

11.1.7 Determina la funció $f(x)$ tal que $f'(x) = \frac{3}{x^4} + 32x^3$ i que, a més a més, la seva gràfica passa pel punt $(\frac{1}{2}, 4)$. A Level 2021 SP1 #1

11.1.8 Determina la funció $f(x)$ tal que $f'(x) = 6x^2 - \frac{8}{x^2}$, sabent que, a més a més, la seva gràfica passa pel punt $(2,7)$ A Level 2021 SP3 #1

11.1.9 Determina la funció $f(x)$ tal que $f'(x) = 2x^2 - 7 - \frac{4}{x^2}$, sabent que, a més a més, $f(1) = \frac{-1}{3}$ A Level 2021 WP1 #9

11.1.10 Determina la funció $f(x)$ tal que $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - \sqrt[3]{x}$, sabent que, a més a més, $f(8) = 5$ A Level 2022 MP1 #1

11.2 Integral definida.

Definició. Integral definida.

La integral definida neix de la necessitat de calcular l'àrea tancada per una funció i l'eix X en cert interval. Aquesta àrea es pot aproximar sumant certs rectangles, la base dels quals sigui constant, i l'altura dels quals sigui el valor de la funció en certs punts escollits convenientment. El límit d'aquest càlcul quan la base d'aquests rectangles tendeix a 0 és igual a la integral definida d'aquesta funció en aquest interval, és a dir, l'àrea que s'estava buscant.

La integral definida d'una funció $f(x)$ entre els extrems a i b es defineix com el límit de la suma dels rectangles de la imatge, quan la seva base tendeix a 0:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{x_{i+1}-x_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^n f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

La definició de integral definida com a suma d'àrees de rectangles de base més i més petita justifica l'origen del símbol integral és una S allargada, indicant que es tracta d'un sumatori, mentre que l'origen del símbol diferencial, dx, prové del fet que es tracta de diferències de x (prenent la inicial de "diferència" juntament amb la x, resulta precisament dx).

Aquesta construcció de la derivada es desenvoluparà en el **Tema 13** d'aquest llibre però no s'utilitza a la pràctica, nosaltres farem servir la anomenada "Regla de Barrow":

Regla de Barrow. Si f és contínua en $[a,b]$ i F és una primitiva de f en $[a,b]$, llavors

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Exemple: $\int_5^8 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_5^8 = \frac{8^3}{3} - \frac{5^3}{3} = 129$, ja que una primitiva de x^2 és $\frac{x^3}{3}$.

11.2.1 De la funció polinòmica $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ sabem que

- té un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x = -3$;
- la integral definida en l'interval $[0, 1]$ val $-\frac{5}{4}$.

Calculeu el valor dels paràmetres a i b. PAU CAT TEC SET 2013 1.2 (Solució: [PAUTEC](#) pàg. 355)

11.2.2 Sigui $f(a) = \int_0^{1/a} (a^2 + x^2) dx$ per $a > 0$,

a) Comproveu que $f(a) = \frac{1}{3a^3} + a$.

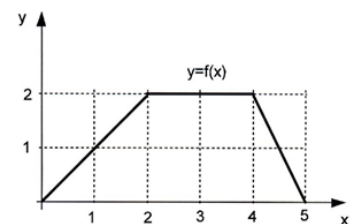
b) Calculeu el valor del paràmetre a perquè la funció $f(a)$ tingui un mínim relatiu. PAU CAT

TEC SET 2011 2.6 (Solució: [PAUTEC](#) pàg. 305)

11.2.3 Considereu la funció $y = f(x)$ definida per a $x \in [0,5]$ que apareix dibuixada a la figura adjunta.

a) Quina és l'expressió de la seva funció derivada quan existeix?

b) Calculeu $\int_0^3 f(x) dx$. PAU CAT TEC JUNY 2006 3.2 (Solució: [PAUTEC](#) pàg. 171)



11.2.4 El polinomi $p(x) = x^2 + ax + b$ s'anul·la per a $x = 2$ i compleix

$$\int_0^2 p(x) dx = 4. \text{ Calculeu raonadament a i b.}$$

PAU CAT TEC JUNY 2000 3.1

11.2.5 Exercici del Youtube Calcula $\int_{-1}^4 (5x^4 - 8x^3 + 6) dx$

Solució: <https://youtu.be/Kuei4zTURuI> (julioprofe)

11.2.6 Exercici del Youtube Calcula $\int_1^3 3x^2 + 2 dx$

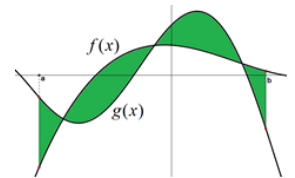
<https://youtu.be/i6J5qpoUikE> (Montero Espinosa)

11.3 Àrea determinada per la gràfica d'una funció i l'eix X.

Àrea entre dues funcions (Indicant els extrems d'integració)

Des d'un punt purament teòric, tota la relació entre integració i àrea es redueix al següent teorema:

Si $f(x)$ i $g(x)$ són dues funcions integrables en un interval $[a, b]$, llavors l'àrea determinada entre les dues funcions és igual a la integral del valor absolut de la seva diferència: Àrea entre $f(x)$ i $g(x) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$



Però aquesta fórmula no ens serveix perquè no disposem d'una fórmula que ens doni directament la integral d'una funció amb valor absolut. Per tant, a la pràctica, hem de considerar per separat tres casos:

casos:

CAS 1. Funció sempre positiva.

Si una funció $f(x)$ és sempre positiva en un interval $[a, b]$, llavors l'àrea que determina la seva gràfica i l'eix d'abscisses és igual al valor de la integral definida: Àrea = $\int_a^b f(x) dx$

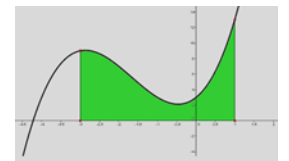
Exercici resolt. Calcular l'àrea de la funció $f(x) = x^3 + 5x^2 + 4x + 3$ a l'interval $[-3, 1]$

Sol: Aquesta funció és sempre positiva en aquest interval, per tant l'àrea coincidirà amb la integral definida: $\int x^3 + 5x^2 + 4x + 3 dx = \frac{x^4}{4} + \frac{5x^3}{3} +$

$$4 \frac{x^2}{2} + 3x + C = \frac{x^4}{4} + \frac{5x^3}{3} + 2x^2 + 3x + C \quad \text{Àrea} = \int_{-3}^1 f(x) dx = F(1) -$$

$$F(-3) = \frac{83}{12} - \frac{-63}{4} = \frac{68}{3} \cong 22.67 \quad F(1) = \frac{1^4}{4} + \frac{5 \cdot 1^3}{3} + 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 =$$

$$\frac{83}{12} \quad F(-3) = \frac{(-3)^4}{4} + \frac{5 \cdot (-3)^3}{3} + 2 \cdot (-3)^2 + 3 \cdot (-3) = \frac{-63}{4}$$



11.3.1 Exercici del Youtube Calcula l'àrea entre l'eix OX i la següent funció, entre $x=0$ i $x=5$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x < 2 \\ 3 & 2 \leq x < 3 \\ -(x-4)^2 + 3 & x \geq 3 \end{cases} \quad \text{Solució: } \text{https://youtu.be/5KvG0tEze7k} \text{ (Profe Vivi Meilán)}$$

11.3.2 Exercici del Youtube Calcula les següents integrals definides i fes una interpretació gràfica dels seus resultats: a) $\int_0^4 3dx$ b) $\int_2^6 \left(\frac{x}{2} + 1\right) dx$ c) $\int_0^3 x^2 dx$ Solució: <https://youtu.be/HwYRge5zCD0>

11.3.3 Exercici del Youtube Calcula i interpreta geomètricament: $\int_1^2 x^2 dx$ <https://youtu.be/-AESoIi04JQ>

CAS 2: Funció sempre negativa.

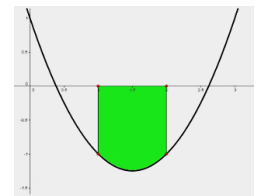
La integral d'una funció negativa és un nombre negatiu, per tant si una funció $f(x)$ és sempre negativa en un interval $[a, b]$, llavors la integral serà negativa, per tant, li traiem el signe, o dit d'una altra manera, determinem el seu valor absolut: Si $f(x) < 0 \Rightarrow \text{Àrea} = - \int_a^b f(x) dx$

Exercici resolt. Calcular l'àrea de la funció $f(x) = x^2 - 3x + 1$ a l'interval $[1, 2]$

Observem que aquesta funció es estrictament negativa en aquest interval, per tant calculem la seva integral definida, que ja sabem que donarà un valor negatiu, i prenem el seu valor absolut (és a dir, eliminem el signe):

$$F(x) = \int x^2 - 3x + 1 dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + x + C \quad ; \quad F(2) = \frac{-4}{3},$$

$$F(1) = \frac{-1}{6} \quad \text{Àrea} = \left| \int_1^2 f(x) dx \right| = |F(2) - F(1)| = \left| \frac{-4}{3} - \frac{-1}{6} \right| = \left| \frac{-7}{6} \right| = \frac{7}{6}$$



CAS 3: Funció que canvia de signe dintre de l'interval d'integració.

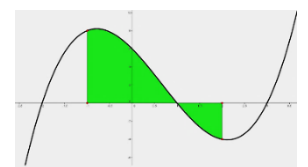
Si una funció $f(x)$ canvia de signe dintre de l'interval $[a, b]$, haurem de calcular les integrals per separat i sumar sempre els valors positius, és a dir, en valor absolut.

Exercici resolt. Calcular l'àrea determinada per la gràfica de la funció $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ i l'eix d'abscisses a l'interval $[-1, 2]$

Solució: La gràfica d'aquesta funció és positiva entre -1 i 1 i és negativa entre 1 i 2 , per tant hem de calcular les integrals per separat:

$$\text{Àrea} = \left| \int_{-1}^1 f(x) dx \right| + \left| \int_1^2 f(x) dx \right| = |F(1) - F(-1)| + |F(2) - F(1)| = *$$

$$F(-1) = \frac{-91}{12} \quad F(1) = \frac{37}{12} \quad F(2) = \frac{2}{3} \quad * = \left| \frac{37}{12} - \frac{-91}{12} \right| + \left| \frac{2}{3} - \frac{37}{12} \right| = \frac{32}{2} + \frac{29}{12} = \frac{221}{12} \cong 18.42$$



Exercici resolt a) Determina la integral indefinida de $f(x) = x^2 - 3x + 1$

b) Determina l'àrea entre la funció anterior, l'eix X i les rectes $x = 0$ i $x = 2$.

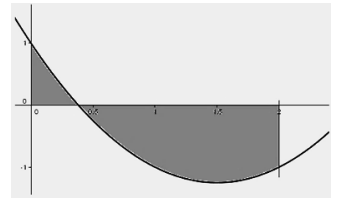
$$\text{Solució: a) } F(x) = \int (x^2 - 3x + 1) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + x + C$$

b) Determinem els punts de tall de la funció amb l'eix X:

$$f(x) = x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0.382 \\ x = 2.618 \end{cases}$$

La funció, tal i com es pot veure a la gràfica superior, a l'interval $(0,2)$ talla l'eix X al punt $x = 0.382$, i observem que $f(0.2) = 0.44$ i $f(2) = -1$, és a dir, passa de positiu a negatiu, per tant

$$A = \left| \int_0^{0.382} f(x) dx \right| + \left| \int_{0.382}^2 f(x) dx \right| = |F(0.382) - F(0)| + |F(2) - F(0.382)| = \\ = |0.181695| + |-1.51503| = 1.69673$$



11.3.3 Exercici del Youtube Determina l'àrea entre la gràfica de la funció $f(x) = x^2 - 2x - 3$ i l'eix X, entre $x = -3$ i $x = 4$.

Solució: <https://youtu.be/nRWHVUsnjpM> (Mates con Andrés)

11.3.4 Exercici del Youtube Trobeu l'àrea compresa entre $f(x) = x^2 - 4x + 3$ i

a) L'eix OX. b) L'eix OX, i l'interval entre $x = 0$ i $x = 4$. Solució: <https://youtu.be/knkAoSSUcwc>

11.3.5 Exercici del Youtube Calcular l'àrea determinada per la gràfica de les següents funcions a l'interval indicat.

a) $f(x) = -2x + 3$, $[0,1]$

b) $f(x) = 1 - x^2$, $[-1,1]$

c) $f(x) = x^2 - x^3$, $[0,1]$

d) $f(x) = x^2 - x^3$, $[-1,1]$

Solució: <https://youtu.be/gbkwAWNZVMY> (Unicoos)

11.3.6 Calcula l'àrea determinada entre la gràfica de la funció, l'eix X i els extrems indicats:

a) $f(x) = x^2$ entre $x = 2$ i $x = 4$

d) $f(x) = x^2 - x - 6$ entre $x = 0$ i $x = 2$

b) $f(x) = 4 - 3x^2$ entre $x = -1$ i $x = 1$

e) $f(x) = x^3$ entre $x = -2$ i $x = 4$

c) $f(x) = \sqrt{x}$ entre $x = 0$ i $x = 9$

f) $f(x) = x^3 - x$ entre $x = -1$ i $x = 1$

11.3.7 Justifica, raonadament i sense calcular l'integral, perquè $\int_{-1}^1 x^3 dx = 0$

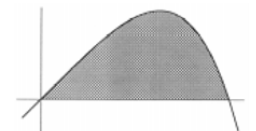
11.3.8 a) Trobeu una funció polinòmica $y = g(x)$ de grau 3 tal que talli l'eix de les ordenades en el punt $(0, 5)$, que la recta tangent a $y = g(x)$ en el punt d'abscissa $x = 1$ sigui horitzontal i que $g''(x) = 2x + 1$.

b) Comproveu que la funció $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 16$ té una arrel a $x = 2$ i que és estrictament creixent a l'interval $(0, 4)$. Utilitzeu aquesta informació per a calcular l'àrea determinada per la funció $f(x)$, l'eix de les abscisses i les rectes $x = 0$ i $x = 4$.

PAU CAT TEC JUNY 2022 2.4

11.3.9 Calculeu l'àrea de la regió limitada per la gràfica de la funció $y = -x^4 + x$ i l'eix de les x que està representada en el dibuix següent:

PAU CAT CCSS SET 1999 2.3



11.3.10 Youtube Calcula l'àrea de la regió limitada per la gràfica de la funció

$y = x^2 - 2x$, l'eix X i les rectes $x = 1$ i $x = 3$. <https://youtu.be/SoVqez6BYhc>

11.3.11 Youtube Calcula l'àrea entre $f(x) = x^2 - 2x + 2$ i $g(x) = -x^2 + 4x - 1$ entre $x=0$ i $x=3$.

<https://youtu.be/22u-geDzNrY> (Mosta Profe)

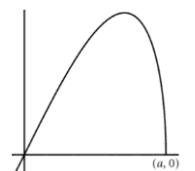
11.3.12 Youtube Determina l'àrea entre $f(x) = x^3 - 12x$ i $g(x) = 9x + 20$ https://youtu.be/R1VoUi_MzLI

11.3.13 La gràfica de la funció $f(x) = x\sqrt{9-x^2}$ és la següent:

a) Trobeu el punt de tall, $(a, 0)$, de la funció amb la part positiva de l'eix OX.

b) Calculeu l'àrea del recinte limitat per la gràfica de $f(x)$ i l'eix OX en el primer quadrant.

