció $f(x) = x(\ln x)^2$.

7.1.10 Estudieu la monotonia i la curvatura de la funció $f(x) = \frac{x^2+1}{e^x}$.

7.1.11 Estudieu la monotonia de la funció $f(x) = \frac{ex - e^x}{x}$.

7.1.12 Youtube Determineu els intervals de creixement, decreixement, màxims i mínims de la funció $f(x) = x \ln^2 x$ Solució: https://youtu.be/icKlkesqczE

7.1.13 Youtube: Estudi de la funció $f(x) = e^{1-x}$ Solució: https://youtu.be/JulYyOS0hH4 (unicoos)

7.1.14 Youtube: Estudi de la funció $f(x) = \ln(1 - x^2)$ Solució: https://youtu.be/kHGDwmXc5bU

7.1.15 Estudi de la funció $f(x) = e^x - e\,x$

a) Creixement, decreixement, màxims i mínims. b) Estudi de la seva curvatura i punts d'inflexió. c) Representació gràfica.

7.1.16 Estudi complet de la funció $f(x) = xe^{-x^2}$, també amb curvatura.

7.1.17 Youtube: Estudi de la funció $f(x) = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$

Solució: https://youtu.be/EvDCxmwr82A (Unicoos)

7.1.18 Youtube: Estudi de la funció $f(x) = \ln(4 - 2x)$

Solució: https://youtu.be/a7mRvMyayVM (Matex con Andrés)

7.1.19 Youtube: Estudi de la monotonia (creixement, decreixement, màxims, mínims) de la funció $f(x) = x^2 e^{-x^2}$ Solució: https://youtu.be/GhD6WGpfgsU (Mosta Profe)

7.1.20 Estudia la monotonia de la funció $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$

7.1.21 Youtube: Estudi de la monotonia de la funció $f(x) = (x+1)e^{-x}$

Solució: https://youtu.be/oCmnGx9lXfM (profesor10demates)

7.1.22 Youtube: Estudi de la funció $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

Solució: https://youtu.be/62eVZkT0ql8 (profesor10demates)

7.1.23 Youtube: Estudi de la funció $f(x) = (x+1)e^{-x}$

Solució: https://youtu.be/lWwLYOvU4kM

7.1.24 Youtube: Estudi de la funció $f(x) = e^{(x^2)} - 1$

Solució: https://youtu.be/arkMDKcy2L0

7.1.24 Youtube: Estudi de la funció $f(x) = e^{1-x^2}$ (sense curvatura)

Solució: https://youtu.be/DeYx7UlleS8 (8CIFRAS)

7.1.25 Estudi de la funció $f(x) = (x^2 - 1)e^{-x}$

7.1.26 Estudi complet de la funció $f(x) = \frac{e^x}{(x-1)^2}$

7.1.27 Estudi de la funció $f(x) = (x-1)^2\, e^x$

a) Domini i asímptotes verticals. b) Comportament en l'infinit.
c) Signe. d) Monotonia. e) Gràfica.

7.1.28 Estudi de la funció $f(x) = \frac{x^2 - 8}{e^x}$

a) Domini i asímptotes verticals. b) Comportament en l'infinit.
c) Signe. d) Monotonia. e) Gràfica.

7.1.29 Estudi de la funció $f(x) = \ln\left(\frac{x^2}{x-1}\right)$ (amb curvatura)

7.2 Problemes PAU TEC amb funcions exponencials i logarítmiques.

7.2.1 Sigui la funció $f(x) = \frac{ln(x)}{x}$ definida en el domini x > 0, en què ln és el logaritme neperià.

a) Trobeu les coordenades d'un punt de la corba y = f(x) en el qual la recta tangent a la corba sigui horitzontal i analitzeu si la funció té un extrem relatiu en aquest punt.

b) Determineu si la funció f(x) té alguna asímptota horitzontal.

c) ~~Calculeu l'àrea de la regió delimitada per la corba y = f(x) i les rectes $x = 1$ i $x = e$~~. Feu un dibuix aproximat de la gràfica de la funció en el domini 0 < x < 5, ~~en què quedi representada l'àrea que heu calculat~~.

PAU CAT TEC JUNY 2021 2.4 (Solució: PAUTEC pàg. 663)

7.2.2 Considereu la funció $f(x) = e^{x-1} - x - 1$.

a) Estudieu-ne la continuïtat, els extrems relatius i els intervals de creixement i decreixement.

b) Demostreu que l'equació $f(x) = 0$ té exactament dues solucions entre x = –1 i x = 3.

Sol: min(1,-1) creixent(1, +∞) PAU CAT TEC JUNY 2021 2.6 (Solució: PAUTEC pàg. 667)

7.2.3 Considereu la funció $f(x) = \frac{ln(x)}{x}$.

a) Calculeu el domini de la funció f, els punts de tall de la gràfica de f amb els eixos de coordenades, i els intervals de creixement i decreixement de f.

~~b) Calculeu l'àrea de la regió del pla determinada per la gràfica de la funció f, les rectes x = 1 i x = e, i l'eix de les abscisses.~~

PAU CAT TEC SET 2019 5.6 (Solució: PAUTEC pàg. 554)

7.2.4 Sigui la funció $f(x) = e^x - x - 2$.

a) Demostreu que la funció f té una arrel (un zero) en l'interval [0, 2].

b) Comproveu que la funció és monòtona en l'interval [0, 2] i calculeu les coordenades dels punts mínim absolut i màxim absolut de la funció en aquest interval.

PAU CAT TEC SET 2015 5.3

7.2.5 Donades les funcions $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ i $g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$:

a) Comproveu que $[g(x)]^2 - [f(x)]^2 = 1$

b) Comproveu també que $f'(x) = g(x)$ i $g'(x) = f(x)$

c) Comproveu que $f(x+y) = f(x) \cdot g(x) + f(y) \cdot g(x)$

d) Calculeu $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ dividint per e^x el numerador i el denominador; amb un procediment similar (però no igual), trobeu $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$

PAU CAT TEC SET 2008 4.5

7.2.6 Donada la funció $f(x) = e^{-x^2+2x}$.

a) Trobeu el seu domini i les possibles interseccions amb els eixos.

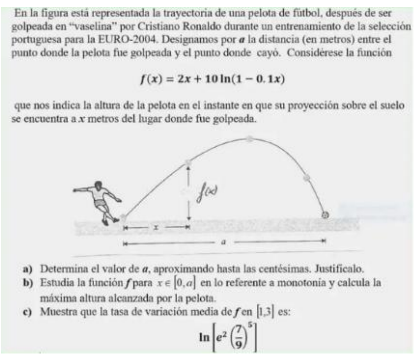
b) Trobeu els intervals on creix i decreix i els extrems relatius.

c) Trobeu les possibles asímptotes.

d) Feu la representació gràfica aproximada de la funció.

Dom: R. no tall horitzontal. tall vertical en (0,1). asímptota horitzontal en ambdós costats PAU CAT TEC JUNY 2006 3.5

7.2.7 El consum d'un cotxe depèn de la seva velocitat v (expressada en km/h) segons la funció $f(v) = \frac{3e^{0,012v}}{v}$ (en litres/km). Quina és la velocitat més econòmica? PAU CAT TEC JUNY 2004 4.3


En la figura está representada la trayectoria de una pelota de fútbol, después de ser golpeada en "vaselina" por Cristiano Ronaldo durante un entrenamiento de la selección portuguesa para la EURO-2004. Designamos por a la distancia (en metros) entre el punto donde la pelota fue golpeada y el punto donde cayó. Considérese la función

$$f(x) = 2x + 10\ln(1 - 0.1x)$$

que nos indica la altura de la pelota en el instante en que su proyección sobre el suelo se encuentra a x metros del lugar donde fue golpeada.

a) Determina el valor de a, aproximando hasta las centésimas. Justifícalo.

b) Estudia la función f para $x \in [0, a]$ en lo referente a monotonía y calcula la máxima altura alcanzada por la pelota.

c) Muestra que la tasa de variación media de f en $[1,3]$ es:

$$\ln\left[e^2\left(\frac{7}{9}\right)^5\right]$$

7.3 Problemes PAU CCSS amb funcions exponencials i logarítmiques.

7.3.1 La funció derivada d'una funció f és $f'(x) = e^{-2x}(x - x^2)$.
a) Estudieu el creixement i el decreixement de la funció f.
b) Si la funció f té extrems relatius, indiqueu-ne les abscisses i classifiqueu-los.

PAU CAT CCSS JUNY 2016 2.5

7.3.2 La funció derivada d'una funció f és $f'(x) = e^{-x} \cdot (x - x^2)$.
a) Estudieu el creixement i el decreixement de la funció f.
b) Si la funció f té extrems relatius, indiqueu-ne les abscisses i classifiqueu-los.

PAU CAT CCSS SET 2014 5.3

7.3.3 Sigui la funció $f(x) = x \cdot e^x$.
a) Si la funció f té extrems relatius, determineu-los i classifiqueu-los.
b) Calculeu la recta tangent a la gràfica de f en el punt d'abscissa x=0.

PAU CAT CCSS JUNY 2014 3.6

7.3.4 Donada una funció f, sabem que $f'(x) = e^{-x} \cdot (2x^2 - 3x)$.
a)Estudieu el creixement i el decreixement de la funció f.
b) Si la funció f té extrems relatius, indiqueu-ne les abscisses i classifiqueu-los.

PAU CAT CCSS SET 2013 1.1

7.3.5 Segons uns estudis de laboratori, l'evolució de la població en un cultiu de bacteris al llarg del temps segueix la funció $f(t) = 30 \cdot (1 - e^{-t}) + 10$, on t són els dies que han transcorregut des de l'inici de l'experiment, i $f(t)$ és la població, en milions de bacteris.
a) Quina població hi ha en el moment de començar l'experiment? Justifiqueu si en algun moment hi arribarà a haver 40 milions de bacteris.
b) Hi haurà algun moment en què la població sigui màxima? Justifiqueu la resposta.

PAU CAT CCSS JUNY 2013 3.5

7.3.6 Considereu la funció $f(x) = x - e^{-3x}$.
a) Indiqueu-ne el domini, i demostreu que f és estrictament creixent en tot el domini.
b) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de f en el punt d'abscissa x=0.

PAU CAT CCSS JUNY 2011 1.6

7.3.7 Considereu la funció $f(x) = x - \ln(x)$.
a) Indiqueu-ne el domini. Determineu l'asímptota vertical de la funció f.
b) Determineu els intervals en què la funció f és creixent i els intervals en què és decreixent, i classifiqueu-ne els extrems possibles.

PAU CAT CCSS JUNY 2011 4.1(Solució: PAUCCSS pàg. 305)

7.3.8 Un bosc té una massa forestal de 40000m^3 de fusta. Es calcula que la pluja àcida i els incendis provoquen una disminució del 6% anual de l'esmentada massa forestal, que es pot expressar en termes de la funció $F(x) = 40000 \cdot 0{,}94^t$, en què F(t) és la massa forestal que queda passats t anys.
a) Justifiqueu que la funció F és estrictament decreixent.
b) D'aquí a quants anys la massa forestal s'haurà reduït a la meitat?

PAU CAT CCSS JUNY 2011 4.6

7.3.9 Donada la funció $f(x) = x^2 \cdot e^x$:
a) Justifiqueu si hi ha cap valor de x que compleixi $f(x) < 0$. Hi ha cap valor de x que compleixi $f(x) = 0$?
b) Indiqueu si la funció f és creixent o decreixent en el punt x = –1. Estudieu el creixement de la funció f per als valors que compleixen x > 0.

PAU CAT CCSS JUNY 2010 5.5

7.3.10 Determineu els intervals de creixement i decreixement, així com els màxims i mínims, de la funció $f(x) = x^2 e^{-x}$.

PAU CAT CCSS JUNY 2008 2.2

7.4 Determinació de recta tangent amb funcions exp i log.

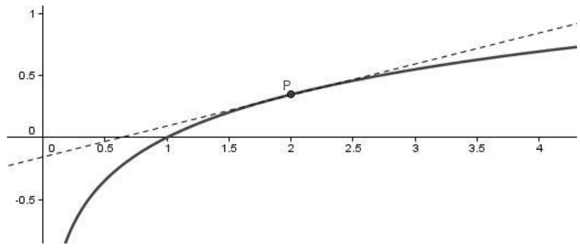
7.4.1 Exemple resolt.

Determina la recta tangent a la funció $f(x)=\ln\left(\sqrt{x}\right)$ en el punt x = 2

Solució: $f(x) = ln\left(\sqrt{x}\right) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}$

La recta tangent és de la forma $y = a\,x + b$, on $a = f'(2) = \frac{1}{4} = 0.25$

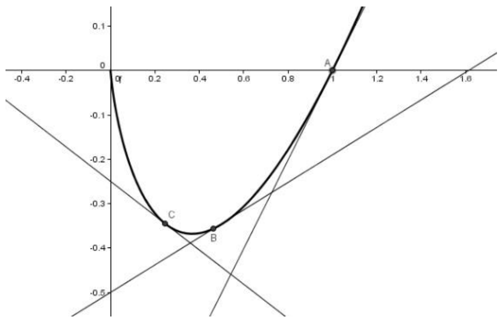
y $b = f(2) - 2 \cdot f'(2) = -0.153$ → La recta tangent és $y = 0.25x - 0.153$



7.4.2 Recta tangent amb funcions exponencials i logarítmiques. Determina la recta tangent a la funció en el punt $x = p$ indicat.

a) $f(x) = e^x$	$p = 0$	b) $f(x) = xe^x$	$p = 0$
c) $f(x) = 2xe^x$	$p = 0$	d) $f(x) = e^{-2x}$	$p = 0$
e) $f(x) = (2x-1)e^x$	$p = 0$	f) $f(x) = \dfrac{x-2}{e^x}$	$p = 0$
g) $f(x) = e^{1-x^2}$	$p = 1$	h) $f(x) = 5^{x-2}$	$p = 2$
i) $f(x) = 6^x$	$p = 2$	j) $f(x) = \ln(1-x)$	$p = 0$
k) $f(x) = (x+1)\ln(x)$	$p = 1$	l) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$	$p = 1$
m) $f(x) = \ln\left(x^2+1\right)$	$p = 1$	n) $f(x) = \log_2(3x+1)$	$p = 1$

7.4.3 Esbrina l'equació de la recta tangent a la corba d'equació $f(x) = x\,ln\,x$
en el punt d'abscissa x=1, x=0.5 i x=0.25



7.4.4 Sigui la funció $f(x) = x\,e^{x-1}$.

a) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció f en el punt d'abscissa x = 1.

b) Determineu en quins intervals la funció f és creixent i en quins intervals és decreixent.