PAU CAT TEC JUNY 2012 #1.2



11.4.2 Youtube Determina el valor de l'àrea compresa entre $f(x) = x^2$ i $g(x) = x + 2$

Solució: <https://youtu.be/OdTGvIWm030> (Xavi Mates)

11.4.3 Youtube Determina l'àrea compresa entre $f(x) = -x^2 + 7x - 10$ i l'eix OX.

Solució: <https://youtu.be/9U1vUXdPX4A>

11.4.4 Youtube Trobeu el valor de l'àrea compresa entre $f(x) = -x^2 + 2x$ i $g(x) = x^3 - x^2 - 2x$

Solució: <https://youtu.be/CHG8O7Qs4IY> (Xavi Mates)

11.4.5 Youtube Determina l'àrea entre les gràfiques de les funcions $f(x) = 3 + 2x - x^2$ i $g(x) = x^2 - 4x + 3$.

Solució: <https://youtu.be/kx4x2ki2bsY> (julioprofe)

11.4.6 Sigui la funció $f(x)$ definida per $f(x) = -3x + e^{2x^3-1}$

a) Justifiqueu que $f(x) = 2$ té una solució en l'interval $(-1, 0)$.

b) Sigui la funció $h(x) = -3x^2 + e^{2x^3-1}$. Calculeu l'àrea de la regió compresa entre les gràfiques de les funcions $f(x)$ i $h(x)$.

PAU CAT TEC SET 2023 2.4 (Solució: [PAUTEC](#) pàg. 822)

11.4.7 Siguin les funcions $f(x) = x^3 - 9x$ i $g(x) = 7x$.

a) Estudieu els intervals de creixement i decreixement de $f(x)$.

b) Calculeu l'àrea de la regió del semiplà $x \geq 0$ compresa entre les gràfiques de $f(x)$ i $g(x)$.

PAU CAT TEC JUNY 2021 5.2 (Solució: [PAUTEC](#) pàg. 672)

11.4.8 Considereu les funcions $f(x) = x^2$ i $g(x) = \frac{1}{x}$, i la recta $x = e$.

a) Feu un esbós de la regió delimitada per les seves gràfiques i l'eix de les abscisses. Calculeu les coordenades del punt de tall de $y = f(x)$ amb $y = g(x)$.

b) Calculeu l'àrea de la regió descrita en l'apartat anterior.

PAU CAT TEC JUNY 2019 1.6 (Solució: [PAUTEC](#) pàg. 549)

11.4.9 Considereu les rectes $y = x$ i $y = 2x$, i la paràbola $y = x^2$.

a) Calculeu els punts d'intersecció entre les gràfiques de les diferents funcions i feu un esbós de la regió delimitada per les gràfiques.

b) Calculeu l'àrea de la regió de l'apartat anterior.

PAU CAT TEC SET 2019 5.1 (Solució: [PAUTEC](#) pàg. 554)

11.4.10 Siguin les funcions $f(x) = x^2 - 1$ i $g(x) = 3 - x^2$.

a) Feu un esbós de les gràfiques de les paràboles $y = f(x)$ i $y = g(x)$ en un mateix sistema d'eixos cartesianes i trobeu els punts de tall amb l'eix de les abscisses, els vèrtexs i els punts de tall entre les dues gràfiques.

b) Calculeu l'àrea de la regió del semiplà $y \geq 0$ compresa entre les gràfiques de $f(x)$ i $g(x)$.

PAU CAT TEC SET 2018 3.6 (Solució: [PAUTEC](#) pàg. 523)

11.4.11 La classe de l'Èlia ha dissenyat el logotip següent per a pintar-lo a la paret de l'institut:

La corba que passa pel punt A és $y = f(x)$, amb

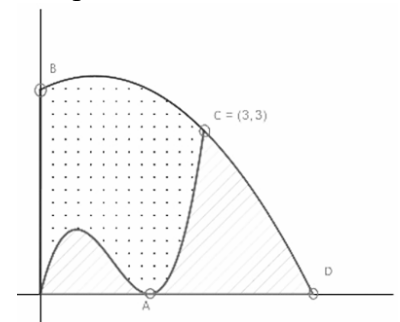
$f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$, i la que passa pels punts B, C = (3, 3) i D

és $y = g(x)$, amb $g(x) = -\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 4$.

a) Calculeu les coordenades dels punts A, B i D.

b) Calculeu l'àrea de la zona puntejada.

c) Els alumnes volen pintar la part puntejada de color blau i la part ratllada de color vermell. Sabent que l'àrea total del logotip és $175/12 \text{ m}^2$, de quin color necessitaran més pintura?



PAU CAT TEC SET 2024 #3.3 (Sol. [PAUTEC](#) pàg 929)

11.5 Més exercicis d'àrea entre les gràfiques de dues funcions.

11.5.1 Calculeu l'àrea de la regió del pla limitada en el primer quadrant per les gràfiques de les funcions $y = x^2$, $y = 4x^2$ i $y = 9$.

PAU CAT TEC JUNY 2014 3.4 (Solució: [PAUTEC](#) pàg. 369)

11.5.2 Calculeu l'àrea del recinte limitat per les corbes d'equació $f(x) = x^2 - x + 2$ i $g(x) = 5 - 3x$.

PAU CAT TEC JUNY 2011 4.1 (Solució: [PAUTEC](#) pàg. 296)

11.5.3 Considereu les corbes $y = 4x - x^2$ i $y = x^2 - 6$. a) Trobeu-ne els punts d'intersecció. b)

Representeu les dues corbes en una mateixa gràfica, on es vegi clarament el recinte que limiten entre elles. c) Trobeu l'àrea d'aquest recinte limitat per les dues corbes.

PAU CAT TEC JUNY 2009 3.2

(Solució: [PAUTEC](#) pàg. 246)

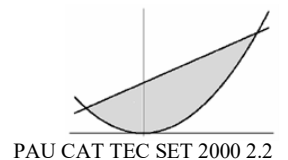
11.5.4 Busqueu els extrems relatius i els punts de tall amb els eixos, i feu una representació aproximada de la corba d'equació $y = x^4 - x^2$. A continuació, calculeu l'àrea del recinte tancat per aquesta corba i l'eix d'abscisses. PAU CAT TEC 2007 1.3 (Solució: [PAUTEC](#) pàg. 195)

11.5.5 Determineu l'àrea finita de la regió del pla compresa entre les dues paràboles $y = -x^2 + 4x + 1$ i $y = x^2 - 6x + 9$. PAU CAT CCSS JUNY 2003 2.3 (Solució: [PAUTEC](#) pàg. 93)

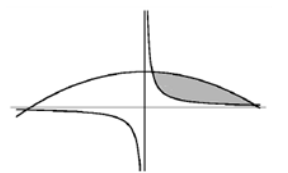
11.5.6 Considereu la corba d'equació $f(x) = x^3 - x$.
 a) Calculeu els punts en què la gràfica de $f(x)$ talla l'eix d'abscisses i expliqueu raonadament on $f(x)$ és positiva i on és negativa.
 b) Trobeu l'àrea del recinte limitat per la part positiva de la gràfica de $f(x)$ i el semieix negatiu d'abscisses. PAU CAT CCSS SET 2002 1.1 (Solució: [PAUTEC](#) pàg. 81)

11.5.7 Sabeu que la gràfica de la funció $f(x)$ passa pel punt $(1, -4)$ i que la seva funció derivada és $f'(x) = 2x - 2$.
 a) Determineu l'expressió de $f(x)$.
 b) Calculeu l'àrea de la regió limitada per la gràfica de $f(x)$ i l'eix d'abscisses OX. PAU CAT TEC SET 2001 4.4 (Solució: [PAUTEC](#) pàg. 65)

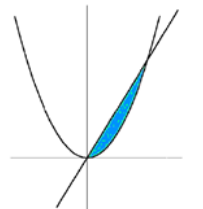
11.5.8 Calculeu per integració la superfície del recinte delimitat per les corbes $y = x^2$ i la recta d'equació $y - x - 6 = 0$ representat en el dibuix següent:



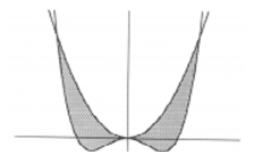
11.5.9 Calculeu l'àrea que té l'únic recinte tancat limitat per les gràfiques de les funcions $y = -x^2 + 7$ i $y = 6/x$ representat en el dibuix següent: PAU CAT TEC JUNY 2000 1.2



11.5.10 Calculeu l'àrea de l'únic recinte tancat limitat per les gràfiques de les funcions $y = 8x$ i $y = x^4$. PAU CAT CCSS JUNY 2000 3.2

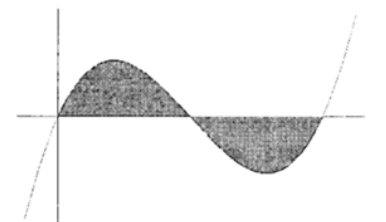


11.5.11 Calculeu l'àrea determinada per les corbes d'equacions $y = x^4 - 2x^2$ i $y = 2x^2$ representada en el dibuix següent: PAU CAT TEC JUNY 1999 1.2



11.5.12 a) Dibuixeu la gràfica de la funció $y = -x^2 + 5x - 6$.
 b) Calculeu l'àrea del recinte limitat per la gràfica de la funció anterior i l'eix de les x. PAU CAT CCSS JUNY 1999 1.4 Solució: [SC](#) pàg. 31

11.5.13 Considereu la funció $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ la gràfica de la qual és aproximadament la del dibuix següent: Calculeu l'àrea de la regió ombrejada. PAU CAT TEC JUNY 1998 3.3



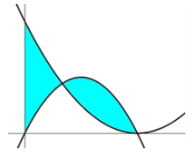
11.5.14 Determineu l'àrea del recinte tancat per les corbes $y = x^3 - 3x + 8$, $y = -3x$, i les rectes verticals $x = -3$, $x = 0$.

11.5.15 Determineu l'àrea del recinte tancat per les corbes $y = x$, $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{4}$.

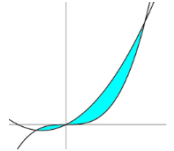
11.5.16 Trobeu l'àrea de la regió limitada per les corbes $y = x^3 - 2x^2 + 3$ i $y = x^2 + x$ entre $x = -2$ i $x = 2$

11.5.17 Calcula l'àrea ombrejada de la figura següent.

Les funcions representades són: $f(x) = \frac{(x-2)^2}{2}$ i $g(x) = -x^2 + 2x$

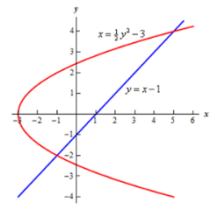


11.5.18 Determina l'àrea de la regió tancada per les corbes $y = x^3$ i $y = x^2 + x$



11.5.19 Calcula l'àrea determinada entre les funcions $f(x) = 2x^2 + 10$ i $g(x) = 4x + 16$, entre $x = -2$ i $x = 5$.

11.5.20 Calcula l'àrea determinada entre les corbes $x = \frac{1}{2}y^2 - 3$ i $y = x - 1$



11.5.21 Determina l'àrea tancada entre la corba $y = x^3 - 3x$ i la recta $y = x$.

11.5.22 Determineu l'àrea tancada per la corba $y = 2x^3 - 3x^2$ i la part positiva de l'eix OX

11.5.23 Determineu l'àrea tancada per les corbes $y = x^3$ i $y = 2x^2 - x$.

11.5.24 Determineu l'àrea tancada per les corbes $y = x^3 + x$, $y = 2x$ amb $x > 0$.

11.5.25 Determineu l'àrea tancada per les corbes $y = x$, $x = y^3$ en el primer quadrant ($x \geq 0$, $y \geq 0$)

11.5.26 Determineu l'àrea del recinte delimitat per la recta $y + 2x - 6 = 0$ i la paràbola $y = -x^2 + 2x + 3$

11.5.27 Dibuixa esquemàticament el recinte delimitat per les corbes $2y - x = 3$, $y = 1$ i $xy = 2$.
Determina la seva àrea.

11.5.28 Determina l'àrea delimitada per la paràbola $y = x^2 - 2$ i la recta $y = x$.

11.5.29 Determina l'àrea entre la recta $y = x - 1$ i la paràbola $y = -x^2 + 6x - 5$.

11.5.30 Calcula l'àrea delimitada per les corbes $y = e^x$, $y = -x^2$, entre $x = 0$ i $x = 1$.

11.5.31 Youtube Calculeu l'àrea compresa entre les funcions $f(x) = x^2$ i $g(x) = x$

11.5.32 Youtube Calculeu l'àrea entre les funcions $f(x) = x^2$ i $g(x) = x + 2$

11.5.33 Youtube Calcula l'àrea compresa entre $y = x^2 + 1$, $y = x$, $x = 1$, $x = 2$.

11.5.34 Youtube Determina l'àrea entre les funcions $f(x) = -x^2 + 4x$, $g(x) = x$, $x = -1$, $x = 3$.

11.5.35 Youtube Determina l'àrea entre les funcions $f(x) = \frac{-1}{2}x^2 + \frac{7}{2}x - 3$ i $g(x) = -x + 4$ (dintre de $y \geq 0$).

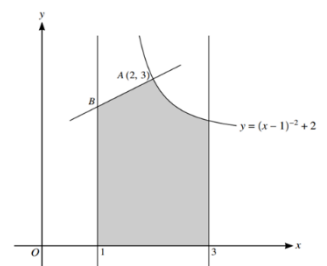
<https://youtu.be/Pp2mowr3yII> (MathemaTrick) german

11.5.36 La següent imatge mostra part de la gràfica de la funció

$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} + 2$ i la seva recta normal associada al punt $A=(2,3)$.

a) Determina l'equació de la recta normal.

b) Determina l'àrea ombrejada (entre $x=1$ i $x=3$). [A Level](#) 2019



11.6 Àrea i recta tangent.