PAU CAT TEC JUNY 2016 3.3 Solució: https://youtu.be/f1bIBk36v38

7.4.5 Considereu la funció $f(x) = x \cdot e^{-x}$.

a) Indiqueu-ne els extrems relatius, si n'hi ha, i classifiqueu-los.

b) Escriviu l'equació de la recta tangent a la corba en el punt d'abscissa 0.

PAU CAT CCSS JUNY 2010 4.3

7.4.6 Donada la funció $f(x) = \frac{x+1}{e^x}$, determineu l'equació de la recta tangent a la seva gràfica en el punt on s'anul·la la segona derivada.

PAU CAT TEC SET 2000 6.2

7.4.7 Considereu la funció $y = \ln x$ (on ln indica el logaritme en base e).

a) Determineu el seu domini de definició. Poseu en evidència que aquesta funció és creixent en tot el seu domini.

b) Feu un esquema senzill de la seva gràfica tot indicant els límits de la funció quan $x \to \infty$ i quan $x \to 0$.

c) Escriviu l'equació de la recta tangent a la gràfica d'aquesta funció en el punt d'abscissa x = 1.

d) Escriviu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció en el punt d'abscissa $x = a$ i determineu a per tal que aquesta recta sigui paral·lela a y = 2x.

PAU CAT CCSS SET 1999 2.6

7.4.8 Escriviu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $y = e^x$ en el punt en què aquesta gràfica talla l'eix de les y.

PAU CAT CCSS SET 1999 5.2

7.4.9 Escriviu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x) = e^{3x}$ en el punt (0, 1).

PAU CAT CCSS SET 1998 5.3

7.4.10 a) Calcula la derivada de la funció $f(x) = \ln(2x+1)$

b) Determina la recta tangent a aquesta funció al punt $x = 0$.

7.4.11 a) Deriva la funció $f(x) = x\,e^{3x}$

b) Determina la seva recta tangent en el punt $x = 0$

7.4.12 a) Deriva la funció $f(x) = x(\ln x)^2$

b) Determina la seva recta tangent en el punt $x = 1$

7.4.13 Youtube: Determina l'equació de la recta tangent a la funció $f(x) = \ln(2x+1) + 2$ en $x = 0$.

Solució: https://youtu.be/kjuXOpsQK8A

7.4.14 Youtube: Determina l'equació de la recta tangent a la funció $f(x) = 2e^{x+1}$ en el punt $x = 1$.

Solució: https://youtu.be/9zaHL5LiFOo

7.4.15 Youtube: Donada la funció $f(x) = x\,e^{x-1}$,

a) Determina la seva recta tangent en $x = 1$.

b) Estudia la seva monotonia: Intervals de creixement, decreixement, màxims i mínims.

Solució: https://youtu.be/f1bIBk36v38

7.4.16 Determina i representa la recta tangent a la funció $f(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{x}}$ en el punt $x = 0.8$.

7.5 Determinació del punt de tangència amb funcions exp i log.

7.5.1 Digueu per a quin valor de x la recta tangent a la corba $y = \ln(x^2+1)$ és paral·lela a la recta $y = x$. Escriviu l'equació d'aquesta tangent. PAU CAT TEC JUNY 2008 5.3

7.5.2 En quin punt la recta tangent a la funció $f(x) = x \cdot e^x$ és paral·lela a l'eix d'abscisses? Escriviu l'equació de la recta tangent en aquest punt.
PAU CAT TEC JUNY 2007 1.1

7.5.3 Calculeu en quin punt (si és que n'hi ha algun) la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x) = e^{2x}$ forma un angle de 45° amb l'eix de les x.
PAU CAT CCSS JUNY 2001 2.2

7.5.4 Calculeu l'abscissa del punt en què la tangent a la gràfica de la funció $f(x) = 2\ln x$ és paral·lela a la recta $16x - 2y = 7$.
PAU CAT CCSS SET 2000 2.4

7.5.5 En quin punt de la corba $f(x) = \ln x$ la recta tangent és paral·lela a la corda AB determinada pels punts A=(1,0) i B=(e,1) ? PAU CAT TEC JUNY 1998 3.4

7.5.6 Youtube: Determina els punts de la funció $f(x) = \ln\left(9x^2 - 4\right)$ on la recta tangent té pendent igual a 2. Solució: https://youtu.be/4tR-3rVQDcg (Pablo Borsoi - Mate Tutoriales)

7.5.7 Youtube: Determina la recta tangent a la funció $f(x) = x\ln x - x$ on la recta tangent té pendent igual a 1. Determina la recta tangent en aquest punt.
Solució: https://youtu.be/RRYYEIi6ISM (Pablo Samsó Aparici)

7.5.8 Donada la funció $f(x) = x^2 e^{x^2-1}$

a) Determina la recta tangent a la seva gràfica el punt $x = -1$.

b) Determina els punts de la seva gràfica en els què la recta tangent és horitzontal.

7.6 Funcions exp i log amb paràmetres.

7.6.1 Sigui la funció $f(x) = a \cdot e^{-x^2+bx}$, amb $a \neq 0$ 0 i $b \neq 0$.

a) Calculeu els valors de a i de b que fan que la funció tingui un extrem relatiu en el punt (1, e).

b) Per al cas a = 3 i b = 5, calculeu l'asímptota horitzontal de la funció f quan x tendeix a +∞.
PAU CAT TEC JUNY 2018 5.3

7.6.2 Siguin les funcions $f(x) = \frac{e^{ax+b}}{4}$ i $g(x) = +\sqrt{3x+4}$.

a) Determineu el domini i el recorregut de la funció g.

b) Calculeu per a quins valors de a i de b les gràfiques de les dues funcions són tangents (és a dir, tenen la mateixa recta tangent) en el punt d'abscissa x = 0.
AU CAT TEC SET 2014 5.2

7.6.3 Sigui $f(x) = x^2 \cdot e^{-ax}$ quan $a \neq 0$.

a) Calculeu el valor de a perquè aquesta funció tingui un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x = 2$.

b) Quan $a = 2$, classifiqueu-ne els extrems relatius. PAU CAT TEC JUNY 2011 1.6

7.6.4 Sigui $f(x): \Re \to \Re$ la funció definida per $f(x) = e^x(ax+b)$, on a i b són nombres reals.

a) Calculeu els valors de a i b per tal que la funció tingui un extrem relatiu en el punt $\left(3, e^3\right)$.

b) Per als valors de a i b obtinguts, digueu quin tipus d'extrem té la funció en el punt esmentat.
PAU CAT TEC SET 2006 4.1

7.6.5 Calculeu a i b de manera que $f(x) = a\ln(x) + bx^2 + x$ tingui extrems relatius en els punts d'abscisses x=1 i x=2, i digueu, en cada cas, si es tracta d'un màxim o d'un mínim.
PAU CAT CCSS JUNY 2005 1.3

7.6.6 Fa quatre anys es va repoblar un llac amb una nova espècie de peixos. Llavors es van introduir 100 exemplars d'aquesta nova espècie. Actualment s'estima que hi ha 25.000 exemplars. S'estima que el nombre N de peixos ve donat en funció del temps t per la funció $N = Ae^{Bt}$, on A i B són dues constants. El temps t es considera expressat en anys des del moment de la repoblació. Quant temps haurem d'esperar perquè hi hagi 200.000 exemplars?
PAU CAT CCSS JUNY 2000 1.6

7.7 Repàs de recta tangent amb funcions exp i log.

7.7.1 Donada la funció $f(x) = \frac{e^x}{x^2-3}$, trobeu els punts en els què la gràfica de la corba $y = f(x)$ té tangent horitzontal.

7.7.2 Donada la funció $f(x) = xe^x$, determina l'equació de la seva recta tangent a l'origen de coordenades.

7.7.3 Donada la funció $f(x) = \ln(2x+1)$, determineu el seu domini i la seva recta tangent en el punt d'abscissa $x = 1/2$.

7.7.4 Donada la funció $f(x) = \ln(1+x^2)$, determineu les equacions de les rectes tangents a la gràfica en els punts d'inflexió.

7.7.5 Donada la funció $f(x) = ln\left(\frac{x^2}{x-1}\right)$, trobeu el seu domini de definició i el punt de la seva gràfica en el què la seva recta tangent és paral·lela a l'eix OX.

7.7.6 Donada la funció $f(x) = xe^{-x}$, determineu la recta tangent a la corba $y = f(x)$ en $x = 2$.

7.7.7 Donada la funció $f(x) = \frac{e^{-x}}{x^2+1}$, detemineu l'equació de la recta tangent a la corba $y = f(x)$ en el punt d'abscissa $x = 0$.

7.7.8 Donada la funció $f(x) = \frac{ln\,x}{x}$, determineu un punt de la seva gràfica en el què la recta tangent sigui horitzontal.

7.7.9 Donada la funció $f(x) = e^{3x-2}$, trobeu el punt de la seva gràfica en el què la recta tangent té pendent igual a $\frac{3}{e}$, i escriviu l'equació d'aquesta recta tangent.

7.7.10 Donada la funció $f(x) = x\ln x$, trobeu (si existeix) la recta tangent en $x = 1$.

7.7.11 Donada la funció $f(x) = x - \ln(x^2 - 1)$, determineu l'equació de la recta tangent en el punt $x = 0$.

7.7.12 Estudi de la monotonia i curvatura de la funció $f(x) = xe^{3x}$

7.7.13 Estudi de la monotonia i curvatura de la funció $f(x) = e^x - x$

7.7.14 Domini, comportament en l'infinit i monotonia de la funció $f(x) = \dfrac{1}{e^x - x}$

7.7.15 a) Monotonia i curvatura de la funció $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

b) Determinació de la recta tangent a la gràfica en els punts d'inflexió.

7.7.16 Determina el punt de la funció $f(x) = ln\left(\frac{x^2}{x-1}\right)$ en el punt en què la seva recta tangent sigui paral·lela a l'eix X.

7.7.17 Estudi de la monotonía de la funció $f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$

7.7.18 Monotonia i curvatura de la funció $f(x) = xe^{2x}$

7.7.19 Monotonia i curvatura de la funció $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$.

7.7.20 Monotonia i curvatura de la funció $f(x) = x\ln^2 x = x(\ln x)^2$.

7.7.21 Monotonia i curvatura de la funció $f(x) = e^{-x}(x^2 + 1)$.

7.7.22 Monotonia de la funció $f(x) = \frac{ex-e^x}{x}$.

7.7.23 Determina la recta tangent a la funció $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4} + \dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$ en el punt $x = 0$.

7.7.24 Monotonia i curvatura de la funció $f(x) = x^2e^{-x}$.

7.7.25 a) Determina la recta tangent a la funció $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x^2+1}$ en el punt $x = 0$

b) Estudi de la seva monotonia.

7.7.26 Estudi de la monotonia de la funció $f(x) = 3x^2e^{-x}$

7.7.27 Estudi del domini i la monotonia de la funció $f(x)=x-\ln\left(x^2-1\right)$

7.8 Funcions exponencials i logarítmiques amb base general.

7.8.1 Estudi complet de la funció $f(x)=x\cdot 3^{-x}$

a) Signe (positiva, negativa, zeros)
b) Comportament de la funció en l'infinit (amb taula de valors)
c) Monotonia (creixent, decreixent, extrems relatius)
d) Curvatura (còncava, convexa, punts d'inflexió)
e) Gràfica aproximada.

7.8.2 Estudi complet de la funció $f(x)=x^2\cdot 5^{-x}$

a) Signe (positiva, negativa, zeros)
b) Comportament de la funció en l'infinit (amb taula de valors)
c) Monotonia (creixent, decreixent, extrems relatius)
d) Curvatura (còncava, convexa, punts d'inflexió)
e) Gràfica aproximada.

7.8.3 Durant la darrera epidèmia d'Ebola es va considerar que, sense cap intervenció, el virus es propagava augmentant en un 3 % diari el nombre d'afectats. Suposeu que en una població, avui, hi ha 25 persones infectades.

a) Escriviu la fórmula de la funció que dóna el nombre de persones infectades en passar els dies. Quantes persones estaran infectades al cap de 20 dies?
b) A partir d'una data determinada, en aquesta població s'apliquen unes mesures sanitàries que permeten que el nombre de persones infectades disminueixi segons la funció $g(x) = 1.000\cdot(0{,}95)^x$. Si considerem controlada l'epidèmia quan el nombre d'afectats és igual o inferior a 10 persones, quants dies hauran de passar després d'aplicar les mesures sanitàries per a poder declarar controlada l'epidèmia? PAU CAT CCSS JUNY 2016 3.4

7.8.4 Estudi de la funció $f(x)=x\cdot 2^x$

7.8.5 Estudi de la funció $f(x)=x^2\cdot 3^x$

7.8.6 Estudi de la funció $f(x)=(x-2)\cdot 5^x$

7.8.7 Estudi de la funció $f(x)=\dfrac{x}{3^x}$

7.8.8 Estudi de la funció $f(x)=2^{1-x^2}$ (amb curvatura)

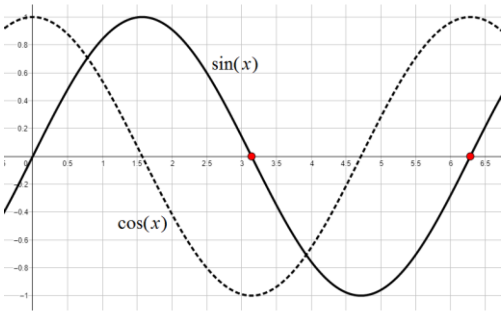
7.8.9 Estudi de la funció $f(x)=x\cdot\log_2(x)$

7.8.10 Estudi de la funció $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$

7.8.11 Estudi de la funció $f(x)=\dfrac{x}{\log x}$

8 Derivació amb funcions trigonomètriques.

8.1 Derivació i estudi de funcions trigonomètriques.



Les fórmules de les derivades trigonomètriques:

$f(x)=\sin(x)\rightarrow f'(x)=\cos(x)$

$f(x)=\cos(x)\rightarrow f'(x)=-\sin(x)$

$f(x)=\tan(x)\rightarrow f'(x)=1+\tan^2(x)$

només funcionen si la unitat de mesura angular són els radians. .