- 11.6.1 Youtube** Trobeu, en el 1r quadrant, l'àrea compresa entre $f(x) = \frac{x^2}{8} + 1$, la seva recta tangent en $x = 4$ i els eixos de coordenades. Solució: https://youtu.be/zcaAsaa_GZ0 (Xavi Mates)
- 11.6.2 Youtube** a) Coordenades del punt en el què la recta tangent a $y = x^2$ és paral·lela a la bisectriu del primer quadrant. b) Àrea del recinte limitat entre $y = x^2$, l'eix X i la seva recta tangent en el punt (1,1) <https://youtu.be/jCDxBLS351I> (unicoos)
- 11.6.3** a) Donada la funció $f(x) = \frac{4}{x}$, calculeu l'equació de la recta tangent a $y = f(x)$ en el punt d'abscissa $x = 1$. Trobeu també l'equació de la recta normal a $y = f(x)$ en aquest mateix punt. b) Feu un esbós de les gràfiques de la corba $y = f(x)$ i de la recta $4x + y = 8$, i calculeu l'àrea delimitada per aquestes dues gràfiques, l'eix de les abscisses i la recta vertical $x = 3$.
PAU CAT TEC SET 2021 #1.2 (Solució: [PAUTEC](#) pàg. 690)
- 11.6.4** Considereu la funció $f(x) = x^3$.
a) Calculeu en quin punt del tercer quadrant la recta tangent a $y = f(x)$ és paral·lela a la recta $3x - y = 4$. Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica en aquest punt i feu un dibuix aproximat de la gràfica de la funció i les dues rectes.
b) Calculeu l'àrea de la regió delimitada per $y = f(x)$ i la recta $y = 3x + 2$.
PAU CAT TEC JUNY 2020 #6
- 11.6.5** Responen a les qüestions següents:
a) Determineu l'equació de la recta tangent a la corba $y = x^3$ en el punt d'abscissa $x = 2$.
b) Calculeu l'àrea de la regió plana finita limitada per la corba $y = x^3$ i la recta $y = 3x - 2$.
PAU CAT TEC JUNY 2015 2.3 (Solució: [PAUTEC](#) pàg. 408)
- 11.6.6** Considereu la paràbola d'equació $y = x^2 + 2x - 3$.
a) Calculeu les equacions de les rectes tangents a la paràbola en els punts d'abscissa $x = -1$ i $x = 1$.
b) Calculant el mínim de la funció $y = x^2 + 2x - 3$, trobeu el vèrtex de la paràbola.
c) Trobeu les interseccions de la paràbola amb els eixos i feu una representació gràfica de la paràbola i de les tangents obtingudes al primer apartat.
d) Calculeu l'àrea compresa entre la paràbola i les rectes tangents.
PAU CAT TEC SET 2006 4.5 (Solució: [PAUTEC](#) pàg. 181)
- 11.6.7** Considereu la funció $f(x) = 4x - x^2$.
a) Calculeu l'equació de les rectes tangents a la gràfica de f en els punts d'abscisses $x = 0$ i $x = 4$.
b) Feu un gràfic dels elements del problema.
c) Calculeu l'àrea compresa entre la gràfica de f i les rectes tangents que heu trobat a l'apartat a).
PAU CAT TEC JUNY 2005 1.6 (Solució: [PAUTEC](#) pàg. 151)
- 11.6.8** a) Escriviu l'equació de la recta tangent a la paràbola $y = x^2$ en el punt d'abscissa $x = -1$.
b) Calculeu l'àrea de la regió que limiten la tangent i la corba anteriors per a x entre 0 i 1.
PAU CAT CCSS SET 1998 2.6
- 11.6.9** Determina l'àrea limitat per la gràfica de la funció $f(x) = \frac{9-x^2}{4}$, la seva recta tangent en el punt d'abscissa $x = 1$ i l'eix d'abscisses.
- 11.6.10** Determina l'àrea delimitada per la corba $y = x^4$, la seva recta tangent en el punt (1,1) i l'eix OY.
- 11.6.11** Calcula l'àrea determinada per la corba $y = 2x^3$, la seva recta tangent en l'origen de coordenades i la recta $x = 2$.
- 11.6.12** Determineu l'àrea del recinte delimitat per la paràbola $y = -x^2 - 2x + 3$ i les seves rectes tangents en $x = -1$ i $x = 1$.
- 11.6.13** Determineu l'àrea de la regió delimitada per la hipèrbola $xy = 1$, la seva recta tangent en el punt (1,1) i la recta $x = 2$.
- 11.6.14** Determineu l'àrea de la regió delimitada per la corba $y = -2(x-1)^3$, la seva recta tangent en (1,0) i la recta $x = 0$.

11.6.15 a) Representa esquemàticament la gràfica de la funció $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

b) Determina la seva recta tangent en el punt $x = 0$

c) Calcula l'àrea determinada per la funció i la recta tangent anterior.

11.6.16 Youtube: Calcula l'àrea determinada per la gràfica de la funció $f(x) = 1 - x^2$ i les seves rectes tangents en els punts $x = 1$ i $x = -1$. <https://youtu.be/EN2LDzBrTPQ> (shurprofe)

11.6.17 Determina l'àrea delimitat per les gràfiques de les funcions $y = \frac{1}{x^2}$, $y = x$ i $y = 8x$

11.6.18 a) Determina la recta tangent a la funció $f(x) = \sqrt{x}$ en el punt $x = 1$.

b) Determina l'àrea de la regió delimitada per la gràfica de $f(x)$, la recta tangent anterior i la recta $x = 0$.

11.7 Àrea amb funcions parametritzades.

Exercici resolt. Determina el valor de p positiu per al qual la gràfica de $f(x) = x^2$, la seva recta tangent pel punt d'abscissa $x = p$ i l'eix d'abscisses determinen un recinte d'àrea igual a $27/12$.

Solució:

En primer lloc trobem la recta tangent a la funció pel punt $x = p$:

$$a = f'(p) = 2p, \quad b = f(p) - a \cdot p = p^2 - 2p \cdot p = -p^2,$$

$$y = ax + b = 2px - p^2$$

Aquesta recta tangent talla l'eix X al punt $2px - p^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{p^2}{2p} = \frac{p}{2}$, és a dir, al punt mig del

segment. L'àrea que volem calcular la podem interpretar com la diferència entre l'àrea gran de la gràfica (Àrea A) i l'àrea del triangle de la dreta que determina la recta tangent (Àrea B).

$$A_1 = \int_0^p x^2 dx = F(p) - F(0) = \frac{p^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{p^3}{3}$$

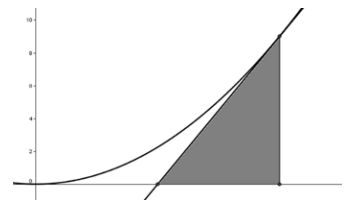
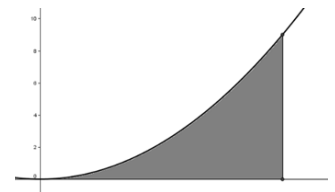
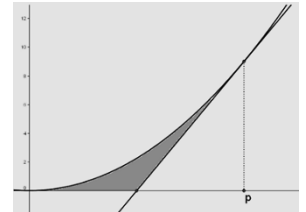
$$F(x) = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$$

L'àrea B és l'àrea d'un triangle que té base $p/2$ i altura $f(p) = p^2$, per tant no cal fer cap integral, apliquem la fórmula de l'àrea del triangle:

$$B = \frac{p/2 \cdot p^2}{2} = \frac{p^3}{4}$$

$$\text{Finalment, } \text{Àrea} = A - B = \frac{p^3}{3} - \frac{p^3}{4} = \frac{4p^3 - 3p^3}{12} = \frac{p^3}{12} = \frac{27}{12} \Leftrightarrow$$

$$p^3 = 27 \Leftrightarrow p = 3 \text{ (suposem } p > 0)$$



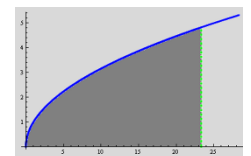
Exercici Resolt. Determina el valor de k de forma que l'àrea entre la funció $f(x) = \sqrt{x}$, la recta vertical $x = k$ i els eixos de coordenades sigui igual a 75.2

Solució: Veiem que la funció està sempre per sobre de l'eix X, per tant l'àrea coincideix amb el valor de la integral definida:

$$\text{Àrea} = \int_0^k f(x) dx = \int_0^k \sqrt{x} dx = F(k) - F(0) ;$$

$$F(x) = \int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + C : = \frac{2k^{3/2}}{3} - \frac{2 \cdot 0^{3/2}}{3} = \frac{2k^{3/2}}{3}$$

$$\text{Resoldre l'equació } \frac{2k^{3/2}}{3} = 75.2 \Rightarrow k^{3/2} = \frac{3 \cdot 75.2}{2} \Rightarrow k^{3/2} = 112.8 \Rightarrow k = 112.8^{2/3} \cong 23.3457$$



Exercici Youtube Donada la funció $f(x) = x^3 + mx^2 + 1$, amb $m \geq 0$, determina el valor de m de forma que l'àrea del recinte limitat per la gràfica d'aquesta funció, l'eix d'abscisses i les rectes $x = 0$ i $x = 2$ sigui 10 .

Solució: <https://youtu.be/lakOFPPU-w8>

11.7.1 Sigui $f'(x) = 3x^2 - 12x$ la derivada d'una funció $f(x)$.

- a) Si sabem que $f(x)$ talla l'eix de les abscisses en $x = 1$, calculeu l'expressió de la funció $f(x)$.
- b) Calculeu l'abscissa del punt d'inflexió de $f(x)$ i estudeu la concavitat de la funció.
- c) Sabem que l'àrea del recinte limitat per la corba $y = f''(x)$, l'eix de les abscisses i les rectes $x = 0$ i $x = a$, amb $a > 2$, és $15u^2$. Calculeu el valor de a . *Sol $a=3$*

PAU CAT TEC JUNY 2022 2.1 (Solució: [PAUTEC](#) pàg. 727)

11.7.2 Siguin les funcions $f(x) = x^3$ i $g(x) = a \cdot x^2$, en què a és un nombre real positiu.

- a) Trobeu, en funció del paràmetre a , els punts de tall entre les dues corbes $y = f(x)$ i $y = g(x)$ i feu un esbós de la regió limitada per les dues gràfiques. *Sol $a=3$*
- b) Calculeu el valor de a perquè l'àrea compresa entre $y = f(x)$ i $y = g(x)$ sigui $\frac{27}{4}u^2$.

PAU CAT TEC SET 2020 #4.1 (Solució: [PAUTEC](#) pàg. 600)

11.7.3 Siguin les paràboles $f(x) = x^2 + k^2$ i $g(x) = -x^2 + 9k^2$.

- a) Calculeu les abscisses, en funció de k , dels punts d'intersecció entre les dues paràboles.
- b) Calculeu el valor del paràmetre k perquè l'àrea compresa entre les paràboles sigui de 576 unitats quadrades.

PAU CAT TEC JUNY 2016 3.6 (Solució: [PAUTEC](#) pàg. 443)

11.7.4 La corba $y = x^2$ i la recta $y = k$, amb $k > 0$, determinen una regió plana.

- a) Calculeu el valor de l'àrea d'aquesta regió en funció del paràmetre k .
- b) Trobeu el valor de k perquè l'àrea limitada sigui $\sqrt{6}u^2$.

PAU CAT TEC JUNY 2013 4.2 (Solució: [PAUTEC](#) pàg. 338)

11.7.5 Definim les funcions $f(x) = a(1 - x^2)$ i $g(x) = \frac{x^2 - 1}{a}$, en què $a > 0$.

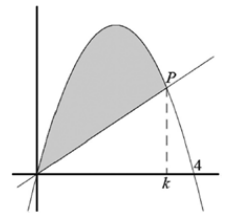
- a) Comproveu que l'àrea del recinte limitat per les gràfiques de les funcions és: $\frac{4(1+a^2)}{3a}$
- b) Calculeu el valor del paràmetre a perquè aquesta àrea sigui mínima.

PAU CAT TEC JUNY 2011 1.3 (Solució: [PAUTEC](#) pàg. 295)

11.7.6 En la figura es mostra la corba $y = x(4 - x)$ i una recta r que passa per l'origen i talla la corba en un punt P d'abscissa k , amb $0 < k < 4$.

- a) Trobeu l'àrea ombrejada, delimitada per la corba i la recta, en funció de k .
- b) Trobeu per a quin valor de k l'àrea de la regió ombrejada és la meitat de l'àrea del recinte limitat per la corba i l'eix OX .

PAU CAT TEC JUNY 2010 5.6 (Solució: [PAUTEC](#) pàg. 282)



11.7.7 Considereu la funció $f(x) = \frac{x(a-x)}{a^3}$, amb $a > 0$.

- a) Trobeu els punts de tall de la funció $f(x)$ amb l'eix OX .
- b) Comproveu que l'àrea del recinte limitat per la gràfica de la funció $f(x)$ i l'eix d'abscisses no depèn del valor del paràmetre a .

PAU CAT TEC JUNY 2009 4.3

11.7.8 Donades les funcions $f(x) = x^2 - ax - 4$ i $g(x) = \frac{x^2}{2} + b$:

- a) Calculeu a i b de manera que les gràfiques de $f(x)$ i de $g(x)$ siguin tangents en el punt d'abscissa $x = 3$, és a dir, que tinguin la mateixa recta tangent en aquest punt.
- b) Trobeu l'equació de la recta tangent esmentada en l'apartat anterior.
- c) Pel valor de a obtingut en el primer apartat, calculeu el valor de l'àrea de la regió limitada per l'eix d'abscisses OX i la funció $f(x)$.

PAU CAT TEC SET 2007 3.6

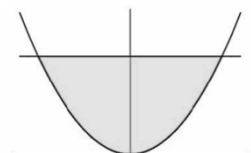
11.7.9 Considereu la funció $f(x) = x^3 + mx^2 + 1$, $m \geq 0$.

- a) Calculeu el valor de m per tal que l'àrea del recinte limitat per la gràfica de la funció, l'eix OX i les rectes $x = 0$ i $x = 2$ sigui de 10 unitats quadrades.
- b) Per a $m = 1$, indiqueu el punt o els punts on la recta tangent a la gràfica de la funció forma un angle de 45° amb el semieix positiu de OX .

PAU CAT TEC JUNY 2004 1.5

11.7.10 Considerem la regió S del pla limitada per la paràbola $y = 3x^2$ i la recta $y = 3$ representada en l'esquema següent:

Siguin A i B els punts d'intersecció de la recta i la paràbola, i T el triangle que té per vèrtexs A , B i l'origen de coordenades $(0, 0)$. Calculeu l'àrea de la regió que resulta quan es treu el triangle T a la regió S .

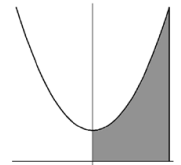


PAU CAT TEC JUNY 2003 5.3

11.7.11 Calculeu el valor positiu de a que fa que l'àrea compresa entre la recta d'equació $y = ax + 2a$ i la paràbola $y = ax^2$ valgui 18. PAU CAT TEC JUNY 2002 1.1 (Solució: [PAUTEC](#) pàg. 831)

11.7.12 Considereu la paràbola $y = x^2$ i la recta $y = mx$, amb m real positiu.
 a) Calculeu l'àrea de la regió tancada delimitada per les gràfiques de la paràbola i la recta en funció de m . b) Quin valor té m si l'àrea de l'apartat a) és 288? PAU CAT CCSS JUNY 2002 3.1

11.7.13 Donada la funció $f(x) = x^2 + a$, amb $a > 0$, calculeu el valor de a que faci que l'àrea determinada per la gràfica de la funció, l'eix d'abscisses i les rectes $x = 0$ i $x = 3$ valgui 27.