8.1.1 Calcula la derivada de $f(x)=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$

8.1.2 Donada la funció $f(x)=\cos^3 x$, resol l'equació $f'(x)=0$

8.1.3 Considereu la funció $f(x)=2002x^2+ax+b+\sin x$, amb a, b reals. Calculeu els valors dels paràmetres a, b perquè f passi pel punt (0, 3) i tingui un extrem relatiu en aquest punt. Expliqueu raonadament quin tipus d'extrem té f en aquest punt. PAU CAT CCSS SET 2002 1.5

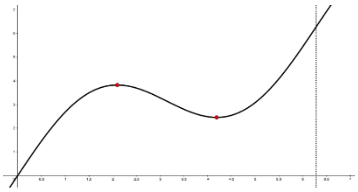
8.1.4 Derivació de funcions trigonomètriques amb regla de la cadena.
Determina la derivada de les següents funcions:

a) $f(x)=\sin\left(5x^3\right)$ b) $f(x)=\sin^2(x)=(\sin x)^2$ c) $f(x)=\sqrt{\sin(x)}$

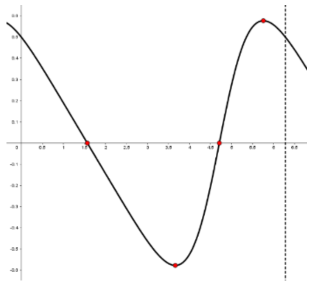
d) $f(x)=3\cos^2(5x-1)$ e) $f(x)=x^2\cos(3x)$

8.1.5 Calculeu la primera i segona derivada de la funció $f(x)=\dfrac{\sin x}{2-\cos x}$

8.1.6 Estudia la monotonia de la funció $f(x)=x+2\sin x$ en l'interval $(0,2\pi)$.



8.1.7 Estudia la monotonia de la funció $f(x)=\dfrac{\cos x}{2+\sin x}$ en l'interval $(0,2\pi)$.



8.1.8 Estudia la monotonia de la funció $f(x)=x-2\sin x$ en l'interval $-\pi<x<\pi$.

8.1.9 Determineu els màxims i mínims relatius de la funció $f(x)=\dfrac{x}{2}+\cos x$ en l'interval $0<x<2\pi$

8.1.10 Determineu els valors dels paràmetres a i b per als què la funció $f(x)=a\cos^2 x+bx^3+x^2$ tingui un punt d'inflexió en $x=0$

8.1.11 Donada la funció $f(x)=\sin^2 x$, determina:

a) Els seus extrems relatius en l'interval $0<x<\pi$.

b) Els seus punts d'inflexió en l'interval $0<x<\dfrac{\pi}{2}$

8.1.12 Determina els màxims i mínims de la funció $f(x)=\dfrac{\sin x}{2-\cos x}$ definida en l'interval tancat $[-2\pi,2\pi]$.

8.1.13 Comprova si $f(x)=\dfrac{e^x+\sin x}{e^x}$ té un màxim relatiu en $x=\dfrac{\pi}{4}$.

8.1.14 Exercici del Youtube Determina les següents derivades:

a) $f(x)=\cos 2x$ b) $f(x)=\cos^2 x$

c) $f(x)=\cos 3x^2$ d) $f(x)=\cos^3 x$

Solució: https://youtu.be/cQuWrhTArgA (Matemáticas profe Alex)

8.1.15 Exercici del Youtube Determina la derivada de les següents funcions:

a) $f(x)=\cos\left(5x^3-3x^2\right)$ b) $f(x)=\cos^3\left(2x^2+3x\right)$

c) $f(x)=\cos^5\left(x^2+x\right)$

Solució: https://youtu.be/3_u1WTd0exY (Matemáticas profe Alex)

8.1.16 Exercici del Youtube Determina i simplifica la derivada de la funció $f(x)=\dfrac{\sin x}{1-\cos x}$

Solució: https://youtu.be/4n_dIcG8b00 (MateFacil)

8.1.17 Exercici del Youtube Estudi de la monotonia i curvatura de la funció $f(x)=x-\sin x$ per a $x\in[0,2\pi]$

Solució: https://youtu.be/SOjzxmP5aC0 (unicoos)

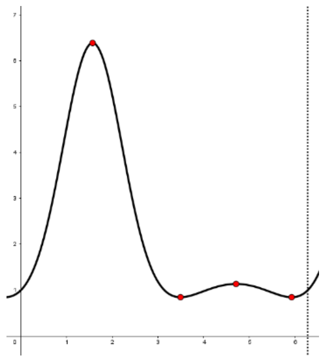
8.1.18 Exercici del Youtube a) Calcula la derivada de la funció $f(x)=2x\sin^3 x+3\cos x-\cos^3 x$

b) Simplifica la derivada anterior treient factor comú i aplicant la identitat fonamental de la trigonometria: $\sin^2 x+\cos^2 x=1$

Solució: https://youtu.be/ZvuDGyUt5hE?si=o_CooJVkZsqaFLCO&t=461 (Mates con Andrés)

8.1.19 Determina els màxims i mínims relatius de la funció

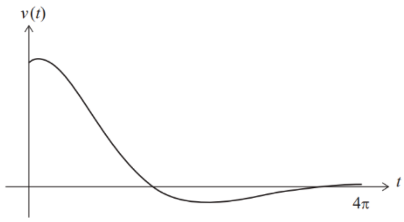
$f(x)=e^{2\sin x}-\sin(x)$, per a $0\le x\le 2\pi$.



8.1.20

Una partícula se mueve en línea recta, de modo tal que su velocidad (vms^{-1}), en el instante t segundos viene dada por $v(t)=4e^{\frac{-t}{3}}\cos\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$, para $0\le t\le 4\pi$.

El gráfico de v se muestra en la siguiente figura.



Sea t_1 el primer instante en el que la aceleración de la partícula es igual a cero.

a) Halle el valor de t_1.

Sea t_2 el segundo instante en el que la partícula está instantáneamente en reposo.

b) Halle el valor de t_2.

IB 2023 (Solució: CompendiumIB pàg. 3718)

8.2.1 Determina l'equació de la recta tangent associada a la gràfica de les següents funcions al punt indicat:

a) $f(x)=\sin 3x+x-2$, $p=0$ b) $f(x)=x-3\sin x$, $p=\pi/2$

c) $f(x)=x^3\cos x$, $p=1$ d) $f(x)=\dfrac{1}{\sin x+\cos x}$, $p=0$

e) $f(x)=\sin x\cos x$, $p=\pi$ f) $f(x)=x\sin x$, $p=\pi$

g) $f(x)=e^x\cos x$, $p=0$ h) $f(x)=\dfrac{\cos x}{x}$, $p=\dfrac{\pi}{2}$

i) $f(x)=\cos\left(x^2\right)$, $p=1$ j) $f(x)=\cos^2 x$, $p=2$

k) $f(x)=\sqrt{\sin x}$, $p=\dfrac{\pi}{2}$ l) $f(x)=\ln(\cos x)$, $p=\dfrac{\pi}{4}$

8.2.2 Donada la funció $f(x)=e^x\cdot\cos(x)$, determina l'equació de la recta tangent a la seva gràfica en el punt d'abscissa $x=0$.

8.2.3 Determineu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x)=\frac{1}{1+(sin\,x)^2}$ al punt $\left(\frac{\pi}{4},f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

8.2.4 Sigui la funció $f(x)=e^x\sin x$. Determina:

a) El màxim de la funció en l'interval $(0,\pi)$.

b) L'equació de les tangents a la seva gràfica en els extrems de l'interval anterior.

8.2.5 Determina els valors de les constants A, B, C i D per als què la gràfica de la funció $f(x)=A\sin x+Bx^2+Cx+D$ té tangent horitzontal en el punt $(0,4)$ i la seva segona derivada és $f''(x)=3\sin x-10$.

8.2.6 Determina la recta tangent a la funció $f(x)=\cos^2 x$ en el punt $p=\dfrac{\pi}{4}$

8.3 Continuïtat i derivabilitat amb funcions trigonomètriques.

8.3.1 Determina el valor de m per al qual la funció $f(x)=\begin{cases} m(x+1)e^{2x} & x\le 0\\ \frac{(x+1)\,sin\,x}{x} & x>0\end{cases}$

és contínua en $x=0$.

PAU València Juny 2014

8.3.2 Sigui la funció $f(x)=\begin{cases} x^2+3x+1 & x<0\\ sin(\beta x)+cos(\beta x) & x\ge 0\end{cases}$

a) Determina el valor de β per al què f sigui derivable en $x=0$.

b) Calcula la integral de f sobre l'interval $\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$

PAU Aragón 02

8.3.3 Sigui $f(x)=\begin{cases} 1/e^x & x\le 0\\ a\cos x+b & 0<x\le\pi\\ sin\,x-ax & x>\pi\end{cases}$

Determineu els valors de a i b per als què la funció és contínua en IR.

8.3.4 a) Apliqueu el teorema de Bolzano per a demostrar que l'equació $\cos x=x^2-1$ té solucions positives. b) Té l'equació $\cos x=x^2-1$ alguna solució negativa? Raoneu la resposta.

8.3.5 Demostri que l'equació $sin(x^2) = x - 1$ té alguna solució positiva.

8.3.6 Youtube Estudia la continuïtat i derivabilitat de la funció $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ sin\, x & x > 0 \end{cases}$

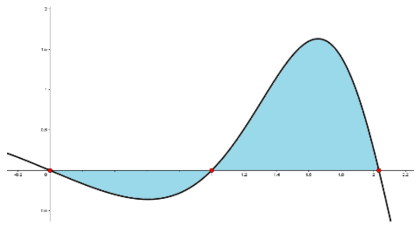
Solució: https://youtu.be/7rkDO241QLo (lasmatematicas.es)

8.3.7 Determina els valors d'a i b per als què la funció $f(x) = \begin{cases} ax + 1 & x < 0 \\ sin\, x + b & x \geq 0 \end{cases}$
És contínua i derivable en $x = 0$

8.4 Integració amb funcions trigonomètriques.

Exemple resolt. Calcula l'àrea delimitada per la gràfica de la funció $f(x) = x\sin(x^2 - 1)$ entre les tres primeres arrels no negatives, tal i com es mostra a la següent imatge:

$$f(x) = x\, sin(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ sin(x^2 - 1) = 0 \end{cases}$$



$$sin(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{1} = 1 \\ x^2 - 1 = \pi \Leftrightarrow x = \sqrt{\pi + 1} \cong 2.035 \\ \ldots \text{(observant la gràfica no cal determinar més solucions)} \end{cases}$$

$$A = \left|\int_0^1 f(x)dx\right| + \int_1^{2.035} f(x)dx = |F(1) - F(0)| + F(2.035) - F(1) = (*)$$

$$F(x) = \int x\sin(x^2 - 1)dx = \frac{1}{2}\int \sin(x^2 - 1)(2x)dx = \frac{1}{2}\int \sin u\, du = \frac{1}{2}(-\cos u) + C =$$

$$u = x^2 - 1 \rightarrow u' = 2x$$

$$= \frac{-\cos(x^2 - 1)}{2} + C$$

$$F(0) \cong -0.27 \qquad F(1) = \frac{-1}{2} \qquad F(2.035) = \frac{1}{2}$$

$$(*) \cong \left|\frac{-1}{2} - (-0.27)\right| + \frac{1}{2} - \frac{-1}{2} = |-0.23| + 1 = 0.23 + 1 = 1.23$$

8.4.1 Sigui la funció $f(x) = x\sin x$ i sigui T la recta tangent a la seva gràfica en $x = \pi$. Determina:
a) L'equació de T.
b) L'àrea tancada entre T els eixos coordenats.

8.4.2 Sigui la funció $f(x) = x\sin 2x$. Determina la integral d'aquesta funció entre $x = 0$ i el seu primer zero positiu.

8.4.3 Determina l'àrea tancada per la gràfica de la funció $f(x) = x^2 \sin x$ i l'eix d'abcises entre l'origen i el primer punt positiu on f s'anul·la.