PAU CAT CCSS JUNY 2000 1.4

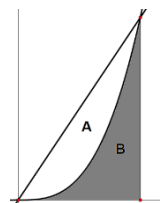
11.7.14 Trobeu el valor del coeficient k de manera que l'àrea limitada per la funció $f(x) = -x^2 + k$ i l'eix d'abscisses sigui igual a $36 u^2$. PAU CAT TEC SET 1999 5.3

11.7.15 Youtube Resol l'equació $\int_{k-1}^k \frac{1}{x+k} dx = 3$ <https://youtu.be/PRuSFNmKM7s>

11.7.16 Youtube Determina b de forma que $\int_0^b x^2 - 3 dx = 0$ <https://youtu.be/fResSfmRSJA>

11.7.17 Exercici resolt pas a pas Determina el valor de k si sabem que la regió determinada per les corbes $y^2 = kx$ i $x^2 = ky$, amb $k > 0$ té un àrea igual a 12. IB 2006 TZ1 P1 #18

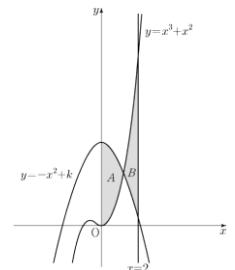
11.7.18 Exercici resolt pas a pas Donades les gràfiques de $f(x) = x^3$ i $g(x) = ax$, on $a > 0$,
 a) Demuestra que la regió A (blanca) i la regió B (gris) tenen el mateix àrea, independentment del valor d' a . b) Determina el valor d' a per al què aquesta àrea sigui igual a $9 u^2$.



11.7.19 Exercici resolt pas a pas Llegeix ☺ i resol el següent problema:

10. 두 곡선 $y = x^3 + x^2$, $y = -x^2 + k$ 와 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A , 두 곡선 $y = x^3 + x^2$, $y = -x^2 + k$ 와 직선 $x = 2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 B 라 하자. $A = B$ 일 때, 상수 k 의 값은? (단, $4 < k < 5$) [4점]

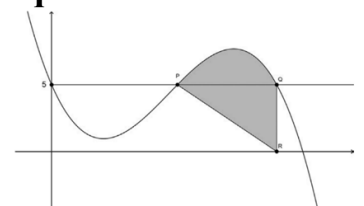
Suneung (Selectivitat de Corea del Sud) 2023 Problema 10



- ① $\frac{25}{6}$ ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{9}{2}$ ④ $\frac{14}{3}$ ⑤ $\frac{29}{6}$

11.8 Més problemes PAU amb integració de funcions polinòmiques.

11.8.1 En Joan troba entre els papers del seu avi un esbós com el de la figura adjunta, on es descriu un terreny de regadiu que ha deixat en herència al seu pare. La corba de la gràfica és $y = f(x)$, amb $f(x) = -x^3 + 7x^2 - 6x + 5$.



a) A partir de l'expressió de $f(x)$, calculeu les coordenades dels punts P, Q i R indicats a la figura. Calculeu també l'equació de la recta PR.
 b) Calculeu la superfície del terreny.

PAU CAT TEC JUNY 2024 1.3 (Solució: [PAUTEC](#) pàg. 904)

11.8.2 Considereu la funció $f(x) = x^3$ i sigui a un nombre real estrictament positiu.
 a) Calculeu l'equació de la recta t tangent a la gràfica de la funció f en el punt d'abscissa $x=a$. Trobeu el punt de tall de la recta t amb l'eix de les abscisses (en funció de a).
 b) Feu un esbós de la gràfica de la funció f i la recta t . Calculeu el valor de a perquè l'àrea en el primer quadrant limitada per la funció f , la recta t i l'eix de les abscisses sigui $108 u^2$.

PAU TEC JUNY 2022 5.2 (Sol. [PAUTEC](#) pàg. 759)

11.8.3 Considereu les funcions $f(x) = -x^2 + x + 6$ i $g(x) = -9x + 3x^2$.
 a) Calculeu l'àrea de la regió delimitada per les dues funcions.
 b) Trobeu l'equació de la recta tangent a la funció $f(x)$ en el punt $(-2, 0)$. Representeu aquesta recta tangent i les funcions $f(x)$ i $g(x)$ en uns mateixos eixos de coordenades.

PAU TEC JUNY 2023 5.1 (Sol. [PAUTEC](#) pàg. 843)

12 Tècniques d'integració.

(La integració de funcions trigonomètriques les trobareu també a l'apartat 8.4)

12.1 Integrals immediates.

12.1.1 Sigui la funció $f(x) = \sin(x)$.

a) Calculeu l'equació de les rectes tangents a la funció f en els punts d'abscissa $x=0$ i $x=\pi$, respectivament. Trobeu les coordenades del punt en què es tallen les dues rectes.

b) Calculeu l'àrea de la regió limitada per la gràfica de la funció f i les rectes tangents de l'apartat anterior (en cas de no haver resolt l'apartat anterior, suposeu que les rectes són $y=x$ i $y=-x+\pi$, respectivament).

PAU CAT TEC SET 2016 1.4

12.1.2 Calcula $\int_0^4 \sqrt{x} dx$

12.1.3 Repàs d'integració (Integrals immediates)

- | | | |
|--|--|--|
| a) $\int_0^5 5x dx$ | b) $\int_1^{\sqrt{2}} x dx$ | c) $\int_1^{1/2} t^2 dt$ |
| d) $\int_0^2 2t - 3 dt$ | e) $\int_0^{\sqrt{2}} t - \sqrt{2} dt$ | f) $\int_{-1}^1 x^2 - 2x + 3 dx$ |
| g) $\int_0^2 3x^2 + x - 5 dx$ | h) $\int_1^2 3u^2 du$ | i) $\int_0^1 x^2 + \sqrt{x} dx$ |
| j) $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} dx$ | k) $\int_1^2 \frac{2}{x^3} - \frac{x^3}{2} dx$ | l) $\int_4^9 \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ |

12.2 Integrals quasiimmediates, mètode de substitució u.

Fórmula del mètode de substitució.

Pretenem calcular una integral de la forma: $\int f(g(x))g'(x) dx$

Fem el canvi de variable $u = g(x)$ ens queda: $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)u'dx = \int f(u)du$

Exercici resolt.

a) $\int \sin^2 x \cos x dx$ b) $\int \frac{\ln x}{x} dx$ c) $\int \tan x dx$ d) $\int x\sqrt{x^2+1} dx$

Sol: a) $u = \sin x \Rightarrow u' = \cos x$, i per tant: $\int \sin^2 x \cos x dx = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{\sin^3 x}{3} + C$

b) $u = \ln x \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$ $\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x \frac{1}{x} dx = \int u u' dx = \int u du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C$

c) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} \sin x$ $u = \cos x \Rightarrow u' = -\sin x$ $\int \tan x dx = \int \frac{1}{u} u' dx = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| +$

$C = \ln|\cos x| + C$ d) $u = x^2 + 1 \Rightarrow u' = 2x$ $\int x\sqrt{x^2+1} dx =$

$\frac{1}{2} \int \sqrt{x^2+1} 2x dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{u} du = \frac{1}{2} \frac{2\sqrt{u}^3}{3} + C = \frac{\sqrt{(x^2+1)^3}}{3} + C$

12.2.1 Exercicis d'integració immediata i quasiimmediata.

a) $\int x^5 dx$ b) $\int (x + \sqrt{x}) dx$ c) $\int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{4} \right) dx$

d) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x}} dx$ e) $\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x\sqrt{x}} + 2 \right) dx$ f) $\int \frac{1}{\sqrt[4]{x}} dx$

g) $\int e^{5x} dx$ h) $\int \cos 5x dx$ i) $\int \sin ax dx$

j) $\int \frac{\ln x}{x} dx$ k) $\int \frac{1}{\sin^2 3x} dx$ l) $\int \frac{1}{\cos^2 7x} dx$

m) $\int \frac{1}{3x-7} dx$ n) $\int \frac{1}{1-x} dx$ o) $\int \frac{1}{5-2x} dx$

p) $\int \tan 2x dx$ q) $\int \sin^2 x \cos x dx$ r) $\int \cos^3 x \sin x dx$

s) $\int x\sqrt{x^2+1} dx$ t) $\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+3}} dx$

12.2.2 Youtube Calcula: a) $\int (x^2 + 1)^3 \cdot 2x \, dx$ b) $\int (3x^2 + 4x)(6x + 4) \, dx$ c) $\int \frac{6x + 2}{3x^2 + 2x + 1} \, dx$

Solució: <https://youtu.be/pHl8Pcmqns4> (Xavi Mates)

12.2.3 Youtube Calcula: a) $\int \sin^2 x \cdot \cos x \, dx$ b) $\int \sin x \cdot \cos x \, dx$ c) $\int \frac{\ln x}{x} \, dx$ d) $\int \frac{1}{2\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})} \, dx$

Solució: https://youtu.be/WXrHLt_-zIs (Xavi Mates)

12.2.4 Youtube Calcula: a) $\int e^{3x} \, dx$ b) $\int \frac{2}{(3x-2)^3} \, dx$ c) $\int (x^4 + 2x^3)(2x^3 + 3x^2) \, dx$

d) $\int \sin e^{2x} e^{2x} \, dx$ e) $\int \tan 2x \, dx$ Solució: <https://youtu.be/YhE7ymLhcfw> (Xavi Mates)

12.2.5 Exercici del Youtube Determina les següents integrals indefinides:

a) $\int 3x^2(x^3 + 5)^7 \, dx$ b) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}} \, dx$

Solució: <https://youtu.be/8B31SAkInD8> (NancyPi)

12.2.6 Exercici del Youtube Calcula:

a) $\int (x^2 + 1)^{50} 2x \, dx$ b) $\int x^2(x^3 - 4)^5 \, dx$ c) $\int 2x^3 \sin(x^4) \, dx$

d) $\int \cos(5x) \, dx$ e) $\int (2x-3)^{15} \, dx$ f) $\int \sin^2 x \cos x \, dx$

g) $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$ h) $\int x^4 \cdot \sqrt[3]{3-5x^5} \, dx$ i) $\int x^2 \sqrt{x-1} \, dx$

Solució: <https://youtu.be/aiBD9aI69C8> (Professor Leonard)

12.2.8 Calcula: a) $\int \frac{dx}{x(1 + \ln x)^3}$ b) $\int \frac{dx}{x \ln x}$ c) $\int_3^{10} \sqrt[3]{x-2} \, dx$ d) $\int_0^1 x e^{x^2-1} \, dx$

12.2.9 Determina la funció $f(x)$ que passa pel punt $(0,1)$ i que té com a derivada $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

12.2.10 Determineu una primitiva $F(x)$ de la funció $f(x) = x e^{x^2}$ que compleixi $F(0) = 0$.

12.2.11 Calcula l'àrea de la regió determinada per la corba $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ entre les abscisses 0 i 1.

12.2.12 Donades les funcions $f(x) = e^{x+1}$ i $g(x) = e^{-x+5}$,

a) Determineu els seus punts de tall.

b) Determineu l'àrea entre les dues funcions, entre $x = 1$ i $x = 3$.

12.2.13

a) Determineu els punts de tall entre les funcions $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{-x}$.

b) Determineu l'àrea que delimiten les seves gràfiques i la recta $x = 1$.

12.2.14 Representa gràficament la regió delimitada per la recta $x - y = 1$ i la corba $y = \sqrt{x-1}$.
Determina la seva àrea.

12.2.15

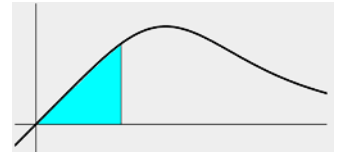
Més Integrals per canvi de variable.

- a) $\int x^2(3-10x^3)^4 dx$ b) $\int e^{7x} dx$ c) $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$
- d) $\int 5 \cos 4x dx$ e) $\int \frac{7x}{x^2+1} dx$ f) $\int 3x(x^2-7)^5 dx$
- g) $\int 8x^3\sqrt{1-x^2} dx$ h) $\int 7xe^{3x^2-5} dx$ i) $\int 6x^2(3x^3+2)^2 dx$
- j) $\int \frac{\ln x}{x} dx$ k) $\int \frac{4}{1+3x} dx$ l) $\int \frac{-5x}{4+7x^2} dx$
- m) $\int \sin^2 x \cos x dx$ n) $\int \frac{\sin(3 \ln x)}{x} dx$ o) $\int e^x \sqrt{1+e^x} dx$
- p) $\int 18x^2 \sqrt[4]{6x^3+5} dx$

12.2.16 *Exercici resolt.*

Calculeu l'àrea entre la corba $f(x) = \frac{x}{1+x^4}$

i les rectes $x=0$, $x=\frac{1}{2}$, i l'eix OX.



Solució: Comprovem que l'equació $f(x) = \frac{x}{1+x^4} = 0$ només té com a solució $x=0$, i per tant podem calcular aquest àrea com a una única integral: $A = \int_0^{1/2} \frac{x}{1+x^4} dx = F(1/2) - F(0)$

$F(x) = \int \frac{x}{1+x^4} dx \rightarrow$ Fem un canvi de variable $u = x^2 \rightarrow u' = 2x$

$F(x) = \int \frac{x}{1+x^4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^4} 2x dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+u^2} du = \frac{1}{2} \arctan(u) + C = \frac{1}{2} \arctan(x^2) + C$

$F(1/2) = \frac{1}{2} \arctan((1/2)^2) \cong 0.122489$ $F(0) = \frac{1}{2} \arctan(0^2) = 0$

Per tant: $A = \int_0^{1/2} \frac{x}{1+x^4} dx = F(1/2) - F(0) \cong 0.122489 - 0 \cong 0.122489$

12.2.17 b) Calculeu la funció $g(x)$ que satisfà $g'(x) = \frac{x^3}{9x^4+1}$ i que passa pel punt $(0, -1)$.

PAU CAT TEC SET 2022 3.4 (Solució: [PAUTEC](#) pàg 756)

12.2.18 Sigui la funció $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ definida en el domini $x > 0$, en què \ln és el logaritme neperià.

a) Trobeu les coordenades d'un punt de la corba $y = f(x)$ en el qual la recta tangent a la corba sigui horitzontal i analitzeu si la funció té un extrem relatiu en aquest punt.

b) Determineu si la funció $f(x)$ té alguna asímptota horitzontal.

c) Calculeu l'àrea de la regió delimitada per la corba $y = f(x)$ i les rectes $x=1$ i

$x=e$. Feu un dibuix aproximat de la gràfica de la funció en el domini $0 < x < 5$, en què quedi representada l'àrea que heu calculat.