8.4.4 Sigui $f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & x < 0 \\ x^2 + 2a\, cos(x) & 0 \leq x < \pi \\ ax^2 + b & x \geq \pi \end{cases}$
a) Determina els valors d'a i b per als què la funció és contínua per a tot valor de x.
b) Estudia la derivabilitat de la funció anterior.
c) Determina la derivada de $f(x)$ en l'interval $(0, \pi)$
d) Calcula $\int_0^{2\pi} f(x)dx$

8.4.5 Sigui $f(x)=\begin{cases} x^2+2x & x\le 0 \\ sin(ax) & 0<x<\pi \\ (x-\pi)^2+1 & \pi\le x \end{cases}$

a) Determina els valors d'a per als què $f(x)$ és una funció contínua.

b) Estudia la derivabilitat de $f(x)$ per als valors trobats a l'apartat anterior.

c) Calcula $\int_{-1}^{0} f(x)dx$

8.4.6 Calculeu la integral $\int_0^{\pi/2} e^{\sin x}\sin x\cos x dx$

8.4.7 Calcula $\int \frac{\cos^2 x}{\sin x}dx$

8.4.8 Exercici resolt pas a pas Integració per substitució u i funcions trigonomètriques.

a) $\int \sin(4x)dx$ b) $\int \cos(2x-6)dx$ c) $\int \sin x\cos^2 x dx$

d) $\int x^2\cos(x^3-2)dx$ e) $\int \sin 3x\cos 3x dx$ f) $\int \cos^2 x\sin^3 x dx$

g) $\int \sin^4 x\cos x dx$ h) $\int \sin x\cos^2 x dx$ i) $\int \sin^3 x\cos^4 x dx$

j) $\int \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}dx$

8.4.9 Calcula $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{(\sin x+1)^2}dx$

8.5 Teorema de L'Hôpital amb funcions trigonomètriques.

8.5.1 Calcula $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{7x^2}$

8.5.2 Calcula $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(4x)\sin(5x)}{(x-x^2)^2}$

8.5.3 Determina el valor de k per al què $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}+kx}{x-\sin x}=2$

8.5.4 Determina, aplicant Hopital, $\lim_{x\to 1}\frac{1-\cos(2\pi x)}{(x-1)^2}$

8.5.5 Calcula $\lim_{x\to 0}\frac{1+x-e^x}{\sin^2 x}$

8.5.6 Calculeu $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x\cos x-1}{\sin x-x+1-\cos x}$

8.5.7 Calculeu $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{\sin^2 x}$

8.5.8 Donada la funció $f(x)=\begin{cases} e^{1/x} & x<0 \\ k & x=0 \\ \frac{cos\,x-1}{sin\,x} & x>0 \end{cases}$ Determina el valor de k per al què la funció és contínua en $x=0$.

8.5.9 Calcula $\lim_{x\to 1}\frac{1-\cos(2\pi x)}{(x-1)^2}$

9 Problemes d'optimització.

9.1 Fases de la resolució.

Exemple resolt 1. Determineu, entre tots els rectangles de diagonal 10 m., aquell que té superfície màxima.

Solució: Funció: $\grave{A}rea(x,y)=x\cdot y$ (màxim)

Equació: $10^2=x^2+y^2 \Rightarrow y=\sqrt{100-x^2}$ (Teorema de Pitàgores)

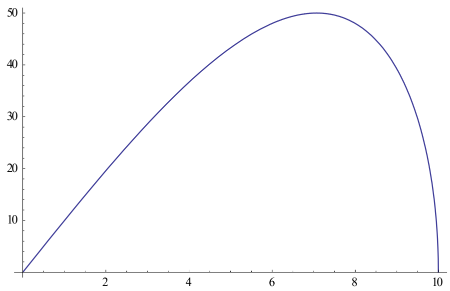
$$A(x)=x\sqrt{100-x^2} \to A'(x)=1\cdot\sqrt{100-x^2}+x\frac{-x}{\sqrt{100-x^2}}=\sqrt{100-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{100-x^2}}$$

$$A'(x)=\sqrt{100-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{100-x^2}}=0 \Leftrightarrow \sqrt{100-x^2}=\frac{x^2}{\sqrt{100-x^2}} \Leftrightarrow \left(\sqrt{100-x^2}\right)^2=x^2$$

$$\Leftrightarrow 100-x^2=x^2 \Leftrightarrow 100=2x^2 \Leftrightarrow \frac{100}{2}=x^2 \Leftrightarrow 100=x^2 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{50}\cong\pm 7.071$$

L'única solució acceptable és la positiva. Comprovem que es tracta d'un màxim:

	$x=7.071$	
$f'(6)=\frac{7}{2}>0$		$f'(8)=\frac{-14}{3}<0$
f creixent	Màxim relatiu	f decreixent



$y=\sqrt{100-\left(\sqrt{50}\right)^2}=\sqrt{50}$, la figura solució és un quadrat.

Exercici resolt 2. Trobeu el punt de la recta $2x+3y=5$ més pròxim a l'origen (0,0).

Solució: La **funció** que hem d'optimitzar és la distància $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

L'**equació** que lliga ambdues variables és l'equació de la recta: $2x+3y=5 \Rightarrow 3y=5-2x \Rightarrow y=\frac{5-2x}{3}$

Per tant la funció a optimitzar és $f(x)=\sqrt{x^2+\left(\frac{5-2x}{3}\right)^2}$

Derivem aquesta funció aplicant la regla de la cadena:

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2+\left(\frac{5-2x}{3}\right)^2}}\left(2x-\frac{4(5-2x)}{9}\right)$ $g(x)=x^2+\left(\frac{5-2x}{3}\right)^2=x^2+\frac{(5-2x)^2}{9} \Rightarrow g'(x)=2x+\frac{2(5-2x)(-2)}{9}=2x-\frac{4(5-2x)}{9}$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x^2+\left(\frac{5-2x}{3}\right)^2}}\left(2x-\frac{4(5-2x)}{9}\right)=0 \Leftrightarrow 2x-\frac{4(5-2x)}{9}=0 \Leftrightarrow x=\frac{10}{13}$$

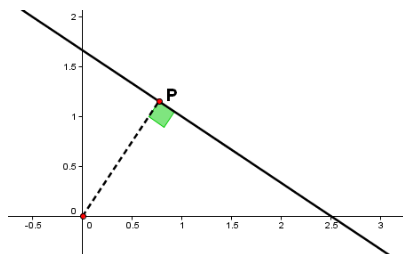
Podem garantir que es tracta efectivament d'un mínim avaluant la derivada a l'esquerra i a la dreta del punt $x=\frac{10}{13}\cong 0.77$

$f'(0.6)=-0.174<0 \to$ *decreixent*

$f'(0.8)=0.032>0 \to$ *creixent*

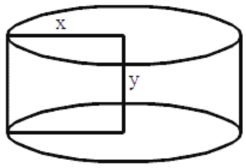
La solució és, doncs, $x=10/13$, $y=\frac{5-2(10/13)}{3}=\frac{15}{13}$,

és a dir, el punt $P=(0.77,1.15)$



Exercici resolt 3.

Una cartolina rectangular de perímetre 36 cm i dimensions x , y gira al voltant d'un costat fixe de longitud y desenvolupant un cilindre C. Per a quins valors de x i y obtenim un cilindre de volum màxim?



Solució: Perímetre : $2x+2y=36 \Rightarrow x+y=18 \Rightarrow y=18-x$

Volum : $A_b \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot y = \pi \cdot x^2 \cdot (18-x)$ $\quad V(x) = \pi x^2(18-x)$

$\pi x^2 \to 2\pi x \quad 18-x \to -1$

$\pi x^2(18-x) \to 2\pi x(18-x) + \pi\, x^2(-1) = 2\pi\, x(18-x) - \pi\, x^2 =$

$= \pi\, x(2(18-x)-x) = \pi\, x(36-2x-x) = \pi x(36-3x) = 3\pi\, x(12-x)$

$$V'(x) = 3\pi x(12-x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3\pi x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 12-x=0 \Rightarrow x = 12 \end{cases}$$

La solució x = 0 no té sentit.

Per a x = 12 observem que és un màxim relatiu pel criteri de la segona derivada:

$3\pi x \to 3\pi$

$12-x \to -1$

$3\pi x(12-x) \to 3\pi(12-x) + 3\pi x(-1) = 3\pi(12-x) - 3\pi x = 3\pi[(12-x)-x] =$

$3\pi(12-2x) = 6\pi(6-x)$ $\quad V''(x) = 6\pi(6-x)$ $\quad V''(12) = 6\pi(6-12) = -36\pi < 0$

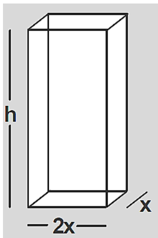
També podríem haver garantit el màxim en x = 12 avaluant la primera deriva de la funció just abans i després d'aquest punt: $V'(12.1) = -11.4 < 0$ $\quad V'(11.9) = 11.2 > 0$

Les dimensions de la cartolina són x = 12 , y = 18 – 12 = 6

Font: http://catedu.es/matematicas_mundo/PAU/Analisis_CNS.pdf

Exercici resolt 4.

Considereu un prisma recte de base rectangular, amb dos dels costats d'aquest rectangle de longitud doble que els altres dos, tal i com s'indicava a la figura. Trobeu les dimensions que ha de tenir aquest prisma per tal que la seva àrea total sigui 12 metres quadrats i que amb aquestes condicions tingui un volum màxim.



Solució:

$S = 2(2x^2 + 2xh + xh) = 12 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 2xh + xh = 6 \Leftrightarrow 2x^2 + 3xh = 6 \Leftrightarrow 3xh = 6 - 2x^2 \Leftrightarrow h = \dfrac{6-2x^2}{3x}$

$V = 2x \cdot x \cdot h = 2x^2\left(\dfrac{6-2x^2}{3x}\right) = \dfrac{2}{3}(6-2x^2)x = \dfrac{2}{3}(6x-2x^3)$

$V'(x) = \dfrac{2}{3}(6-6x^2) = \dfrac{12}{3}(1-x^2) = 4(1-x^2)$

$V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \begin{cases} 1 \\ -1 \text{ no aceptable} \end{cases}$

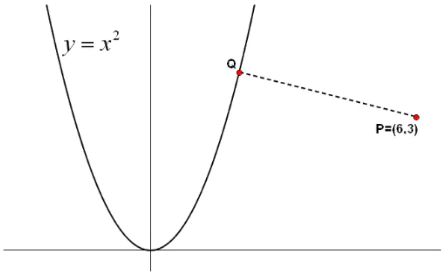
$V''(x) = 4(-2x) = -8x$

$V''(1) = -8 \Rightarrow$ és un màxim

Per tant la solució és x = 1 m , $h = \frac{6-2\cdot 1^2}{3\cdot 1} = \frac{4}{3}m$

Exercici resolt 5.

Determineu el punt Q de la gràfica $y = x^2$ més a prop del punt $P = (6,3)$



Solució:
Sigui $Q = (x, y)$ el punt que volem trobar.
Volem trobar el mínim de la funció distància entre dos punts, que és el mòdul del vector $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (x-6, y-3)$

$d(Q,P) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(x-6)^2 + (y-3)^2}$

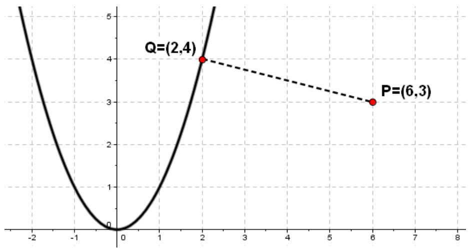
El punt pertany a la paràbola $y = x^2$, i per tant $d(x) = \sqrt{(x-6)^2 + (x^2-3)^2}$

Derivem: $d'(x) = \frac{1}{2\sqrt{(x-6)^2+(x^2-3)^2}}(2(x-6) + 2(x^2-3)2x) =$

$$= \frac{2x - 12 + 4x^3 - 12x}{2\sqrt{(x-6)^2 + (x^2-3)^2}} = \frac{4x^3 - 10x - 12}{2\sqrt{(x-6)^2 + (x^2-3)^2}} = \frac{2x^3 - 5x - 6}{\sqrt{(x-6)^2 + (x^2-3)^2}}$$

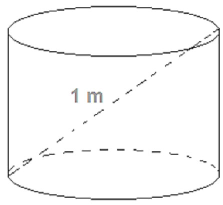
$$d'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^3 - 5x - 6}{\sqrt{(x-6)^2 + (x^2-3)^2}} = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 5x - 6 = 0$$

Resolem per Ruffini per obtenir l'única solució real possible $x = 2$.
A l'esquerra de $x = 2$ la derivada és negativa, i a la dreta de $x = 2$ la derivada és positiva, per tant es tracta efectivament d'un mínim.
La solució és, doncs, $x = 2, y = 2^2 = 4 \Rightarrow Q = (2,4)$

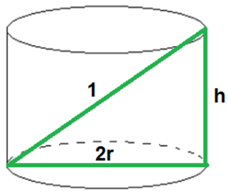


Exercici resolt 6.

Entre tots els cilindres d'un metre de diagonal, determineu l'alçària h i el radi r del que té volum màxim.



Solució:
Dintre del cilindre podem observar un triangle rectangle de hipotenusa 1, base 2r i altura h, en el qual podem aplicar Pitàgores:



$$1^2 = (2r)^2 + h^2 \Leftrightarrow 1 = 4r^2 + h^2 \Rightarrow 1 - h^2 = 4r^2 \Rightarrow \frac{1-h^2}{4} = r^2$$

$$V = A_{base} \cdot h = \pi r^2 h = \pi\left(\frac{1-h^2}{4}\right)h = \frac{\pi}{4}(1-h^2)h = \frac{\pi}{4}(h - h^3)$$

$$V' = \frac{\pi}{4}(1 - 3h^2) = 0 \Leftrightarrow 1 - 3h^2 = 0 \Leftrightarrow 1 = 3h^2 \Leftrightarrow \frac{1}{3} = h^2 \Leftrightarrow \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = h$$

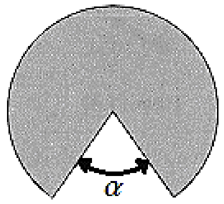
$$h = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

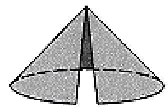
Podem garantir que el valor h és un màxim tenint veient que V' és una paràbola amb les branques cap a a vall o aplicant el criteri de la segona derivada.

$r^2 = \frac{1-h^2}{4} = \frac{1-1/3}{4} = \frac{2/3}{4} = \frac{1}{6} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$ Solució: $r = \frac{\sqrt{6}}{6}$, $h = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Exercici resolt 7.

Determina l'angle α d'un sector circular que hem d'eliminar d'un cercle de radi 1 pera construir un con de volum màxim.



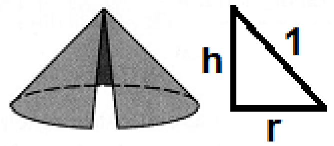


Solució:

Volum del con: $V = \frac{1}{3} A_b \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$

On r és el radi del cercle de la base del con i h és l'altura del con.

Al con tenim un triangle rectangle que relaciona el radi r de la base, l'altura h i la generatriu lateral que és 1.



$$r^2 + h^2 = 1^2 \Rightarrow r^2 = 1 - h^2$$

A més a més, sabem la relació entre el radi r i la longitud 1 del cercle de la base del con: $l = 2\pi r$

Però, per construcció, la longitud 1 del cercle de la base del con és la longitud del sector circular, que és proporcional a l'angle del sector (és un cercle de radi 1): $l = \frac{360-\alpha}{360} 2\pi$

Així doncs, ja tenim les equacions que relacionen V amb l'angle α .

Escrivim el volum V en funció de l'altura h:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h \Rightarrow V(h) = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(1 - h^2\right) \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(h - h^3\right) \Rightarrow$$

$$V'(h) = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(1 - 3h^2\right) \;\rightarrow V'(h) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\pi \cdot \left(1 - 3h^2\right) = 0 \Leftrightarrow 1 - 3h^2 = 0 \Leftrightarrow h = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$$

Solució vàlida és la positiva: $h = \sqrt{\frac{1}{3}}$.

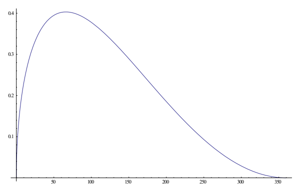
Després de fer un estudi de la monotonia a esquerra i dreta d'aquest valor ("Criteri de la primera derivada") observem que, efectivament, es tracta d'un màxim.

Per tant: $r^2 = 1 - h^2 = 1 - \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow r = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

Prenem només la solució positiva: $r = \sqrt{\frac{2}{3}}$ $\quad l = 2\pi r = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$

I per últim: $2\pi\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{360-\alpha}{360} 2\pi \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{360-\alpha}{360} \Leftrightarrow 360\sqrt{\frac{2}{3}} = 360 - \alpha \Leftrightarrow$

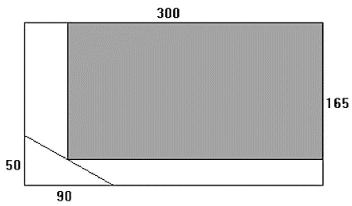
$$\alpha = 360 - 360\sqrt{\frac{2}{3}} = 360\left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right) = 66.0612^{\text{o}}$$



El volum és màxim per a l'angle $\alpha = 360\left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right) = 66.0612^{\text{o}}$

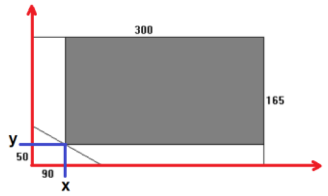
Exercici resolt 8.

Un mirall pla que tenia forma rectangular de costats 300 x 165 cm s'ha trencat per una cantonada, amb un tros petit en forma de triangle rectangle de catets 90 cm i 50 cm. Trobeu les dimensions del mirall rectangular d'àrea màxima que es pot retallar del tros que queda, de forma que els costats del nou mirall siguin paral·lels als costats del mirall inicial.



Solució:

Definim un sistema d'eixos de coordenades tal i com s'indica al següent esquema, on el punt P=(x,y) és la cantonada inferior esquerra del rectangle gris:



Per tant, l'àrea que volem maximalitzar és $A = (300 - x)(165 - y)$

La relació entre les dues variables x, y la trobem tenint en compte que el punt P=(x,y) ha d'estar a la recta que passa pels punts A=(90,0) y B=(0,50). Determinem la recta $y = ax + b$ que passa pels punts A=(90,0) y B=(0,50):

$$\begin{cases} 50 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 50 \\ 0 = a \cdot 90 + b = a \cdot 90 + 50 \Rightarrow a = \frac{-50}{90} = \frac{-5}{9} \end{cases}$$ La recta és $y = \frac{-5}{9}x + 50$

I per tant es queda la funció: $A(x) = (300 - x)(165 - (-5/9x + 50)) =$

$(300 - x)\left(165 + \frac{5}{9x} - 50\right) = (300 - x)(115 + 5/9x) = \frac{-5}{9}x^2 + \frac{155}{3}x + 34500$

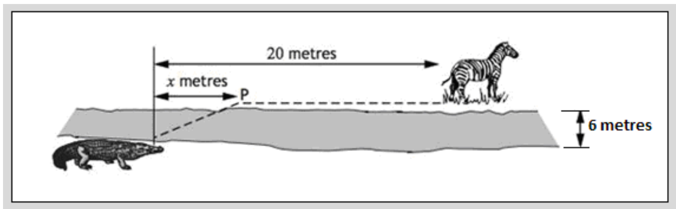
$\rightarrow A'(x) = \frac{-10}{9}x + \frac{155}{3} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{93}{2} = 46.5$

A(x) és una paràbola amb les branques cap avall, i per tant garantim que el punt anterior és un màxim. $y = \frac{-5}{9} \cdot \frac{93}{2} + 50 = \frac{145}{6} \approx\ 24.1667$ Per tant, les dimensions del nou mirall són:

$300 - x = 300 - 93/2 = 253.5$ $165 - y = 165 - 145/6 \approx\ 140.83$

Exercici resolt 9. Un cocodril vol capturar una zebra que està 20m més endavant però a l'altra banda d'un riu de 6 metres d'ample. El cocodril viatja a diferent velocitat a l'aigua i a terra: Per l'aigua a 1/5 metres per segon i per terra a 1/4 de metres per segon.

Calcula el temps mínim que necessitarà per atrapar la zebra.



Solució:

La part del trajecte que recorre per l'aigua es dedueix per Pitàgores: $\sqrt{6^2 + x^2}$. Si avança 1/5 metres per segon, cada metre necessita 5 segons, per tant el temps total nedant serà $5\sqrt{6^2 + x^2}$

La part restant la recorre per terra i és $x - 20$. Si avança a una velocitat de 1/4 metres per segon, cada metre necessita 4 segons, i per tant el temps serà $4(20 - x)$

La funció temps que hem de minimitzar és la suma dels dos temps parcials:

$T(x) = 5\sqrt{6^2 + x^2} + 4(20 - x)$ $\rightarrow T'^{(x)} = 5\frac{1}{2\sqrt{36+x^2}}2x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow \frac{5x}{\sqrt{36 + x^2}} - 4 = 0 \Leftrightarrow \frac{5x}{\sqrt{36 + x^2}} = 4 \Leftrightarrow 5x = 4\sqrt{36 + x^2} \Leftrightarrow (5x)^2 = \left(4\sqrt{36 + x^2}\right)^2$

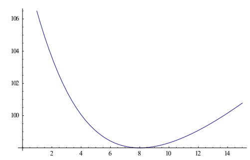
$\Leftrightarrow 25x^2 = 16(36 + x^2) \Leftrightarrow 25x^2 = 576 + 16x^2 \Leftrightarrow 25x^2 - 16x^2 = 576 \Leftrightarrow 9x^2 = 576 \Leftrightarrow$

$x^2 = \frac{576}{9} = 64 \Rightarrow\ x = 8$

Hem de comprovar que es tracta d'un mínim:

$T'(7.5) =$ -0.0956 $< 0 \Rightarrow$decreixent

$T'(8.5) = 0.08484 > 0 \Rightarrow$creixent. $\rightarrow$ La funció té un mínim a $x = 8$



9.1.1 Exercici del Youtube Quines han de ser les mides d'un corral de forma rectangular si tinc 20 m de tanca per construir-lo, i en un dels seus costats hi vull deixar una obertura de 2m, per a col·locar-hi una porta, i si vull que l'àrea compresa per la tanca sigui màxima?

Solució: https://youtu.be/X9goZDq3VWM (Xavi Mates)

9.1.2 Exercici del Youtube Trobar dos nombres reals positius majors que zero, la suma dels quals sigui 10, i que el producte dels seus quadrats sigui màxim. Sol.: https://youtu.be/He_LxiP3qPM

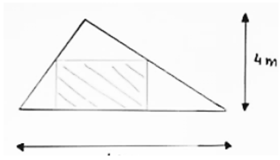
9.1.3 Exercici del Youtube Si volem construir una capsa de cartró, de base quadrada i sense tapa, retallant les quatre cantonades d'una làmina quadrada de 60 cm. de costat, quines han de ser les dimensions de la capsa si volem que tingui el volum màxim? Sol: https://youtu.be/ubiXeWxbiEo

9.1.4 Exercici del Youtube Determina les dimensions d'una finestra "Normanda" (formada per un rectangle i mig cercle), de perímetre 10 m i àrea màxima.

Solució: https://youtu.be/Q9gKnHD_-0A (Unicoos)

9.1.5 Exercici del Youtube Determina el rectangle d'àrea màxima inscrit en el triangle de la figura:

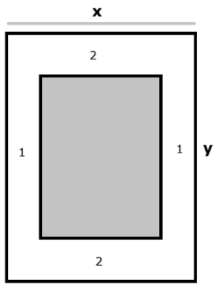
Solució: https://youtu.be/8E5m1CtD-w0 (Unicoos)



9.1.6 Exercici del Youtube Determina les dimensions de la llauna de superfície mínima i volum 1 litre. Solució: https://youtu.be/V7HrkWdnarI (Unicoos)

9.1.7 Exercici del Youtube Determina les dimensions d'un foli, si volem una superfície interior útil de 18 cm^2 i marges laterals d'1cm i verticals de 2 cm.

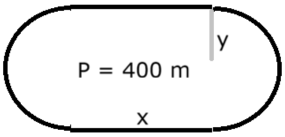
Solució: A= x·y ; 18=(x-4)(y-2) → 5 y 10:



9.1.8 Exercici del Youtube Determina la base i l'altura d'un triangle isòsceles de 8 cm de perímetre i àrea màxima. Solució: https://youtu.be/B-qi5gCQ2z4 (Mates con Andrés)

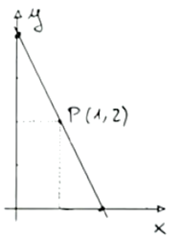
9.1.9 Exercici del Youtube Determinar les dimensions d'una pista d'atletisme de 400 metres de perímetre, per a què la zona rectangular tingui àrea màxima.

Solució: x= 200/π



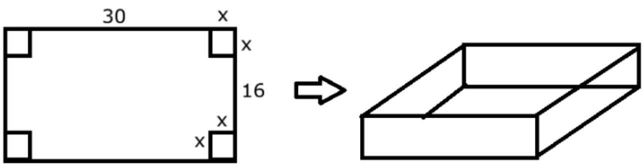
9.1.10 Exercici del Youtube Entre totes les rectes que passen pel punt (1 , 2), troba aquella que determina amb els eixos de coordenades del primer quadrant un triangle d'àrea mínima.

Solució: https://youtu.be/57l-g1jSgQ8



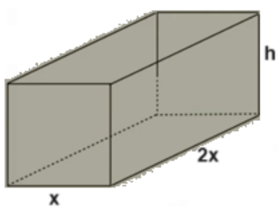
9.1.11 Exercici del Youtube (en anglès)
Determina la capsa més gran (sense tapa superior) que es pot construir amb una fusta de 30 x 16 cm, retallant les cantonades, tal i com es mostra en la imatge:

Solució: https://youtu.be/SWZcq_biZLw (Mr Leonard)



9.1.12 Exercici del Youtube
Determina les dimensions d'una capsa, el doble de llargada que d'amplada, amb volum 972 cm^3 i superfície mínima.

Solució: https://youtu.be/mamH094uw_U $x = 4{,}95$ $y = 19.8$



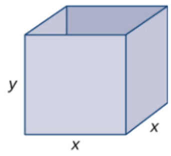
9.1.13 Exercici del Youtube

Un terreny rectangular limita per un costat amb un riu, i volem tancar els altres tres costats amb 300 metres de tanca. Quina serà la seva superfície màxima?

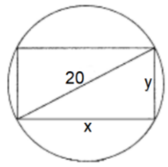
9.1.14 Youtube

Tallem una corda de 10 metres de llarg, i amb una part fem un quadrat i amb l'altra fem un triangle equilàter. Determina el punt per on l'hem de tallar si volem que la superfície total de les dues figures sigui a) La més gran possible. b) La més petita possible.

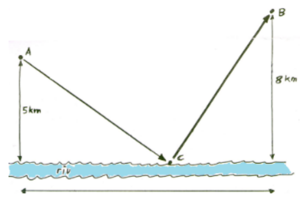
9.1.15 Determina les mesures de la capsa (sense tapa) de base quadrada de superfície mínima i volum igual a 37 cm^3. (4,19 ; 2,1)



9.1.16 Determina les dimensions màximes d'un rectangle que podem inscriure en una circumferència de diàmetre 20.

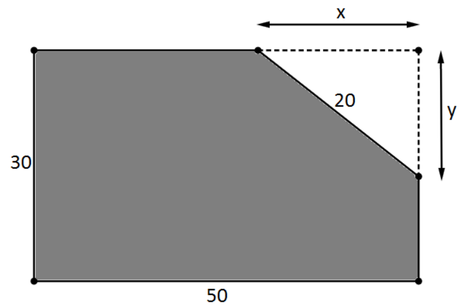


9.1.17 Volem anar d'A a B passant per un punt C del riu. Determineu el punt C que fa mínima la distància d'aquest viatge.

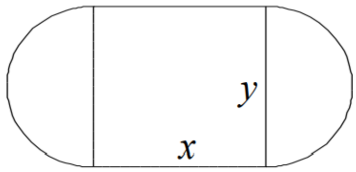


9.1.18 Tenim una cartolina rectangular de 50×30 a la que retallem una cantonada de longitud 20, tal i com es mostra en la imatge:

Determina x, y per a què la superficie que ens queda (la part gris) sigui màxima.



9.1.19 Exercici del Youtube Volem dissenyar un camp de joc de manera que la part central siga rectangular, i les parts laterals siguen semicircumferències cap a fora. La superfície del camp mesura $4 + \pi$ metres quadrats. Es volen pintar totes les ratlles d'aquest camp tal com s'observa a la figura.



Es demana:

a) Escriviu la longitud total de les ratlles del camp en funció de l'altura y del rectangle.

b) Calculeu les dimensions del camp perquè la pintura usada siga mínima.