PAU CAT TEC JUNY 2021 2.4 (Solució: [PAUTEC](#) pàg. 663)

12.2.19 Considereu la funció $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.

a) Calculeu el domini de la funció f , els punts de tall de la gràfica de f amb els eixos de coordenades, i els intervals de creixement i decreixement de f .

b) Calculeu l'àrea de la regió del pla determinada per la gràfica de la funció f , les rectes $x=1$ i $x=e$, i l'eix de les abscisses.

PAU CAT TEC SET 2019 5.6 (Solució: [PAUTEC](#) pàg. 554)

12.2.20 Sigui la funció $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$. a) Calculeu una primitiva de la funció $f(x)$.

b) Calculeu l'àrea limitada per la funció $f(x)$ i l'eix de les abscisses entre les abscisses $x=0$ i

$x = \frac{\pi}{4}$.

PAU CAT TEC SET 2017 2.6 (Solució: [PAUTEC](#) pàg. 484)

12.2.21 Donada la funció $f(x) = \sqrt{x-1}$ i la recta horitzontal $y = k$, amb $k > 0$,

- Feu un esbós del recinte limitat per les gràfiques de la funció i la recta, i els eixos de coordenades.
- Trobeu el valor de k sabent que l'àrea d'aquest recinte és igual a $14/3$.

PAU CAT TEC JUNY 2013 3.3

12.2.22 Per a $x \geq 1$, considereu la funció $f(x) = +\sqrt{x-1}$.

- Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de $f(x)$ en el punt d'abscissa igual a 10.
- Calculeu l'àrea del recinte limitat per la gràfica de $f(x)$, la recta d'equació $x = 5$ i l'eix OX.

PAU CAT TEC JUNY 2013 5.4

12.2.23 Se sap que certa funció derivable $F(x)$ verifica les condicions següents:

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \quad \text{i} \quad F(1) = 3$$

- Trobeu $F(x)$.
- Calculeu l'àrea compresa entre $F(x)$ i l'eix OX des de $x=0$ fins a $x=1$.

PAU CAT TEC JUNY 2008 2.1

12.2.24 Donada la funció $f(x) = \frac{x}{\sqrt{5x^2-4}}$

- Calculeu la integral $\int f(x)dx$.
- Trobeu la primitiva F de f que compleixi $F(1) = 1$.

PAU CAT TEC JUNY 2005 4.2

12.2.25 Calculeu el valor de la integral següent: $\int_0^3 \frac{x+1+\sqrt{x+1}}{x+1} dx$

PAU CAT TEC SET 2004 5.1

12.2.26 Donada la funció $f(x) = \cos x - \cos^3 x$:

- Trobeu la seva integral indefinida.
- Quina és la primitiva de $f(x)$ que passa pel punt $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$?

Indicació: recordeu que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

PAU CAT TEC JUNY 2004 3.2

12.2.27 Calculeu l'àrea del recinte tancat que delimiten la gràfica de la funció $y = \sqrt{2x}$ i la recta $y = x$.

PAU CAT TEC JUNY 2004 4.2

12.2.28 Donada $f(x) = (2x+1)e^{x^2+x}$, determineu la funció $g(x)$ tal que $g'(x) = f(x)$ (és a dir, una primitiva de $f(x)$) i que el seu gràfic passa pel punt $(0, 2)$.

PAU CAT TEC SET 2003 3.1

12.2.29 Calculeu $\int_1^e \frac{2 \ln^3(x)}{x} dx$

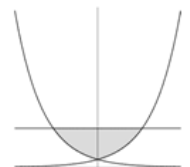
PAU CAT TEC JUNY 2003 2.2

12.2.30 Calculeu la primitiva de la funció $f(x) = x\sqrt{x^2-1}$ que s'anul·la en el punt d'abscissa $x = 2$.

PAU CAT TEC JUNY 2002 3.1

12.2.31 Calculeu l'àrea compresa entre les gràfiques de les corbes $y = e^{2x}$ i $y = e^{-2x}$ i la recta $y = 5$ representada en l'esquema següent:

PAU CAT TEC JUNY 2002 2.1



12.2.32 Trobeu l'expressió general de totes les primitives de $f(x) = 5\sqrt[3]{x^2}$. Quina és la que passa pel punt $(8,0)$?

PAU CAT CCSS JUNY 2002 2.2

12.2.33 a) Quin és l'angle x en radians ($0 < x < \pi/2$) tal que $\sin(x) = \cos(x)$?

- Considerem les funcions $f(x) = \sin(x)$ i $g(x) = \cos(x)$. Calculeu la superfície del recinte delimitat superiorment per les gràfiques d'aquestes funcions, inferiorment per l'eix d'abscisses i lateralment per les rectes verticals $x = 0$ i $x = \pi/3$ representat en l'esquema següent:

PAU CAT TEC JUNY 2001 2.1



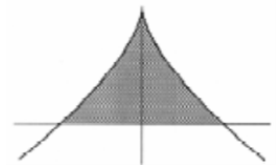
12.2.33 Determineu la funció $f(x)$ tal que $f'(x) = x^2 + \sin x$ i $f(0) = 2$. PAU CAT CCSS JUNY 2001 5.2

12.2.34 Trobeu la primitiva de la funció $f(x) = e^{-x/2}$ que compleix la condició que la seva gràfica passa pel punt $(0, 3)$.

PAU CAT CCSS SET 2000 6.3

12.2.35 Sigui $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$. Calculeu l'àrea de la regió que limita la gràfica de $f(x)$ i l'eix d'abscisses i que està representada en el dibuix següent:

PAU CAT TEC JUNY 1999 6.2



12.2.36 Donada la funció $f(x) = 2xe^{x^2-1}$

- Determineu els seus punts de tall amb els eixos. Calculeu $f(1)$ i $f(-1)$.
- Calculeu l'àrea que determina aquesta funció entre els punts $x = -1$ i $x = 1$.

12.2.37 Donada la funció $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$

- Determina el seu domini, i els seus punts de tall amb els eixos.
- Calcula l'àrea que determina la gràfica d'aquesta funció entre els extrems $x = 1$ i $x = e$.

12.2.38 Calcula les següents integrals:

a) $\int 3x(x^2 + 1)^{10} dx$ b) $\int_0^1 (x-1)^{30} dx$ c) $\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx$ d) $\int x\sqrt{1-x^2} dx$

12.2.39 Youtube

- Determina $\int \frac{2x-1}{x^2-x+3} dx$ <https://youtu.be/5dREssqdIBM> (Matemàtiques profè Alex)
- Determina $\int \frac{x}{x^2-5} dx$ <https://youtu.be/xBRZnhCFcgM> (Matemàtiques profè Alex)
- Determina $\int (x^2-5)2x dx$ <https://youtu.be/Y-tZ2gHWdtw> (Matemàtiques profè Alex)
- Determina $\int x^2(2x^3-5)^4 dx$ <https://youtu.be/4bKEWdFpFYw> (Matemàtiques profè Alex)
- Determina $\int 3x^2\sqrt{x^3+5} dx$ <https://youtu.be/aGg3sJLqZbw> (Matemàtiques profè Alex)
- Determina $\int x\sqrt{3x^2-6} dx$ <https://youtu.be/AV1fDsPg9OU> (Matemàtiques profè Alex)
- Determina $\int x^2\sqrt{(5x^3-3)^5} dx$ <https://youtu.be/z9Dp0dWWZkY> (Matemàtiques profè Alex)
- Determina $\int e^{2x} dx$ <https://youtu.be/MZ6x-DRNNas> (Matemàtiques profè Alex)
- Determina $\int \frac{\ln x}{x} dx$ <https://youtu.be/J0YszHxOdb4> (Matemàtiques profè Alex)

12.2.40 Youtube Determina $\int_1^3 x\sqrt{4+5x^2} dx$ <https://youtu.be/x7Qbw60TPtg> (lasmatematicas.es)

12.2.41 Repàs general d'integració.

Determinació d'àrees.

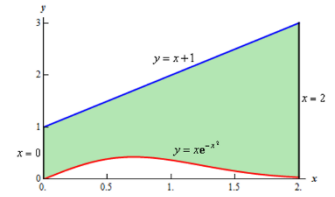
- Determina l'àrea de la regió determinada per les gràfiques de les funcions $f(x) = 2x^2 + 10$ i $g(x) = 4x + 16$
- Determina l'àrea de la regió entre les gràfiques de les funcions $f(x) = 2x^2 + 10$ i $g(x) = 4x + 16$, $x = -2$, $x = 5$.
- Determina l'àrea entre les gràfiques de les funcions $f(x) = x^2 - 2x$ i $g(x) = 4 - x^2$.
- Determina l'àrea entre la gràfica de la funció $f(x) = e^x$ i la seva recta tangent en $x = 1$, amb $x > 0$.

Integració per canvi de variable

e) Calcula: $\int_{-1}^0 2x^2\sqrt{1-4x^3} dx$

f) Calcula: $\int_0^1 (1+x)(2x+x^2)^5 dx$

g) Determina l'àrea entre les funcions $f(x) = xe^{-x^2}$ i $g(x) = x+1$, entre $x=2$ i l'eix vertical.



12.2.42 $\int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} dx$

12.2.43 Integració amb doble canvi de variable. a) $\int \frac{1+e^x}{(x+e^x)\ln(x+e^x)^2} dx$ b) $\int \frac{1+e^x}{(x+e^x)\ln^2(x+e^x)} dx$

12.2.44 Calcula $\int e^{x+e^x} dx$

Aragón 2006

12.2.45 Repàs d'integració (Quasi-immediates, canvi de variable)

a) $\int e^{5-2x} dx$

b) $\int \sqrt{3x+4} dx$

c) $\int \frac{x}{(4x^2+1)^5} dx$

d) $\int 2(2x+4)^5 dx$

e) $\int 7\sqrt{7x-1} dx$

f) $\int 2x(x^2+5)^4 dx$

g) $\int (3x+2)(3x^2+4x)^4 dx$

h) $\int \sqrt{3-2s} ds$

i) $\int \frac{1}{\sqrt{5x+8}} dx$

j) $\int \frac{(1+\sqrt{x})^{1/3}}{\sqrt{x}} dx$

k) $\int \frac{9r^2}{\sqrt{1-r^3}} dr$

l) $\int \frac{4x^3}{(x^4+1)^2} dx$

m) $\int e^x \sqrt{1+e^x} dx$

n) $\int \frac{1}{x \ln x} dx$

o) $\int_{-1}^3 \frac{2}{2x+3} dx$

p) $\int_0^1 \frac{16x}{8x^2+2} dx$

q) $\int_{-2}^2 \frac{3}{(x+3)^4} dx$

r) $\int_0^{\ln 2} e^{3x} dx$

s) $\int_1^2 \frac{1}{x} - e^{-x} dx$

t) $\int_0^1 xe^{x^2} dx$

v) $\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx$

w) $\int_2^5 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$

x) $\int_0^b 4x dx$

y) $\int_0^b \frac{x}{2} dx$

z) $\int_0^4 \sqrt{u} du$

12.3 Integració per parts.

Fórmula de la integració per parts. $\rightarrow \int u dv = uv - \int v du$

Ampliem a continuació el nostre repertori usant la regla de derivació del producte:

Si $f(x)$ i $g(x)$ són funcions de x , tenim

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

i integrant: $\int (f(x) \cdot g(x))' dx = \int f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) dx$

La integració és l'operació oposada a la derivació, i la integral d'una suma és suma d'integrals,

per tant arribem a la següent igualtat: $f(x) \cdot g(x) = \int f'(x) \cdot g(x) dx + \int f(x) \cdot g'(x) dx$

d'on aïllant l'últim membre obtenim la fórmula de la integració per parts:

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$$

Aquest mètode servirà sempre que la integral del segon membre sigui més senzilla que la del primer membre que volem calcular.

12.3.1 a) $\int x \sin x \, dx$ b) $\int x e^x \, dx$ c) $\int x^2 e^x \, dx$ d) $\int x^3 \ln x \, dx$ e) $\int \ln x \, dx$

Exercici resolt. Calcular la integral $\int \sin(\ln x) \, dx$

Solució: Apliquem el mètode d'integració per parts:

$$\int \sin(\ln x) \, dx = \sin(\ln x) \cdot x - \int \cos(\ln x) \frac{1}{x} x \, dx = \sin(\ln x) \cdot x - \int \cos(\ln x) \, dx$$

$$f(x) = \sin(\ln x) \rightarrow f'(x) = \cos(\ln x) \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = 1 \rightarrow g(x) = x$$

Ara hem d'integrar $\int \cos(\ln x) \, dx$, amb el mètode d'integració per parts:

$$\int \cos(\ln x) \, dx = \cos(\ln x) \cdot x - \int -\sin(\ln x) \frac{1}{x} x \, dx = \cos(\ln x) \cdot x + \int \sin(\ln x) \, dx$$

$$f(x) = \cos(\ln x) \rightarrow f'(x) = -\sin(\ln x) \frac{1}{x} \quad g'(x) = 1 \rightarrow g(x) = x$$

Per tant ens queda la següent igualtat:

$$\int \sin(\ln x) \, dx = \sin(\ln x) \cdot x - \left(\cos(\ln x) \cdot x + \int \sin(\ln x) \, dx \right) =$$

$$= \sin(\ln x) \cdot x - \cos(\ln x) \cdot x - \int \sin(\ln x) \, dx$$

$$\text{És a dir: } \int \sin(\ln x) \, dx + \int \sin(\ln x) \, dx = \sin(\ln x) \cdot x - \cos(\ln x) \cdot x$$

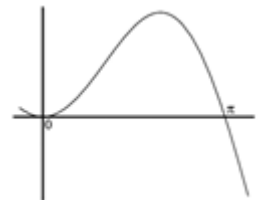
$$2 \int \sin(\ln x) \, dx = \sin(\ln x) \cdot x - \cos(\ln x) \cdot x \quad \int \sin(\ln x) \, dx = \frac{\sin(\ln x) \cdot x - \cos(\ln x) \cdot x}{2} + C$$

12.3.2 La gràfica de la funció $f(x) = x \cdot \sin(x)$ és la següent:

a) Trobeu-ne una primitiva.

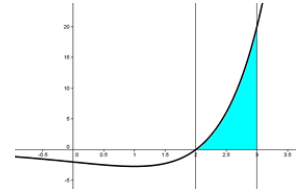
b) Aplicant el resultat de l'apartat anterior, calculeu l'àrea del recinte limitat per la gràfica de la funció $f(x)$ i l'eix d'abscisses des de $x = 0$ fins a $x = \pi$.

PAU CAT TEC JUNY 2010 1.5



Exercici resolt. Representa gràficament la funció $f(x) = (x-2)e^x$ en

l'interval $[2, 3]$. Calcula l'àrea sota aquesta corba en aquest interval.