PAU València TEC Juliol 2021

9.1.20 Exercici del Youtube

Un ayuntamiento ha dividido en parcelas parte del terreno municipal no urbanizable y lo ha cedido a los vecinos para su cultivo. Uno de los vecinos ha decidido que en su parcela asignada utilizara como huerto una zona rectangular de 72 metros cuadrados, dejando el resto para plantar frutales e instalar una caseta donde guardar las herramientas necesarias. La zona de huerto estará dividida en dos partes: la parte dedicada al cultivo de hortalizas será un rectángulo interior separado de los lados que delimitan el huerto. La separación será de medio metro entre cada uno de los lados de mayor longitud y un metro entre cada uno de los lados de menor longitud. La franja que delimita la zona de hortalizas la dedicara al cultivo de flores y plantas aromáticas.

a) Calcule las dimensiones del huerto para que el area de la zona para el cultivo de hortalizas sea máxima.

b) Calcule el área de la zona de cultivo de hortalizas. Solució: https://youtu.be/3u41sp_N5A8 (Mates con Andrés)

9.1.21 En un triangle isòsceles, els dos costats iguals mesuren 10 centímetres cadascun. Obteniu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) L'expressió de l'àrea A(x) del triangle, en funció de la longitud x del tercer costat.

b) Els intervals de creixement i decreixement de la funció A(x), $0 \leq x \leq 20$.

c) La longitud x del tercer costat perquè l'àrea del triangle siga màxima i el valor d'aquesta àrea.

PAU València TEC 2022 (Sol. València pàg. 305)

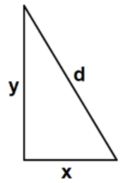
9.1.22 Es desitja construir un quadrat i un triangle equilàter tallant en dues parts un cable d'acer de 240 m de longitud.

a) Calculeu la suma de les àrees del triangle i del quadrat en funció del valor x que correspon amb els metres que mesura un costat del triangle.

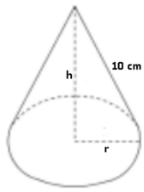
b) Calculeu la longitud de cable necessària per a construir el triangle de manera que la suma de les àrees del triangle i del quadrat siga mínima i calculeu l'àrea mínima PAU València TEC 2022 (Sol. València pàg. 370)

9.1.23 Exercici resolt pas a pas

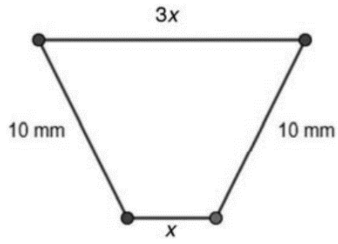
Determina el triangle rectangle més gran que es pot construir amb una hipotenusa fixa.



9.1.24 Determina les dimensions d'un con de generatriu 10 cm i volum màxim.



9.2 Problemes PAU d'optimització (I).



9.2.1 Volem construir una peça metàl·lica que tingui per secció un trapezi isòsceles amb la base superior tres vegades més llarga que la base inferior. Els altres costats del trapezi fan 10 mm, tal com podeu observar en la figura següent:

a) Expresseu l'altura del trapezi en funció de la longitud x de la base inferior.

b) Calculeu la longitud de la base inferior del trapezi de manera que l'àrea de la peça sigui màxima i trobeu el valor d'aquesta àrea máxima.

PAU CAT TEC SET 2023 2.6 (Solució: PAUTEC pàg. 826)

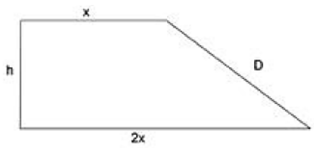
9.2.2 La Núria té un jardí rectangular i vol fer-hi un tancat (rectangular o quadrat) de 8 m² per al seu gos. Ha pensat de posar el tancat tocant al mur del jardí, tal com es mostra a la figura de la dreta, per estal- viar-se així un dels quatre costats. El preu de la tanca que vol fer servir és de 2,5 €/m.

a) Quines dimensions ha de tenir el tancat perquè el cost sigui mínim? Quin és aquest cost mínim?

b) Si manteniu la forma rectangular o quadrada del tancat i feu que un dels vèrtexs del jardí coincideixi amb un vèrtex del tancat, quants euros us podeu estalviar? Raoneu com posaríeu el tancat i justifiqueu amb càlculs matemàtics les dimensions de la vostra proposta.

Sol: a) 4 x 2 ; 20 €; b) 2,83x2,83 ;14,14 € - PAU CAT TEC JUNY 2023 #5

9.2.3 Al pati d'una escola es vol crear una àrea de joc de 30 m^2 per als més petits en forma de trapezi rectangular, de manera que la base més gran mesuri el doble que la base més petita, tal com mostra la figura, i que el costat oblic respecte a les bases (D) sigui tan curt com sigui possible.



a) Justifiqueu que se satisfan les relacions següents:

$h=\frac{20}{x}$ i $D(x)=\sqrt{\frac{400}{x^2}+x^2}$.

b) Trobeu les dimensions del trapezi per a les quals la longitud del costat D és mínima.

PAU CAT TEC JUNY 2022 2.6 (Solució: PAUTEC pàg. 639)

9.2.4 Considereu la paràbola $y=4-x^2$ i un valor a > 0.

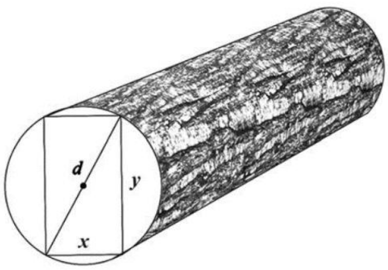
a) Comproveu que l'equació de la recta tangent a la gràfica de la paràbola en el punt d'abscissa $x=a$ és $y=-2ax+a^2+4$ i calculeu els punts de tall d'aquesta recta tangent amb els eixos de coordenades.

b) Calculeu el valor de $a>0$ perquè l'àrea del triangle determinat per aquesta recta tangent i els eixos de coordenades sigui mínima.

PAU CAT TEC JUNY 2021 2.1 (Solució: PAUTEC pàg. 656)

9.2.5 La resistència al trencament R d'una biga de secció rectangular de base x i altura y és directament proporcional al producte xy^2; per tant, $R=kxy^2$, en què k és una constant positiva.

Disposem d'un tronc de fusta en forma de cilindre de diàmetre d com el de la figura.



a) Comproveu que la resistència R de la biga rectangular de base x que podem construir amb aquest tronc ve donada per l'expressió $R=kx(d^2-x^2)$.

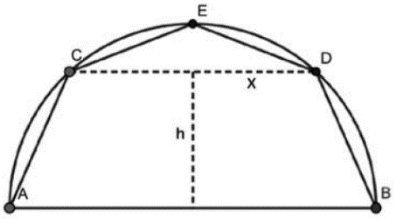
b) Calculeu les dimensions de la biga rectangular de resistència màxima que podem construir a partir d'aquest tronc i calculeu aquesta resistència màxima.

PAU CAT TEC JUNY 2021 5.4 (Solució: PAUTEC pàg. 675)

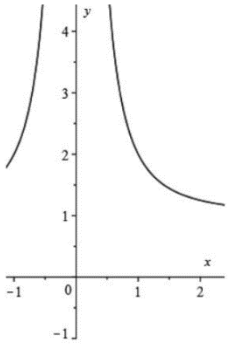
9.2.6 Una empresa està treballant en el disseny d'unes càpsules de cafè. L'empresa ha construït la secció transversal de les càpsules inscrivint-la en una semicircumferència de radi 1, traçant a continuació una corda CD paral·lela al diàmetre AB i incorporant el punt E en el punt mitjà de l'arc CD. D'aquesta manera queda traçat el pentàgon ACEDB, tal com es mostra en la figura.

a) Expresseu en funció de x i h l'àrea del pentàgon ACEDB.

b) Quina ha de ser la distància (indicada en la figura per h) a què s'ha de situar la corda CD de AB per tal que l'àrea del pentàgon ACEDB sigui màxima?



9.2.7 Tracem la recta tangent a la funció $f(x) = \frac{1}{x^2} + 1$ per un punt $P = (a, f(a))$ del primer quadrant. Aquesta recta juntament amb els eixos de coordenades formen un triangle.



a) Comproveu que l'àrea d'aquest triangle, en funció de a, ve donada per la funció $g(a) = \frac{(a^2+3)^2}{4a}$

b) En quin punt P l'àrea del triangle és mínima? Calculeu aquest valor mínim.

PAU CAT TEC JUNY 2020 1.1

9.2.8 Les pàgines d'un llibre han de tenir cada una 600 cm^2 de superfície, amb uns marges al voltant del text de 2 cm a la part inferior, 3 cm a la part superior i 2 cm a cada costat. Calculeu les dimensions de la pàgina que permeten la superfície impresa més gran possible.

PAU CAT TEC JUNY 2019 1.1 (Solució: PAUTEC pàg. 528)

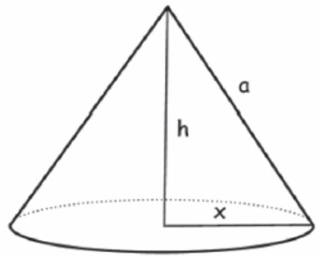
9.2.9 Considereu un con de 120 cm^3 de volum que té una altura h, un radi de la base x i una aresta a, com el de la figura següent:

a) Comproveu que $a^2 = \frac{360}{\pi} \cdot \frac{1}{h} + h^2$.

b) Calculeu l'altura del con que té l'aresta de longitud mínima.

Nota: Recordeu que el volum del con és un terç del volum del cilindre recte que té la mateixa base i la mateixa altura que el con.

PAU CAT TEC JUNY 2017 1.6



9.2.10 Volem fer un envàs de gelat amb forma de prisma regular de base quadrada i amb una capacitat de 80 cm^3. Per a elaborar-ne la tapa i la superfície lateral, farem servir un material determinat que costa 1 €/cm^2, però per a la base haurem d'utilitzar un material que és un 50 % més car.

a) Si x és la mesura, en cm, del costat de la base, comproveu que la funció que determina el preu de l'envàs és $p(x) = 2{,}5x^2 + \frac{320}{x}$.

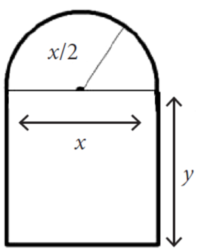
b) Calculeu les mides que ha de tenir l'envàs perquè el preu sigui el mínim possible.

Sol : 4 y 5 - PAU CAT TEC SET 2016 1.3

9.2.11 Siguin x i y les mesures dels costats d'un rectangle inscrit en una circumferència de diàmetre 2.

a) Comproveu que la superfície del rectangle, en funció de x, és donada per l'expressió $S(x) = \sqrt{4x^2 - x^4}$. b) Calculeu els valors de les mesures x i y per als quals la superfície del rectangle és màxima i calculeu el valor d'aquesta superfície màxima. Sol: √2 x√2 - PAU CAT TEC SET 2015 5.5

9.2.12 La portalada d'una catedral està formada, en la part superior, per un arc de mitja circumferència que recolza sobre dues columnes, com il·lustra la figura adjunta, en què x és el diàmetre de la circumferència, és a dir, la distància entre columnes, i y és l'alçària de cada columna.



a) Comproveu que la funció $f(x, y) = \frac{\pi x^2}{8} + xy$ determina l'àrea d'aquesta portalada.

b) Si el perímetre de la portalada fa 20 m, determineu les mides x i y de la portalada que en maximitzen l'àrea.

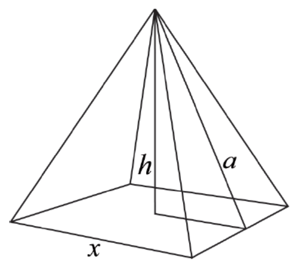
PAU CAT TEC JUNY 2015 2.6

9.2.13 Un nedador és al mar en un punt N, situat a 3 km d'una platja recta, i just al davant d'un punt S, situat a la platja arran de l'aigua; i vol anar a un punt A, situat també arran de l'aigua i a 6 km del punt S, de manera que el triangle NSA és rectangle en el vèrtex S. El nedador neda a una velocitat constant de 3 km/h i camina a una velocitat constant de 5 km/h.
a) Si P és un punt entre el punt S i el punt A que està a una distància x de S, demostreu que el temps, en hores, que necessita el nedador per a nedar del punt N al punt P i caminar des del punt P fins al punt A és determinat per l'expressió $t(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}}{3} + \frac{6-x}{5}$.
b) Calculeu el valor de x que determina el temps mínim que cal per a anar del punt N al punt A, passant per P. Quin és el valor d'aquest temps mínim? *Sol: x=2,25 t=2* PAU CAT TEC JUNY 2014 3.3

9.3 Problemes PAU TEC d'optimització (II).

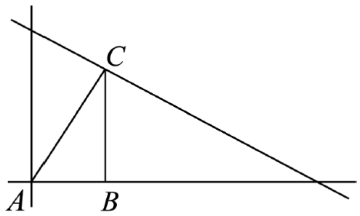
9.3.1 Volem construir una tenda en forma de piràmide regular de base quadrada. Disposem de 300 m^2 de tela per a la fabricació de les quatre cares de la tenda (se suposa que en l'elaboració de les cares no es perd gens de tela). Designem x la longitud d'un costat de la base de la tenda.
a) Sabent que el volum d'una piràmide és igual a un terç del producte de l'àrea de la base per l'altura, comproveu que, en aquest cas,

$$V(x) = \frac{x\sqrt{(9 \times 10^4) - x^4}}{6}$$



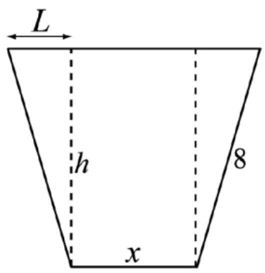
b) Determineu el valor de x perquè el volum sigui el més gran possible (no cal que comproveu que el valor obtingut correspon realment a un màxim). PAU CAT TEC SET 2013 1.6

9.3.2 Un triangle rectangle situat en el primer quadrant té el vèrtex A en l'origen de coordenades, el vèrtex B = (x, 0) en el semieix positiu d'abscisses i el vèrtex C pertany a la recta x + 2y = 8. L'angle recte és el que corres pon al vèrtex B.
a) Comproveu que l'àrea del triangle es pot expressar de la manera següent: $A(x) = 2x - \frac{x^2}{4}$.