Solució: L'equació $f(x) = (x-2)e^x = 0$ només té com a solució $x = 2$

, per tant podem determinar aquest àrea amb una única integral:

$$A = \int_2^3 (x-2)e^x \, dx = F(3) - F(2) \text{ on } F(x) = \int (x-2)e^x \, dx$$

Apliquem el mètode de la integració per parts:

$$f(x) = x - 2 \rightarrow f'(x) = 1 \quad g'(x) = e^x \rightarrow g(x) = e^x$$

$$F(x) = \int (x-2)e^x \, dx = (x-2)e^x - \int 1 \cdot e^x \, dx = (x-2)e^x - e^x$$

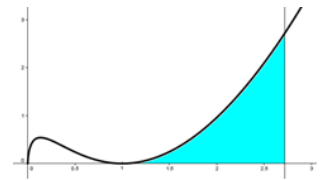
$$F(3) = (3-2)e^3 - e^3 = e^3 - e^3 = 0 \quad ; \quad F(2) = (2-2)e^2 - e^2 = -e^2 \cong -7.38906$$

$$A = \int_2^3 (x-2)e^x \, dx = F(3) - F(2) = e^2 \cong 7.38906$$

Exercici resolt. Calcula l'àrea que determina la gràfica de $f(x) = x(\ln x)^2$ en l'interval $[1, e]$.

Solució: Resolem l'equació

$$f(x) = x(\ln x)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ (\ln x)^2 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^0 = 1 \end{cases}$$



Veiem que la funció no canvia de signe dintre de l'interval $[1, e]$ i per tant l'àrea queda determinada per una única integral:

$$A = \int_1^e x(\ln x)^2 dx = F(e) - F(1), \text{ on } F(x) = \int x(\ln x)^2 dx$$

Aquesta integral indefinida es resol amb el mètode d'integració per parts:

$$\int x(\ln x)^2 dx = (\ln x)^2 \frac{x^2}{2} - \int 2(\ln x) \frac{1}{x} \frac{x^2}{2} dx = (\ln x)^2 \frac{x^2}{2} - \int x \ln x dx = (*)$$

$$f(x) = (\ln x)^2 \rightarrow f'(x) = 2(\ln x) \frac{1}{x} \quad ; \quad g'(x) = x \rightarrow g(x) = \frac{x^2}{2}$$

La integral $\int x \ln x dx$ l'hem de resoldre novament per parts:

$$\int x \ln x dx = (\ln x) \frac{x^2}{2} - \int \frac{1}{x} \frac{x^2}{2} dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C$$

$$f(x) = \ln x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \quad ; \quad g'(x) = x \rightarrow g(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$\text{Agrupem ara els elements: } (*) = (\ln x)^2 \frac{x^2}{2} - \left(\frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} \right) + C = \frac{x^2}{2} \left((\ln x)^2 - \ln x + \frac{1}{2} \right) + C$$

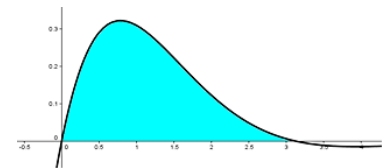
$$F(e) = \frac{e^2}{2} \left((\ln e)^2 - \ln e + \frac{1}{2} \right) = \frac{e^2}{2} \left(1 - 1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{e^2}{4}$$

$$F(1) = \frac{1^2}{2} \left((\ln 1)^2 - \ln 1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{1^2}{2} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4}$$

$$\text{i per últim: } A = \int_1^e x(\ln x)^2 dx = F(e) - F(1) = \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{e^2 - 1}{4} \cong 1.5973$$

Exercici resolt. Determina l'àrea que determina la funció $f(x) = e^{-x} \sin x$ entre 0 i π .

Solució: Resolem l'equació $f(x) = e^{-x} \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$. La funció no creua l'eix X entre 0 i π , per tant només necessitem calcular una única integral:



$$A = \int_0^\pi e^{-x} \sin x dx = F(\pi) - F(0) \text{ on } F(x) = \int e^{-x} \sin x dx.$$

Aquesta integral la resolem amb el mètode d'integració per parts:

$$\int e^{-x} \sin x dx = e^{-x}(-\cos x) - \int -e^{-x}(-\cos x) dx = e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \cos x dx = (*)$$

$$f(x) = e^{-x} \rightarrow f'(x) = -e^{-x} \quad ; \quad g'(x) = \sin x \rightarrow g(x) = -\cos x$$

Novament per integració per parts:

$$\int e^{-x} \cos x dx = e^{-x} \sin x - \int -e^{-x} \sin x dx = e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \sin x dx$$

$$f(x) = e^{-x} \rightarrow f'(x) = -e^{-x} \quad ; \quad g'(x) = \cos x \rightarrow g(x) = \sin x$$

$$\text{Per tant queda: } \int e^{-x} \sin x dx = e^{-x}(-\cos x) - (e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \sin x dx) = -e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x - \int e^{-x} \sin x dx$$

$$\text{Passem la segona integral a l'esquerra: } \int e^{-x} \sin x dx + \int e^{-x} \sin x dx = -e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x$$

$$2 \int e^{-x} \sin x dx = -e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x = -e^{-x}(\cos x + \sin x)$$

$$\int e^{-x} \sin x dx = e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x = \frac{-e^{-x}(\cos x + \sin x)}{2}$$

$$F(\pi) = \frac{-e^{-\pi}(\cos \pi + \sin \pi)}{2} = \frac{-e^{-\pi}(-1+0)}{2} = \frac{e^{-\pi}}{2} \quad F(0) = \frac{-e^{-0}(\cos 0 + \sin 0)}{2} = \frac{-e^{-0}(1)}{2} = \frac{-1}{2}$$

$$A = \int_0^\pi e^{-x} \sin x dx = F(\pi) - F(0) = \frac{e^{-\pi}}{2} - \left(\frac{-1}{2} \right) = \frac{e^{-\pi}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{e^{-\pi} + 1}{2} \cong 0.5216$$

12.3.3 Calculeu l'àrea de la regió limitada per la gràfica de la funció $f(x) = x e^x$ per a $x \geq 0$, l'eix d'abscisses i la recta vertical $x = 1$.

12.3.4 Flipped Classroom I Integrate By Parts <https://youtu.be/-reFBJ4R9iA>

12.4 Integració de funcions racionals.

Volem calcular integrals de funcions racionals: $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$ on $p(x)$ i $q(x)$ són polinomis.

Observació prèvia. Considerarem només els casos en què el numerador és de grau inferior al denominador, perquè si no ho fos, en efectuar una divisió entera dels polinomis, donaria lloc a la suma d'un polinomi amb una fracció el numerador de la qual és de grau inferior al denominador:

$$\begin{aligned} \text{grau}(p(x)) \geq \text{grau}(q(x)) &\Rightarrow \text{Fem la divisió de polinomis: } \begin{array}{l} p(x) \\ R(x) \end{array} \overline{) \begin{array}{l} q(x) \\ Q(x) \end{array}} \\ p(x) = Q(x)q(x) + R(x) &\text{ amb } \text{grau}(R(x)) < \text{grau}(q(x)) \end{aligned}$$

i per tant: $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{Q(x)q(x) + R(x)}{q(x)} = \frac{Q(x)q(x)}{q(x)} + \frac{R(x)}{q(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{q(x)}$

Exemple: $\frac{12x^3 + 2x^2 + 6x - 1}{4x^2 - 2x + 1}$

$$12x^3 + 2x^2 + 6x - 1 \overline{) \begin{array}{l} 4x^2 - 2x + 1 \\ 3x + 2 \end{array}} \Rightarrow 12x^3 + 2x^2 + 6x - 1 = (3x + 2)(4x^2 - 2x + 1) + 7x - 3$$

$$\begin{aligned} \frac{12x^3 + 2x^2 + 6x - 1}{4x^2 - 2x + 1} &= \frac{(3x + 2)(4x^2 - 2x + 1) + 7x - 3}{4x^2 - 2x + 1} = \frac{(3x + 2)(4x^2 - 2x + 1)}{4x^2 - 2x + 1} + \frac{7x - 3}{4x^2 - 2x + 1} = \\ &= 3x + 2 + \frac{7x - 3}{4x^2 - 2x + 1} \end{aligned}$$

Integració de funcions racionals simples $\int \frac{1}{ax+b} dx$

Es resolen mitjançant integració per substitució: $u = ax + b \Rightarrow u' = a$

$$\int \frac{1}{ax+b} = \frac{1}{a} \int \frac{a}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{u} u' dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{a} \ln|u| + C = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C$$

Integració amb factors lineals.

Exercici resolt. $\int \frac{dx}{x^2 - 1}$

Solució: El denominador es pot escriure com a producte de dos factors lineals:

$$x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$$

Per tant escrivim la fracció com a suma de fraccions simples :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2 - 1} &= \frac{1}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} = \\ &= \frac{A(x-1)}{(x+1)(x-1)} + \frac{B(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{A(x-1) + B(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \\ &= \frac{Ax - A + Bx + B}{(x+1)(x-1)} = \frac{(A+B)x + B - A}{(x+1)(x-1)} \Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ B - A = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1/2 \\ B = 1/2 \end{cases} \end{aligned}$$

per tant $\frac{1}{x^2-1} = \frac{-1/2}{x+1} + \frac{1/2}{x-1}$

$$\int \frac{dx}{x^2 - 1} = \int \frac{-1/2}{x+1} dx + \int \frac{1/2}{x-1} dx = \frac{-1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1} dx = *$$

Integrem per separat:

$$\int \frac{1}{x+1} dx =$$

$$\text{Fent } u = x + 1 \Rightarrow u' = 1$$

$$= \int \frac{1}{u} du = \ln|x+1| + C$$

$$\int \frac{1}{x-1} dx =$$

$$\text{Fent } u = x - 1 \Rightarrow u' = 1$$

$$= \int \frac{1}{u} du = \ln|x-1| + C$$

$$* = \frac{-1}{2} \ln|x+1| + \frac{1}{2} \ln|x-1| + C = \frac{\ln|x-1| - \ln|x+1|}{2} + C$$

Exercici resol. $\int \frac{x^3 + 1}{x(x-1)^3} dx$

Solució: Escrivim $\frac{x^3 + 1}{x(x-1)^3}$ com a suma de fraccions simples:

$$\begin{aligned} \frac{x^3 + 1}{x(x-1)^3} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3} = \\ &= \frac{A(x-1)^3}{x(x-1)^3} + \frac{Bx(x-1)^2}{(x-1)x(x-1)^2} + \frac{Cx(x-1)}{(x-1)^2x(x-1)} + \frac{Dx}{x(x-1)^3} = \\ &= \frac{A(x-1)^3}{x(x-1)^3} + \frac{Bx(x-1)^2}{(x-1)x(x-1)^2} + \frac{Cx(x-1)}{(x-1)^2x(x-1)} + \frac{Dx}{x(x-1)^3} = \\ &= \frac{A(x-1)^3 + Bx(x-1)^2 + Cx(x-1) + Dx}{x(x-1)^3} = \frac{A(x-1)^3 + Bx(x-1)^2 + Cx(x-1) + Dx}{x(x-1)^3} \end{aligned}$$

$$x^3 + 1 = A(x-1)^3 + Bx(x-1)^2 + Cx(x-1) + Dx$$

Donant valors a la x:

$$\left. \begin{aligned} \text{Per a } x = 1 &\Rightarrow 2 = D & \text{Per a } x = 0 &\Rightarrow 1 = -A \Rightarrow A = -1 \\ \text{Per a } x = 2 &\Rightarrow 9 = A + 2B + 2C + 2D \Rightarrow 9 = -1 + 2B + 2C + 4 \\ \text{Per a } x = -1 &\Rightarrow 0 = -8A - 4B + 2C - D \Rightarrow 0 = 8 - 4B + 2C - 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} B = 2 \\ C = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{x^3 + 1}{x(x-1)^3} &= \frac{-1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3} \Rightarrow \\ \Rightarrow \int \frac{x^3 + 1}{x(x-1)^3} dx &= \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3} \right) dx = \\ &= \int \frac{-1}{x} dx + \int \frac{2}{x-1} dx + \int \frac{1}{(x-1)^2} dx + \int \frac{2}{(x-1)^3} dx = \\ &= (-1) \int \frac{1}{x} dx + 2 \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{1}{(x-1)^2} dx + 2 \int \frac{1}{(x-1)^3} dx = \\ &= (-1) \ln|x| + 2 \ln|x-1| + \frac{-1}{(x-1)} + 2 \frac{-1}{(x-1)^2} + C = \\ &= -\ln|x| + 2 \ln|x-1| - \frac{1}{(x-1)} - \frac{2}{(x-1)^2} + C \end{aligned}$$

Integració amb factors no lineals.

Exercici resol. Calcula la següent integral indefinida: $\int \frac{x}{x^2 + 2x + 2} dx$

Solució: $x^2 + 2x + 2$ no factoritza perquè $x^2 + 2x + 2 = 0$ no té solució real.

$$\text{Ara bé, } x^2 + 2x + 2 = x^2 + 2x + 1 + 1 = (x+1)^2 + 1 \text{ per tant } \int \frac{x}{x^2 + 2x + 2} dx = \int \frac{x}{(x+1)^2 + 1} dx =$$

$$\text{Fent } u = x+1 \Rightarrow \begin{cases} u' = 1 \\ x = u-1 \end{cases} = \int \frac{u-1}{u^2+1} du = \int \frac{u}{u^2+1} du - \int \frac{1}{u^2+1} du = *$$

Per a la primera integral: $\int \frac{u}{u^2+1} du =$

Fent $p = u^2 \Rightarrow p' = 2u$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int \frac{1}{p+1} dp &= \frac{1}{2} \ln|p+1| + C = \frac{1}{2} \ln|u^2+1| + C = \frac{1}{2} \ln|(x+1)^2+1| + C = \\ &= \frac{1}{2} \ln|x^2+2x+1+1| + C = \frac{1}{2} \ln|x^2+2x+2| + C \end{aligned}$$

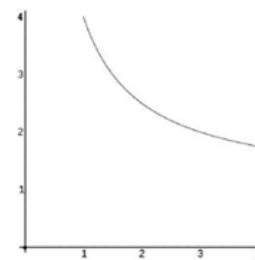
Per a la segona integral: $\int \frac{1}{u^2+1} du = \arctan(u) + C = \arctan(x+1) + C$

$$\text{Per tant } * = \frac{1}{2} \ln|x^2+2x+2| - \arctan(x+1) + C$$

12.4.1 Sigui $f(x) = \frac{8x^2}{2x+1}$. Trobeu l'àrea del recinte limitat per la gràfica d'aquesta funció, l'eix OX i les rectes $x = 0$ i $x = 2$.