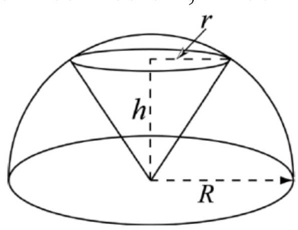
b) Trobeu els vèrtexs B i C perquè l'àrea del triangle sigui màxima i comproveu que es tracta realment d'un màxim. PAU CAT TEC JUNY 2013 5.6

9.3.3 Es vol construir un canal que tingui com a secció un trapezi isòsceles de manera que l'amplària superior del canal sigui el doble de l'amplària inferior i que els costats no paral·lels siguin de 8 metres. A la dreta teniu un esquema de la secció del canal.
a) Trobeu el valor del segment L de la gràfica en funció de la variable x (amplària inferior del canal).
b) Sabem que l'àrea d'un trapezi és igual a l'altura multiplicada per la semisuma de les bases. Comproveu que, en aquest cas, l'àrea de la secció és donada per $A(x) = \frac{3x\sqrt{256-x^2}}{4}$



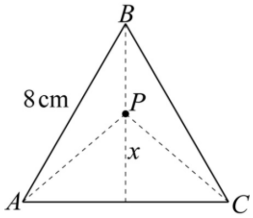
c) Calculeu el valor de x perquè l'àrea de la secció del canal sigui màxima (no cal que comproveu que és realment un màxim). PAU CAT TEC JUNY 2013 4.4

9.3.4 En una semiesfera de radi R inscrivim un con situant el vèrtex al centre de la semiesfera, tal com es veu en el dibuix.
a) Sabent que el volum d'un con és igual a l'àrea de la base multiplicada per l'altura i dividida per 3, comproveu que, en aquest cas, podem expressar el volum com $V = \frac{\pi \cdot h}{3}\left(R^2 - h^2\right)$
b) Trobeu les dimensions d'aquest con (el radi de la base i l'altura) perquè el seu volum sigui màxim i comproveu que es tracta realment d'un màxim.



PAU CAT TEC JUNY 2013 3.5

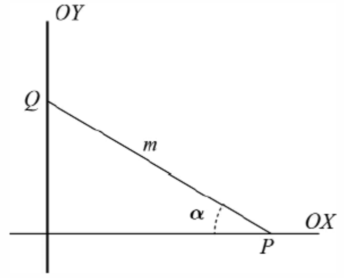
9.3.5 Un triangle equilàter de vèrtexs A, B i C té els costats de 8 cm. Situem un punt P sobre una de les altures del triangle, a una distància x de la base corresponent.
a) Calculeu l’altura del triangle de vèrtexs A, B i C.
b) Indiqueu la distància del punt P a cadascun dels vèrtexs (en funció de x).
c) Determineu el valor de x perquè la suma dels quadrats de les distàncies del punt P a cadascun dels tres vèrtexs sigui mínima.



PAU CAT TEC JUNY 2012 3.5

9.3.6 Dins d’un triangle rectangle, de catets 3 i 4 cm, hi ha un rectangle. Dos costats del rectangle estan situats en els catets del triangle i un dels vèrtexs del rectangle és a la hipotenusa del triangle.
a) Feu un esbós de la situació descrita.
b) Si x és la longitud del costat del rectangle que està situat en el catet petit i y és l’altre costat del rectangle, comproveu que es compleix que $4x+3y=12$.
c) Determineu les dimensions del rectangle perquè l’àrea sigui màxima.
PAU CAT TEC JUNY 2011 4.6

9.3.7 Un segment de longitud fixada *m* recolza sobre els eixos de coordenades. Calculeu el valor de l’angle α que forma el segment amb l’eix *OX* perquè el triangle rectangle determinat pel segment amb els eixos i del qual *m* és la hipotenusa tingui àrea màxima. Comproveu que es tracta realment d’un màxim.
PAU CAT TEC JUNY 2010 1.3



9.3.8 Considereu tots els prismes rectes de base quadrada amb un volum *V* fixat. Anomeneu *x* el costat de la base del prisma i *y* la seva altura.
a) Trobeu l’expressió del volum i de l’àrea total del prisma en funció de les variables *x* i *y*.
b) Comproveu que el que té àrea total mínima és en realitat un cub. PAU CAT TEC SET 2010 2.3

9.3.9 De tots els triangles rectangles d’hipotenusa 10 cm, trobeu la longitud dels catets del triangle que té el perímetre màxim. Comproveu que la solució trobada correspongui realment al perímetre màxim.
PAU CAT TEC JUNY 2008 5.6

9.3.10 Un magatzem té forma de prisma recte de base quadrada i un volum de 768 m^3. Se sap que la pèrdua de calor a través de les parets laterals val 100 unitats per m^2, mentre que a través del sostre és de 300 unitats per m^2. La pèrdua pel sòl és molt petita i es pot considerar nul·la. Calculeu les dimensions del magatzem perquè la pèrdua de calor total sigui mínima.
PAU CAT TEC JUNY 2007 2.5 Sol: x=8 ; y=12

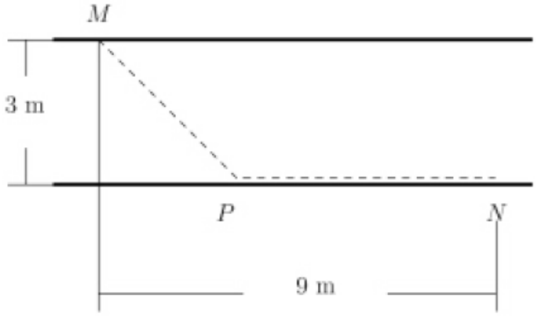
9.3.11 Considereu la funció $y=3-x^2$i un punt de la seva gràfica, M, situat en el primer quadrant (x ≥ 0, y ≥ 0). Si pel punt M tracem paral·leles als eixos de coordenades, la seva intersecció amb OX i OY determina dos punts, A i B, respectivament.
a) Feu un gràfic dels elements del problema.
b) Trobeu les coordenades del punt M que fa que el rectangle OAMB tingui l’àrea màxima.
PAU CAT TEC SET 2005 3.5

Considereu la recta d’equació $r: x=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{2}$.
a) Expresseu el quadrat de la distància d’un punt qualsevol (x,y,z) de la recta al punt P= (1, 2, 5) com una funció de la coordenada x.
b) Trobeu quin valor de x fa mínima aquesta funció, deduïu quin punt Q de la recta és el més proper a P i calculeu la distància del punt a la recta.
c) Escriviu l’equació de la recta que passa per P i Q i comproveu que és perpendicular a r.
PAU CAT TEC JUNY 2007 1.5

9.3.12 La recta tangent a la paràbola $y=3-x^2$ en un punt M situat dins del primer quadrant (x > 0, y > 0), talla l’eix OX en el punt A i l’eix OY en el punt B.
a) Feu un gràfic dels elements del problema.
b) Trobeu les coordenades del punt M que fan que el triangle OAB tingui l’àrea mínima.
PAU CAT TEC JUNY 2005 1.5

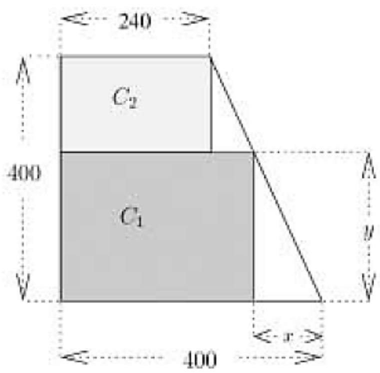
9.3.14 Donats la funció $f(x) = \sqrt{x}$ i el punt A(2, 0) situat sobre l'eix de les abscisses:
a) Trobeu la funció que expressa la distància del punt A a un punt qualsevol de la gràfica de la funció. b) Trobeu les coordenades del punt de la gràfica de $f(x)$ més proper a A.
PAU CAT TEC JUNY 2004 1.6

9.3.15 Volem unir el punt M situat en un costat d'un carrer de 3 m d'amplada amb el punt N situat a l'altre costat i 9 m més avall mitjançant dos cables rectes, un des de M fins a un punt P situat a l'altre costat del carrer i un altre des de P fins a N seguint el mateix costat del carrer, segons l'esquema següent:
El cost de la instal·lació del cable MP és de 12 € per metre i del cable PN de 6 € per metre.
Quin punt P haurem d'escollir de manera que la connexió de M amb N sigui tan econòmica com sigui possible? Quin serà aquest cost mínim?
PAU CAT TEC JUNY 2003 2.5



9.3.16 Determineu quin és el punt de la gràfica de $y = \sqrt{x}$ (és a dir, de la forma $(x, \sqrt{x})$), que és més a prop del punt P = (4, 0).
PAU CAT TEC JUNY 2003 5.1

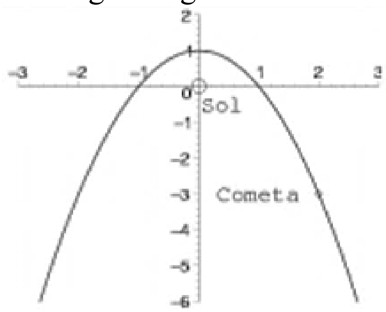
9.3.17 Un camp té forma de trapezi rectangle, de bases 240 m i 400 m, i el costat perpendicular a les bases també de 400 m. Es vol partir tal com indica la figura per fer dos camps rectangulars C1 i C2. Anomenem x i y els catets d'un dels triangles rectangles que es formen.



a) Comproveu que $y = \frac{5}{2}x$.
b) Utilitzant la igualtat anterior, escriviu la suma de les àrees dels dos camps en funció de x.
c) El camp C1 es vol sembrar amb blat de moro i el camp C2 amb blat. Amb el blat de moro s'obté un benefici de 0,12 € per m^2 i amb el blat un benefici de 0,10 € per m^2. Determineu les mides de cada un dels camps per obtenir el benefici màxim. *Sol: (300 x 250) y (240 x 150)* PAU CAT TEC SET 2003 3.5

9.3.18 S'ha de construir un gran dipòsit cilíndric de 81π m^3 de volum. La superfície lateral ha de ser construïda amb un material que costa 30€ el m^2 i les dues bases amb un material que costa 45€ el m^2.
a) Determineu la relació que hi haurà entre el radi r de les bases circulars i l'altura h del cilindre, i doneu el cost C(r) del material necessari per construir aquest dipòsit en funció de r.
b) Quines dimensions (radi i altura) ha de tenir el dipòsit perquè el cost del material necessari per construir-lo sigui el mínim possible?
c) Quin serà, en aquest cas, el cost del material? *Sol: r=3 h=9* PAU CAT TEC JUNY 2002 3.5

9.3.19 Suposem que el Sol es troba a l'origen d'un sistema de coordenades i que un cometa segueix una trajectòria donada per la paràbola $y = 1 - x^2$, tal com es veu a la figura següent:
a) Quin és el punt en què el cometa es troba més proper al Sol?
b) Quant val en aquest cas la distància del Sol al cometa?
c) Hi ha algun punt en què el cometa es trobi a la màxima distància del Sol?
d) Hi ha algun punt en què la distància entre el Sol i el cometa sigui un màxim local o relatiu?
Nota: Teniu present que la distància entre dos punts és màxima o mínima quan el quadrat de la distància és màxim o mínim.
x= √1/2 ; d= √3/2 PAU CAT TEC JUNY 2002 1.5

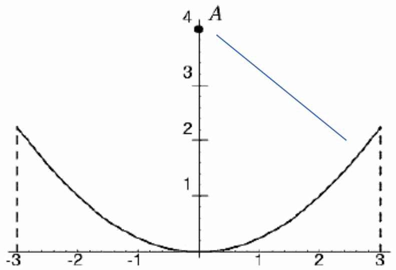


9.3.20 La riba d'un tram de riu descriu la corba $y = \frac{1}{4}x^2$, per a x entre –3 i 3, i en el punt A = (0, 4) hi ha un poble, tal com es pot veure en l'esquema següent:

a) Expresseu la distància des d'un punt qualsevol d'aquesta vora del riu fins al poble, en funció de l'abscissa x.

b) Quin és el punt de la vora d'aquest tram de riu que és més lluny del poble?

c) Hi ha algun punt de la vora del riu a una distància del poble inferior a 2? *Sol: x=2,82* PAU CAT TEC SET 2001 4.5



9.3.21 El costat desigual d'un triangle isòsceles mesura 12 m, i l'altura sobre aquest costat és de 5 m.

a) Donat un punt arbitrari sobre aquesta altura, obtingueu una expressió de la suma de les distàncies d'aquest punt a cada un dels vèrtexs del triangle.

b) Determineu els punts sobre l'altura que compleixen que la suma de les distàncies als tres vèrtexs del triangle sigui màxima i els punts per als quals sigui mínima.

PAU CAT TEC SET 2000 2.5

9.3.22 Un terreny té forma de triangle rectangle, els catets mesuren AB = 60 m i AC = 45 m. En aquest terreny es pot construir una casa de planta rectangular com indica la part ombrejada de la figura següent:

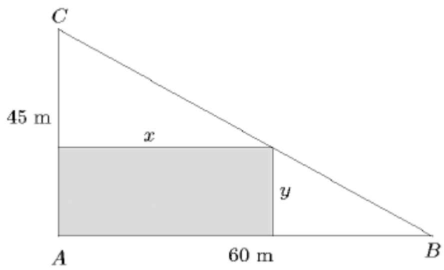
Voleu vendre aquest terreny i us paguen 5.000 pessetes per cada metre quadrat no edificable i 25.000 pessetes per cada metre quadrat edificable.

a) Determineu la relació que hi ha entre l'amplada x i la profunditat y del rectangle que determina la part edificable.

b) Determineu l'expressió que dóna el valor del terreny en funció de l'amplada x del rectangle edificable.

c) Quines són les dimensions de la part edificable que ens permeten obtenir un valor màxim per a aquest terreny?

d) Quin és aquest valor màxim?



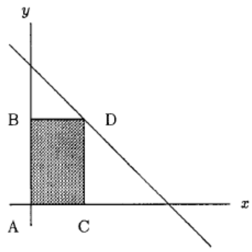
PAU CAT TEC JUNY 2000 1.5

9.3.23 Considereu els rectangles del pla, els vèrtexs A, B, C i D dels quals compleixen les condicions següents:

a) A és l'origen de coordenades; b) B és a sobre del semieix de les y>0; c) C és a sobre del semieix de les x>0; d) D és a sobre de la recta d'equació 2x+y=1, tal com es veu en la figura següent:

D'entre tots aquests rectangles, trobeu l'àrea del que la té màxima.

PAU CAT TEC SET 1998 5.2

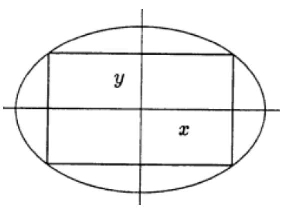


9.3.24 Una via de tren passa a 2 km del poble A i a 3 km del poble B, de manera que el tram de via comprès entre ambdós pobles és de 5 km, tal com s'indica en la figura. Volem construir una nova estació ferroviària i una carretera formada per dos trams rectes que uneix A amb B passant per l'estació. En quin punt del tram de via hem de col·locar l'estació si volem que el recorregut de A a B passant per la nova carretera sigui mínim? Quina serà la longitud total de la nova carretera?

PAU CAT TEC JUNY 1998 3.6

9.3.26 Trobeu els costats d'un rectangle d'àrea màxima inscrit a l'el·lipse d'equació $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$, tal com s'indica en la figura següent:

PAU CAT TEC JUNY 1998 6.1



9.4 Problemes PAU CCSS d'optimització.

9.4.1 Un granger vol construir un corral rectangular per als seus conills. Sabem que només disposa de 40 m lineals de tanca metàl·lica.
a) Anomenem x l'amplària del corral i y la seva llargària. Escriviu la funció que permet calcular l'àrea del corral tenint en compte només l'amplària x.
b) Calculeu en quin punt assoleix el seu màxim la funció que heu trobat a l'apartat anterior. Deduïu quina ha de ser l'amplària x i quina la llargària y perquè el corral tingui l'àrea màxima. Quina serà aquesta àrea màxima? PAU CAT CCSS JUNY 2021 2.4 (Solució: PAUCCSS pàg. 530)

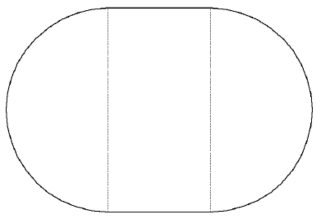
9.4.2 Disposem de 48 cm^2 de material per a fabricar una capsa de base quadrada, sense tapa. Calculeu les dimensions de la capsa de volum més gran que podem construir en aquestes condicions. Quin serà el volum de la capsa?
PAU CAT CCSS SET 2012 4.5

9.4.3 Un triangle té els vèrtexs O(0, 0), A(6, 0) i B(0, 3).
a) Dibuixeu-lo i escriviu l'equació de la recta que conté el segment AB.
b) Considerem un punt P situat sobre el segment AB , i dibuixem el rectangle que té per diagonal OP i dos costats sobre els eixos de coordenades. Determineu les coordenades de P que fan màxima l'àrea del rectangle.
PAU CAT CCSS JUNY 2012 3.4

9.4.4 Determineu dos nombres enters positius que sumin 25, de manera que el doble del quadrat del primer sumat amb el triple del quadrat del segon doni el mínim valor possible.
PAU CAT CCSS SET 2011 2.4

9.4.5 Volem construir el marc d'una finestra rectangular de 100 dm^2 de superfície. El cost de cada decímetre de marc horitzontal és de 6€, mentre que el de cada decímetre de marc vertical és de 24€. Calculeu les dimensions de la finestra perquè el marc ens surti tan barat com sigui possible.
PAU CAT CCSS JUNY 2010 5.2

9.4.6 Es vol construir una piscina que tingui per base un rectangle i dos semicercles adjunts tal com s'indica a la figura següent:
Sabent que el perímetre de la piscina ha de ser de 30 m, calculeu les seves dimensions per tal que la superfície sigui màxima.

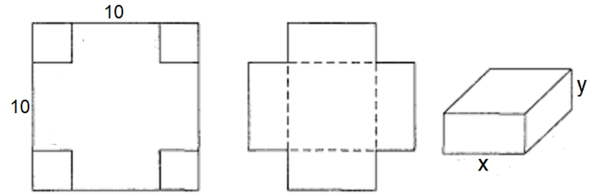


PAU CAT CCSS JUNY 2004 1.6

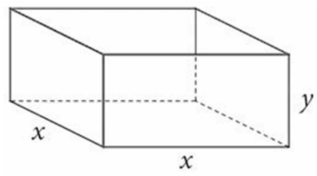
9.4.7 Disposem de material per poder impermeabilitzar 200 m^2 de superfície. Volem fer una bassa de base rectangular en què la llargada mesuri el triple que l'amplada i amb la profunditat adequada per gastar tot el material. Interessa que el volum d'aigua que càpiga a la bassa sigui màxim.
a) Escriviu la relació que hi ha entre l'altura i el costat petit de la base de la bassa.
b) Escriviu la funció que dona la capacitat de la bassa en funció del costat petit de la base.
c) Calculeu les dimensions de la bassa perquè la capacitat sigui màxima.
d) Determineu-ne el volum. R: 4,71 ; 3,55 PAU CAT CCSS SET 2003 3.5

9.4.8 Amb un llistó de fusta de 300 cm de llarg volem fabricar el marc d'un quadre.
a) Determineu la relació que hi ha entre la base i l'alçada del marc.
b) Determineu la funció que expressa la superfície del quadre en termes de la base del marc.
c) Feu un gràfic d'aquesta funció on es posin de manifest els seus intervals de creixement i decreixement i els extrems relatius.
d) Trobeu les dimensions del marc que fan màxima la superfície del quadre. Trobeu el valor de la superfície. $S(x,y)= -x^2+150x$; $S(75)=5625\ m^2$ PAU CAT CCSS JUNY 2003 5.6

9.4.9 Determina l'amplada de la capsa (sense tapa) més gran que podem construir amb una fusta de 10×10, retallant les cantonades, tal i com es mostra en la figura:



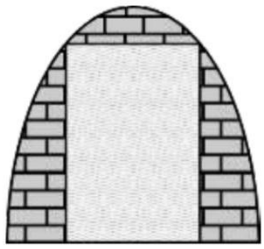
9.4.10 L'Ona vol construir una capsa de cartró de base quadrada i oberta (sense tapa) per a posar-hi retoladors i colors, com la de la figura següent:



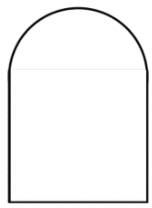
La capsa ha de tenir un volum de 4 litres.
a) Expresseu l'alçària de la capsa (y) en funció de la longitud del costat de la base (x).
b) L'Ona vol fer servir el mínim de cartró possible per a construir la capsa. Quants centímetres ha de mesurar el costat de la base (x) perquè la superfície de la capsa sigui mínima? Quants centímetres ha de mesurar l'alçària (y)? Quina quantitat de cartró farà servir per a construir la capsa? (20;10) PAU CAT CCSS SET 2024 #3.2 (Sol. PAUCCSS pàg 754)

9.5 Més problemes d'optimització.

9.5.1 El tall vertical de l'entrada a la plaça emmurallada de cert poble té forma de paràbola, amb l'equació $y=-x^2+12$, en la qual y i z es mesuren en metres i y = 0 representa el sòl. Es desitja posar-hi una porta rectangular de forma que les dues cantonades superiors estiguen en la paràbola i les inferiors en el sòl. La resta de l'entrada va tancada amb pedra.
Calculeu les dimensions de la porta perquè tinga la major superfície possible.



9.5.2 Una finestra rectangular està coronada per un semicercle tal com s'indica en la figura següent.
Sabent que el perímetre de la finestra és de 20 metres calculeu:
a) L'àrea de la finestra en funció de la seua amplària x.
b) Les dimensions que ha de tenir la finestra perquè permeta la màxima entrada de llum.



9.5.3 En un triangle isòsceles, els dos costats iguals mesuren 10 centímetres cadascun.
Obteniu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:
a) L'expressió de l'àrea A(x) del triangle, en funció de la longitud x del tercer costat.
b) Els intervals de creixement i decreixement de la funció A(x), $0 \le x \le 20$.
c) La longitud x del tercer costat perquè l'àrea del triangle siga màxima i el valor d'aquesta área.

9.5.4 Es desitja construir un quadrat i un triangle equilàter tallant en dues parts un cable d'acer de 240 m de longitud. Calculeu la suma de les àrees del triangle i del quadrat en funció del valor x que correspon amb els metres que mesura un costat del triangle. Calculeu la longitud de cable necessària per a construir el triangle de manera que la suma de les àrees del triangle i del quadrat siga mínima i calculeu l'àrea mínima.

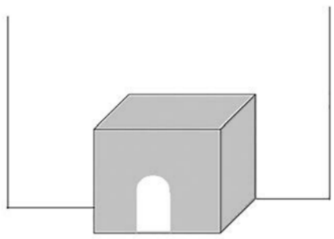
9.5.4 Els vèrtexs d'un triangle són $B(0,12)$, $C(-5,0)$ i $D(5,0)$. Es desitja construir un rectangle inscrit en el triangle anterior, de costats paral·lels als eixos coordenats i dos dels vèrtexs del qual tenen coordenades (−x,0), (x,0), sent $0 \le x \le 5$. Els altres dos vèrtexs estan situats en els segments AB i AC. Obteniu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:
a) L'expressió $f(x)$ de l'àrea del rectangle anterior.
b) El valor de x per al qual aquesta àrea és màxima i les dimensions del rectangle obtingut.

9.5.6 Un rectángulo tiene sus vértices en los puntos (0,0), (a,0), (0,b) y (a,b), donde a>0 y b>0 y además el punto (a,b) está situado en la curva de ecuación $y=\frac{1}{x^2+9}$
De entre todos los rectángulos que cumplen esas condiciones determine el rectángulo de área mínima y calcule dicha área mínima. Aragón Junio 2019

9.5.7 Exercici Youtube.
Determina la base i altura del triangle isòscels d'àrea màxima i perímetre 8 cm.

9.6 Més problemes PAU d'optimització.

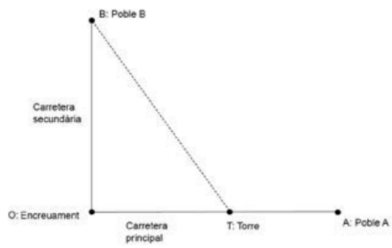
9.6.1 Volem construir un petit cobert de fusta de 6 m³ de volum, en forma de prisma rectangular, adossat a la paret lateral d'una casa, per a guardar-hi llenya. Només cal construir, per tant, el sostre i tres parets (la paret del fons del cobert és la de la casa a la qual està adossat). A més, volem que el cobert mesuri el triple d'amplària que de fondària. Cada metre quadrat de paret té un cost de construcció de 30 € i el sostre costa 50 € per metre quadrat. Un cop construït el cobert, afegir-hi una porta té un cost fix de 35 €.



a) Comproveu que el cost de construcció del cobert ve donat per la funció:
$C(x) = \frac{300}{x} + 150x^2 + 35$, on x és la fondària del cobert en metres.
b) Calculeu quines han de ser les dimensions del cobert per tal que el cost de construcció sigui mínim i justifiqueu la resposta. Quin és aquest cost? PAU CAT TEC JUNY 2024 1.5 (Solució: PAUTEC pàg. 907)

9.6.2 A $\mathbb{R}^2$, considereu els triangles rectangles que tenen els vèrtexs en els punts O = (0, 0), A = (x, 0) i B = (0, y), amb x > 0 i y > 0, i en què la suma dels catets és 10.
a) Expresseu l'àrea del triangle AOB en funció de x. Per a quin valor de x l'àrea del triangle AOB és la més gran possible? Quin valor té aquesta àrea màxima?
b) Expresseu la hipotenusa del triangle AOB en funció de x. Per a quin valor de x la hipotenusa del triangle AOB és la més petita possible? Quin és aquest valor mínim?
PAU TEC JUNY 2022 5.4 (Sol. PAUTEC pàg. 762)

9.6.3 En una carretera principal hi trobem el poble A. A 12 km del poble A, hi ha un encreuament O amb una carretera secundària que talla perpendicularment la carretera principal. A 9 km de l'encreuament, a la carretera secundària, hi trobem el poble B. Es vol construir una torre de comunicacions T en un punt de la carretera principal situat entre el poble A i l'encreuament O. Aquesta torre ha d'estar connectada amb cadascun dels dos pobles en línia recta per cable. Sabem que instal·lar el cable entre la torre T i el poble B té un preu de 250 €/km i, en canvi, instal·lar el cable entre la torre T i el poble A té un preu de 125 €/km. Determineu a quina distància de l'encreuament O a la carretera principal cal situar la torre T perquè el preu del cablejat sigui mínim i quin serà el valor d'aquest preu mínim. PAU TEC JUNY 2023 5.4 (Sol. PAUTEC pàg. 848)



9.6.4 Per a cada punt (x, y) de la corba $y = e^{-2x}$, amb x > 0 i y > 0, considereu el rectangle amb vèrtexs als punts (0, 0), (x, 0), (0, y) i (x, y).
a) Comproveu que, d'entre tots aquests rectangles, el que té x=1/2 és el d'àrea máxima. Quin és el valor d'aquesta àrea?
b) Calculeu l'equació de la recta tangent a la funció $y = e^{-2x}$ en el punt d'abscissa x = 0, i el seu punt de tall amb l'eix de les abscisses. PAU CAT TEC SET 2024 #3.5 (Sol. PAUTEC pàg 931)