PAU CAT TEC SET 2010 2.5

12.4.2 La gràfica de la funció $f(x) = \frac{3+x}{x}$, des de $x=1$ fins a $x=4$, és la següent:



- Calculeu l'equació de les rectes tangents a aquesta funció en els punts d'abscissa $x=1$ i $x=3$.
- Dibuixeu el recinte limitat per la gràfica de la funció i les dues rectes tangents que heu calculat.
- Trobeu els vèrtexs d'aquest recinte.
- Calculeu la superfície del recinte damunt dit.

PAU CAT TEC JUNY 2009 4.5

12.4.3 Sigui la funció $f(x) = a + \frac{4}{x} + \frac{b}{x^2}$.

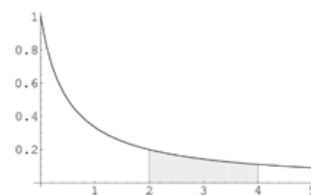
- Calculeu els valors de a i b , sabent que la recta $2x + 3y = 14$ és tangent a la gràfica de la funció $f(x)$ en el punt d'abscissa $x = 3$.
Per a la resta d'apartats, considereu que $a = -3$ i que $b = 4$.
- Trobeu els intervals de creixement i de decreixement de la funció $f(x)$. Trobeu i classifiqueu els extrems relatius que té la funció.
- Calculeu els punts de tall de la funció $f(x)$ amb l'eix OX.
- Trobeu l'àrea del recinte limitat per la gràfica de la funció $f(x)$, l'eix OX i les rectes $x = 1$ i $x = 3$.

PAU CAT TEC JUNY 2009 3.5 (Problema)

12.4.4 El gràfic de la funció $f(x) = \frac{1}{2x+1}$, quan $x > 0$, és com segueix:

- Trobeu una primitiva de la funció f .
- Calculeu l'àrea de la regió ombrejada.

PAU CAT TEC SET 2006 4.2



12.4.5 Donada la funció $f(x) = x - 4 + \frac{16}{x+4}$

- Estudieu-ne la continuïtat.
- Estudieu-ne els intervals de creixement i decreixement i els màxims i mínims locals.
- Calculeu l'àrea limitada per la gràfica de la funció, l'eix OX i les rectes verticals $x = 0$ i $x = 2$.

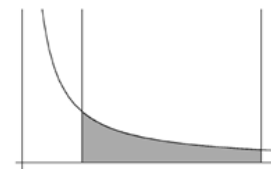
PAU CAT TEC JUNY 1999 1.5

12.4.6 Trobeu el valor de k per tal que $\int_{k+1}^{2k} \frac{dx}{x-k} = 3$

PAU CAT TEC SET 1998 5.1

12.4.7 Trobeu l'àrea de la figura compresa entre la hipèrbola $xy=1$, les rectes $x=1$ i $x=4$ i l'eix X, que està representada en el dibuix següent:

Solució: $\ln(4) - \ln(1) \cong 1.3863$ PAU CAT CCSS JUNY 1998 3.2



12.4.8 Calculeu la primitiva de la funció $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ tal que la seva gràfica

passi pel punt de coordenades $(1, 1)$. Solució: $F(x) = \ln|x^2+1| + C, C = 1 - \ln(2)$

12.5 Substitucions trigonomètriques.

Fórmula de la superfície d'un cercle. Podem calcular la superfície d'un cercle amb les eines del càlcul integral. La circumferència de radi r queda determinada mitjançant l'equació $x^2 + y^2 = r^2$

Per tant: $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$

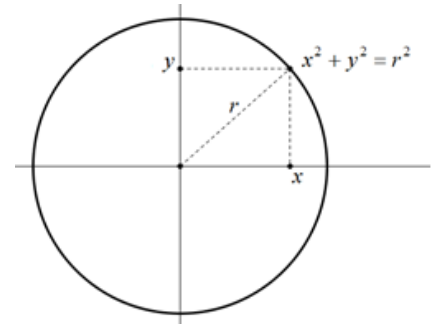
Agafem la part superior de la circumferència (després multiplicarem per dos el resultat obtingut): $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

Ens reduïm al cas radi $r = 1$. Àrea = $\int_{-r}^r \sqrt{1 - x^2} dx = *$

Ja hem calculat abans (vegeu) la seva integral indefinida:

$$\int \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{1}{2} \arcsin(x) + \frac{x\sqrt{1 - x^2}}{2} + C$$

$$\begin{aligned} \text{Per tant } * &= \frac{1}{2} \arcsin(x) + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{2} \arcsin(1) + \frac{\sqrt{1-1^2}}{2} - \left(\frac{1}{2} \arcsin(-1) + \frac{\sqrt{1-1^2}}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \frac{-\pi}{2} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \quad \text{I per tant la superfície del cercle de radi 1 és } \pi. \end{aligned}$$



12.6 Determinació d'àrees amb funcions en general.

12.6.1 Considerem la funció $f(x) = 5 - x$ i la funció $g(x) = \frac{4}{x}$

- Fes un esbós de les dues gràfiques, indicant els seus punts de tall.
- Determina l'àrea de la regió que delimiten.

12.6.2 Considera les funcions definides per $f(x) = 2 - x^2$ i $g(x) = |x|$

- Fes un esbós de les dues gràfiques, indicant els seus punts de tall.
- Calcula l'àrea del recinte que delimiten.

12.6.3 Donada la funció $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida per $f(x) = \ln x$, on \ln és la funció logaritme neperià, es demana:

- Comproveu que la recta d'equació $y = -ex + 1 + e^2$ és la recta normal a la gràfica de f en el punt d'abscissa $x = e$.
- Calculeu l'àrea de la regió limitada per la gràfica f , l'eix d'abscisses i la recta normal de l'apartat a.

12.6.4 Considerem la funció $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donada per $f(x) = x^2 + 4$.

- Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de f al punt d'abscissa $x = 1$.
- Feu un esbós del recinte limitat per la gràfica de f , l'eix d'ordenades i la recta d'equació $y = 2x + 3$. Calcula la seva àrea.

12.6.5 Trobeu el valor de $a > 0$ sabent que l'àrea del recinte limitat entre la paràbola $y = x^2 + ax$ i la recta $y + x = 0$ val 36 unitats quadrades.

12.6.6 Considerem la funció $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida per $f(x) = x|2 - x|$

- Fes un esbós de la seva gràfica.
- Calcula l'àrea del recinte limitat per la gràfica de f , l'eix d'abscisses i la recta d'equació $x = 3$.

12.6.7 Sigui $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ les funcions definides per $f(x) = x^2 - 2x + 3$ i $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$.

- Fes un esbós de les gràfiques de f i g , i troba el seu punt de tall.
- Calcula l'àrea del recinte limitat per les dues gràfiques i l'eix d'ordenades.

12.6.8 Sigui $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funció definida per $f(x) = x|x - 1|$.

- Fes un esbós de la gràfica de f .
- Comprova que la recta d'equació $y = x$ és la recta tangent a la gràfica de f al punt d'abscissa $x = 0$.
- Calcula l'àrea del recinte limitat per la gràfica de f i la tangent anterior.

12.6.9 Considera la corba d'equació $y = x^3 - 3x$.

- Troba l'equació de la recta tangent a la corba al punt d'abscissa $x = -1$.
- Calcula l'àrea del recinte limitat per la corba donada i la recta $y = 2$.

12.6.10 La corba $y = \frac{1}{2}x^2$ divideix el rectangle de vèrtexs $A = (0,0)$, $B = (2,0)$, $C = (2,1)$ i $D = (0,1)$ en dos recintes. a) Dibuixa aquests dos recintes. b) Troba l'àrea de cadascun d'ells.

12.6.11 Considera les funcions $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definides per $f(x) = |x|$ i $g(x) = 6 - x^2$.

- Dibuixa un esbós del recinte limitat per les seves gràfiques.
- Calcula l'àrea d'aquest recinte.

12.6.12 Sigui $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la funció definida per $f(x) = 1 + \ln(x)$, on \ln és la funció logaritme neperià. a) Comprova que la recta d'equació $y = 1 + \frac{1}{e}x$ és la recta tangent a la gràfica de f al punt d'abscissa $x = e$. b) Calcula l'àrea del recinte limitat per la gràfica de f , l'eix d'abscisses i la recta tangent de l'apartat a.

12.6.13 Considerem les funcions $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ i $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definides per

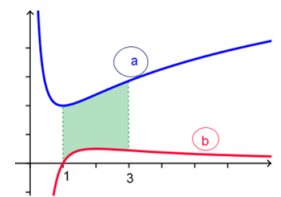
$$f(x) = \sqrt{3x} \text{ i } g(x) = \frac{1}{3}x^2 \quad \text{a) Fes un esbós de les seves gràfiques.}$$

- Calcula l'àrea del recinte limitat per les dues gràfiques anteriors.

12.6.14 Siguin les funcions $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definides per $f(x) = -x^2 + 1$ i $g(x) = x - 1$.
Calcula l'àrea del recinte limitat per les seves gràfiques.

12.6.15 Les dues gràfiques del dibuix corresponen a la funció $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida per $f(x) = \frac{2}{x} + 2 \ln(x)$ i a la de la seva derivada $f': (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

- Indica, raonant la resposta, quina és la gràfica de f i quina és la de f'
- Calcula l'àrea de la regió ombrejada.



12.6.16 Siguin $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ les funcions definides per $f(x) = x^2 + |x|$ i $g(x) = 2$

- Determina els punts de tall de les gràfiques de f i g . Fes un esbós d'ambdues.
- Calcula l'àrea del recinte limitat per ambdues gràfiques.

12.6.17 Calcula un nombre positiu a , menor que 4, per al qual el recinte limitat per la paràbola d'equació $y = x^2$ i les dues rectes d'equacions $y = 4$ i $y = a$ tingui un àrea de $28/3$ unitats quadrades.

12.6.18 Sigui $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funció donada per $f(x) = e^{-2x}$.

- Justifica que la recta d'equació $y = -2ex$ és la recta tangent a la gràfica de f al punt d'abscissa $x = \frac{-1}{2}$.
- Calcula l'àrea del recinte limitat per la gràfica de f , l'eix d'ordenades i la recta tangent de l'apartat anterior.

12.6.19 Siguin $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ les funcions definides per $f(x) = x^2 - 1$ i $g(x) = 2x + 2$

- Fes un esbós de les gràfiques de f i g .
- Calcula l'àrea del recinte limitat per ambdues.

12.6.20 Donades les funcions $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ i $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definides per $f(x) = \sqrt{x}$ i $g(x) = \sqrt[3]{x}$ Calcula l'àrea del recinte limitat per les gràfiques de f i g .

12.6.21 Sigui $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la funció donada per $g(x) = \ln x$ (\ln denota logaritme neperià)

- Justifica que la recta d'equació $y = \frac{1}{e}x$ és la recta tangent a la gràfica de g al punt d'abscissa $x = e$.
- Calcula l'àrea del recinte limitat per la gràfica de g , l'eix d'abscisses i la recta tangent de l'apartat anterior.

12.6.22 Siguin $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ les funcions definides mitjançant $f(x) = x^3 - 4x$ i $g(x) = 3x - 6$

- Determina els punts de tall de les gràfiques de f i g .
- Calcula l'àrea del recinte limitat per aquestes gràfiques.

12.6.23 Siguin $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ les funcions donades per $f(x) = x^2$ i $g(x) = a$ (amb $a > 0$).

Sabem que l'àrea del recinte limitat per les gràfiques de les funcions f i g és $4/3$. Calcula el valor de la constant a .

12.6.24 Sigui $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funció definida per $f(x) = \begin{cases} x \cdot |x| & x \leq 2 \\ 6 - x & x > 2 \end{cases}$

- Fes un esbós de la gràfica de f .
- Calcula l'àrea compresa entre la gràfica de f i l'eix d'abscisses.

12.6.25 Calcula $\int_1^e x^2 \ln(x) dx$

12.6.26 Sigui $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funció definida per $g(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2 + x$

- Fes un esbós de la gràfica de g .
- Determina l'equació de la recta tangent a la gràfica de g al punt d'abscissa $x = 2$
- Calcula l'àrea del recinte limitat per la gràfica de g i l'eix d'abscisses.

12.6.27 Calcula l'àrea que determina la gràfica de la funció $f(x) = x^2 - 7x + 10$ entre els punts $x = 1$ i $x = 4$.

12.6.28 El polinomi $p(x) = x^2 + ax + b$ s'anul·la per a $x = 2$ i compleix $\int_0^2 p(x) dx = \frac{-46}{3}$. Calculeu raonadament a i b .

12.6.29 Donada la funció $f(x) = \frac{x}{4-x^2}$,

- Representa la seva gràfica (no cal fer un estudi complet)
- Determina $\int f(x) dx$
- Determina l'àrea entre la funció i la primera bisectriu $y = x$. (Es demanen valors exactes, no es poden presentar resultats decimals)

12.6.30 Donada la funció $f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$

- Determineu un punt de la seva gràfica en el què la recta tangent sigui paral·lela a l'eix d'abscisses. Determineu aquesta recta tangent.
- Determina $\int f(x) dx$
- Determineu l'àrea delimitada per la gràfica d'aquesta funció, l'eix d'abscisses i les rectes $x = 0$ i $x = \ln 5$.

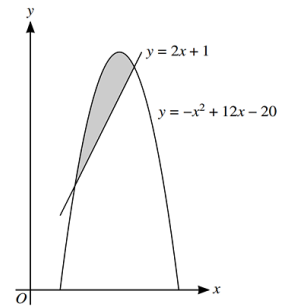
12.6.31 Determina l'interval $[0, k]$ (k positiu) per al què l'àrea compresa entre la funció $f(x) = 3x^2 - 6x$ i l'eix d'abscisses en aquest interval sigui igual a $58 u^2$.

12.7 Problemes A Level amb integració.

12.7.1 La imatge següent mostra la corba $y = -x^2 + 12x - 20$ i la recta $y = 2x + 1$.

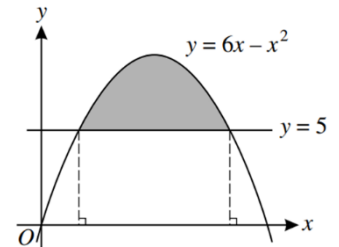
- a) Determina els punts de tall entre les dues gràfiques.
- b) Determina l'àrea de la part ombrejada.

A Level 2014 SP1 #10



12.7.2 La imatge mostra la corba $y = 6x - x^2$ i la recta $y = 5$. Determina l'àrea de la regió ombrejada.

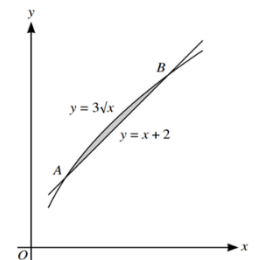
A Level 2010 SP1 #4



12.7.3 La següent imatge mostra les corbes $y = 3\sqrt{x}$ i $y = x + 2$ i els seus punts de tall A i B.

- a) Determina les coordenades de A i B.
- b) Determina l'àrea de la part ombrejada.

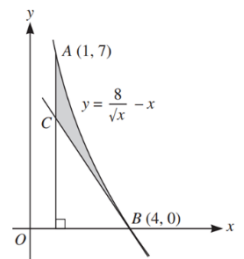
A Level 2014 WP1 #9



12.7.4 La següent imatge mostra les gràfiques de la corba $y = \frac{8}{\sqrt{x}} - x$, que passa pels punts $A = (1, 7)$ i $B = (4, 0)$, i la seva recta tangent en B. Aquesta recta tangent talla la recta $x = 1$ en el punt C.

- a) Determina la equació de la recta tangent.
- b) Determina les coordenades del punt C.
- c) Determina l'àrea de la part ombrejada.

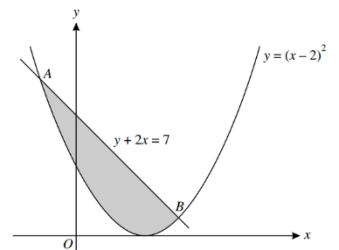
A Level 2013 SP1 #11



12.7.5 La imatge mostra la corba $y = (x - 2)^2$ i la recta $y + 2x = 7$, que es tallen en els punts A i B.

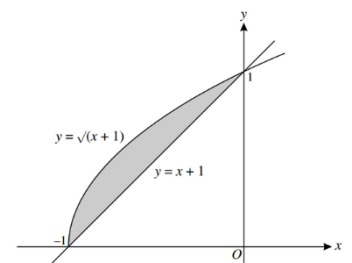
- a) Determina les coordenades dels punts.
- b) Determina l'àrea de la part ombrejada.

A Level 2010 SP1 #9



12.7.6 La imatge mostra les gràfiques de la corba $y = \sqrt{x + 1}$ i de la recta $y = x + 1$, que es tallen en els punts $(-1, 0)$ i $(0, 1)$. Determina l'àrea de la part ombrejada.

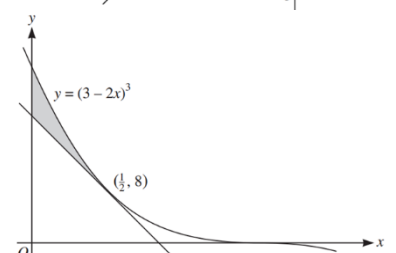
A Level 2011 WP1 #10



12.7.7 La següent imatge mostra una part de la gràfica de $f(x) = (3 - 2x)^3$ i la seva recta tangent en el punt $(\frac{1}{2}, 8)$.

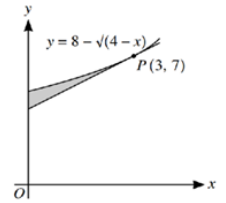
- a) Determina la recta tangent.
- b) Determina l'àrea de la part ombrejada.

A Level 2013 WP1 #10



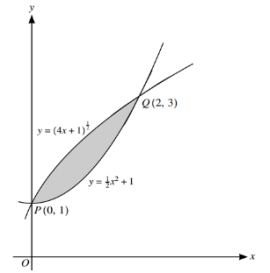
12.7.8 La següent imatge mostra una part de la gràfica de la corba $y = 8 - \sqrt{4-x}$ i la seva recta tangent en el punt $(3, 7)$.

- a) Determina l'equació de la recta tangent.
- b) Determina l'àrea de la part ombrejada. A Level 2014 SP1 #9



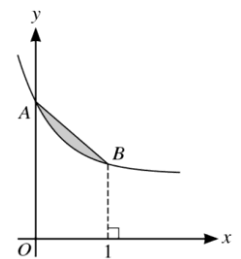
12.7.9 La següent imatge mostra part de les corbes $y = \sqrt{4x+1}$ i $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$, que es tallen en els punts $P=(0,1)$ i $Q=(2,3)$. Determina l'àrea de la regió ombrejada.

A Level 2014 WP1 #11



12.7.10 La següent imatge mostra la corba $y = 2 + e^{-2x}$. Aquesta corba creua l'eix Y en el punt A, i el punt B de la corba té coordenada X igual a 1. Calcula l'àrea determinada entre la corba y la recta que passa per A i B.

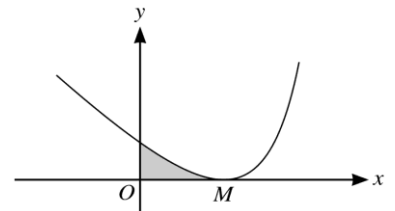
A Level 2020 WP2 #3



12.7.11 La següent imatge mostra una part de la corba $y = \frac{2}{(3-2x)^2} - x$, i el seu punt mínim M, que pertany a l'eix X.

- a) Determina les coordenades de M.
- b) Determina l'àrea de la regió ombrejada.

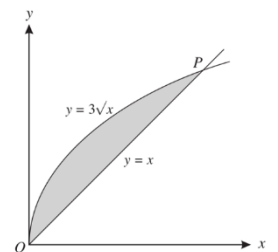
A Level 2020 WP1 #10



12.7.12 La imatge següent mostra la corba $y = 3\sqrt{x}$ i la recta $y = x$, que es tallen en els punts O i P.

- Determina:
- a) Les coordenades de P.
- b) L'àrea de la regió ombrejada.

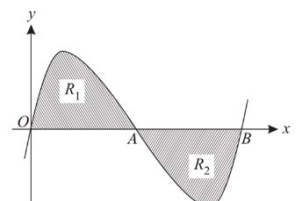
A Level Juny 2002 #3



12.7.13 La següent imatge mostra la corba $y = x(x-1)(x-2)$, que talla l'eix X en els punts $O=(0,0)$, $A=(1,0)$ i $B=(2,0)$.

- a) Les rectes tangents a la corba en els punts A i B tallen en un punt C. Determina les coordenades de C.
- b) Demostra, mitjançant integració, que l'àrea de R_1 és igual a l'àrea de R_2 .

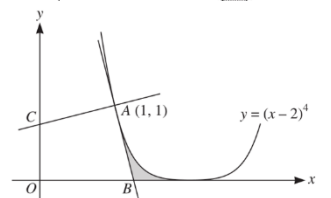
A Level 2006 #7



12.7.14 La imatge mostra la corba $y = (x-2)^4$ i el seu punt $A=(1,1)$. La recta tangent a la corba en A talla l'eix X en B.

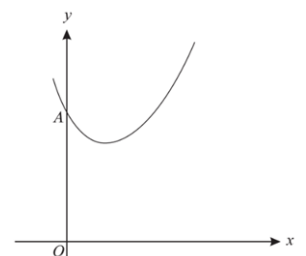
- a) Determina les coordenades de B.
- b) Determina l'àrea de la regió ombrejada.

Level Juny 2013 #10

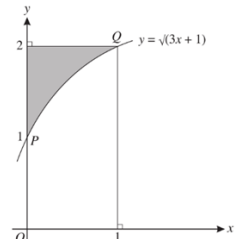


12.7.15 La imatge següent mostra la corba $y = 2e^x + 3e^{-2x}$.

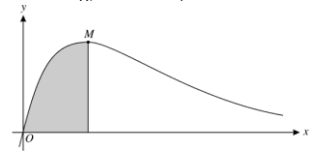
- Aquesta corba talla l'eix Y en el punt A.
- a) Determina les coordenades del punt A.
- b) Determina l'equació de la recta tangent a la corba en A, y el punt de tall d'aquesta recta amb l'eix X.
- c) Determina l'àrea de la regió determinada per la corba i les rectes $x=0$, $y=0$ i $x=1$.



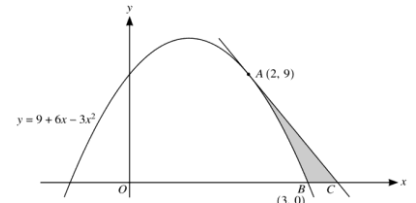
- 12.7.16** La imatge mostra la corba $y = \sqrt{3x+1}$ i els punts $P=(0,1)$ i $Q=(1,2)$. La regió ombrejada queda determinada per la corba, l'eix Y i la recta $y=2$. Determina l'àrea d'aquesta regió.



- 12.7.17** La imatge mostra la corba $y = e^{-x} - e^{-2x}$ i el seu punt màxim M.
 a) Determina les coordenades de M.
 b) Calcula l'àrea de la regió determinada per la corba, l'eix X i la vertical per M.



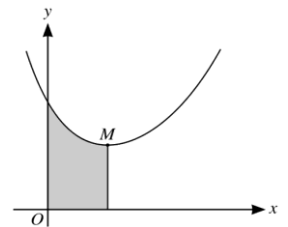
- 12.7.18** La imatge següent mostra la corba $y = -3x^2 + 6x + 9$ i els seus punts $A=(2,9)$ i $B=(3,0)$. La seva recta tangent per A talla l'eix X en el punt C.
 a) Determina l'equació de la recta tangent i les coordenades de C.
 b) Determina l'àrea de la regió ombrejada.



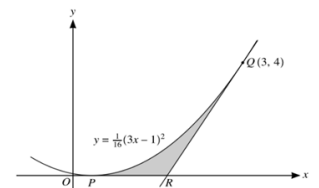
A Level 2015 #10

- 12.7.19** La següent imatge mostra la gràfica de la funció $y = e^x + 4e^{-2x}$ i el seu punt mínim M.
 a) Determina les coordenades de M.
 b) Determina l'àrea de la regió ombrejada.

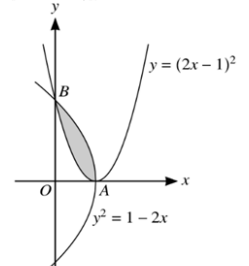
A Level 2015



- 12.7.20** La imatge mostra part de la corba $y = \frac{1}{16}(3x-1)^2$, que toca l'eix X en el punt P. El punt $Q=(3,4)$ pertany a la corba, i la recta tangent a la corba per Q talla l'eix X en el punt R. Determina:
 a) Les coordenades de P.
 b) La recta tangent, i les coordenades de R.
 c) L'àrea de la regió ombrejada.

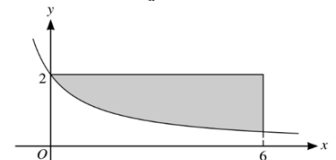


- 12.7.21** La imatge mostra les corbes $y = (2x-1)^2$ i $y^2 = 1-2x$, que es tallen en els punts A i B. a) Determina les coordenades de A.
 b) Determina l'àrea de la regió ombrejada.



- 12.7.22** La imatge mostra part de la corba $y = \frac{6}{2x+3}$. Determina l'àrea de la part ombrejada que queda determinada per la corba i les rectes $x=6$ i $x=2$.

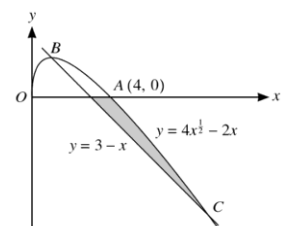
A Level 2023 Junio #3



- 12.7.23** La imatge mostra la corba d'equació $y = 4\sqrt{x} - 2x$ amb $x \geq 0$, i la recta d'equació $y = 3 - x$. La corba creua l'eix X en el punt $A=(4,0)$ i creua la recta als punts B i C.

- a) Determina les coordenades x dels punts B i C.
 b) Demostra que B es un punt màxim de la corba.
 c) Determina l'àrea de la regió ombrejada.

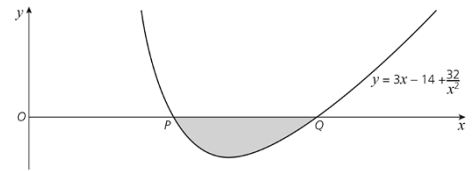
A Level 2020 WP1 #12



12.7.24 La imatge mostra part de la corba $y = 3x - 14 + \frac{32}{x^2}$, que talla l'eix X en els punts P i Q.

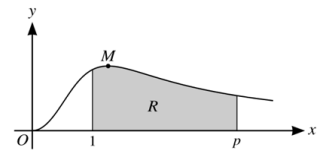
- a) Determina les coordenades de P i Q.
- b) Determina l'àrea de la regió ombrejada.

Cambridge O Level 2014



12.7.25 La imatge mostra la corba $y = \frac{x^2}{1+x^3}$, amb $x \geq 0$, i el seu punt màxim M.

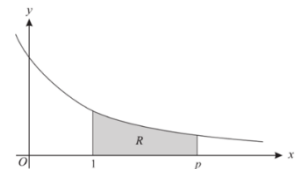
- a) Determina les coordenades de M.
- b) Calcula el valor de p per al qual l'àrea de la regió ombrejada entre la corba i les rectes $x=1$ i $x=p$ és igual a 1.



12.7.26 La imatge mostra part de la corba $y = \frac{1}{x+1}$. La regió ombrejada R queda determinada entre la corba i les rectes $x=1$, $y=0$ i $x=p$.

- a) Determina, en funció de p, l'àrea de R.
- b) Determina, arronjant a un decimal, el valor de p per al qual l'àrea de R és igual a 2.

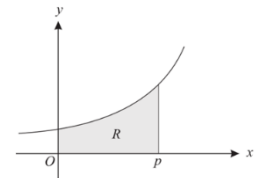
A Level Novembrer 2002 #6



12.7.27 La imatge mostra la corba $y = e^{2x}$ i la regió R delimitada per aquesta corba, i les rectes $x=0$, $y=0$ i $x=p$.

- a) Determina, en funció de p, l'àrea de R.
- b) Determina el valor de p per al qual l'àrea de R és igual a 5.

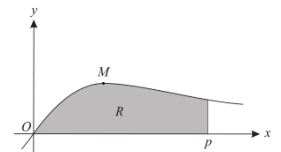
A Level 2003



12.7.28 La imatge mostra part de la corba $y = \frac{x}{x^2+1}$ i el seu punt màxim M. La regió R està delimitada per la corba i les rectes $y=0$ i $x=p$.

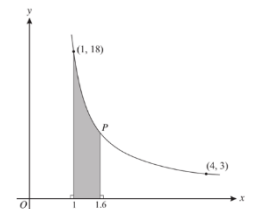
- a) Determina les coordenades del punt M.
- b) Determina l'àrea de R en funció de p.
- c) Determina el valor de p per al qual l'àrea és igual a 1.

A Level Juny 2005 #9



12.7.29 La imatge mostra una corba tal que $f'(x) = \frac{-k}{x^3}$, per a certa constant k. La corba passa pels punts (1, 18) i (4, 3).

- a) Determina la funció $f(x)$.
- b) Suposem que el punt P pertany a la corba i compleix $x = 1.6$, determina l'àrea de la regió ombrejada.



12.7.30 La imatge mostra una part de la gràfica de $f(x) = 3\sqrt{4x+1} - 2x$.

- a) Determina les coordenades de A (el seu punt de tall amb l'eix Y) i de M (el seu punt màxim).
- b) Determina l'àrea de la part ombrejada.

A Level W2018 #11

