

Límits i domini

Punts fora del domini:

- a) **Funcions racionals:** On s'anul·la el denominador: $f(x) = \frac{h(x)}{g(x)=0}$ i no s'anul·li el numerador
- b) **Arrel quadrada y parell:** Per a valors d' x negatius: $f(x) = \sqrt{x}$ i $x < 0$
- c) **Logarítmiques:** Per a valors d' x negatius o zero: $f(x) = \log_a(x)$ i $x \leq 0$
- d) **Tangent:** Per a $x = \pm \frac{\pi}{2}$: $f(x) = \tan(x)$ i $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$

Punt de tall amb l'eix Y.

És el possible punt de tall de la gràfica de la funció amb l'eix d'ordenades (el vertical).
Per trobar-lo hem d'avaluar la funció: $f(0)$.

Punts de tall amb l'eix X.

Són els possibles punts de tall de la gràfica de la funció amb l'eix d'abscisses (l'horitzontal). També s'anomenen "arrels de la funció".
Per trobar-los hem de resoldre l'equació $f(x) = 0$.

Simetria respecte de l'eix d'ordenades.

La imatge de x i del seu oposat $-x$ ha de ser la mateixa: $f(-x) = f(x)$ També es diuen **funcions parelles**.

Simetria respecte de l'origen de coordenades.

La imatge de x i del seu oposat $-x$ han de ser oposades:
 $f(-x) = -f(x)$ També es diuen **funcions senars**.

Límits laterals.

Donada una funció $f(x)$, i un punt fix $x = a$

Direm que la funció tendeix a b quan x s'apropa a a

per l'esquerra: $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b$

Direm que la funció tendeix a b quan x s'apropa a a **per la dreta:**

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b$$

Definició pràctica de límit.

Direm que la funció tendeix a b quan x s'apropa a a , i escriurem

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

Quan existeixen els dos límits laterals i coincideixen.

Nota: la funció pot no estar definida en $x = a$.

Per exemple: $f(x) = \frac{x}{x}$ Aquesta funció no està definida en $x = 0$,

però existeixen els límits laterals i coincideixen, i per tant

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

Límits infinits.

Sempre que tinguem clar ∞ no és un nombre, sinó una *tendència*.

$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ Equival a la frase "la funció es fa més i més gran en positiu a mida que x s'apropa més i més a a per la dreta".

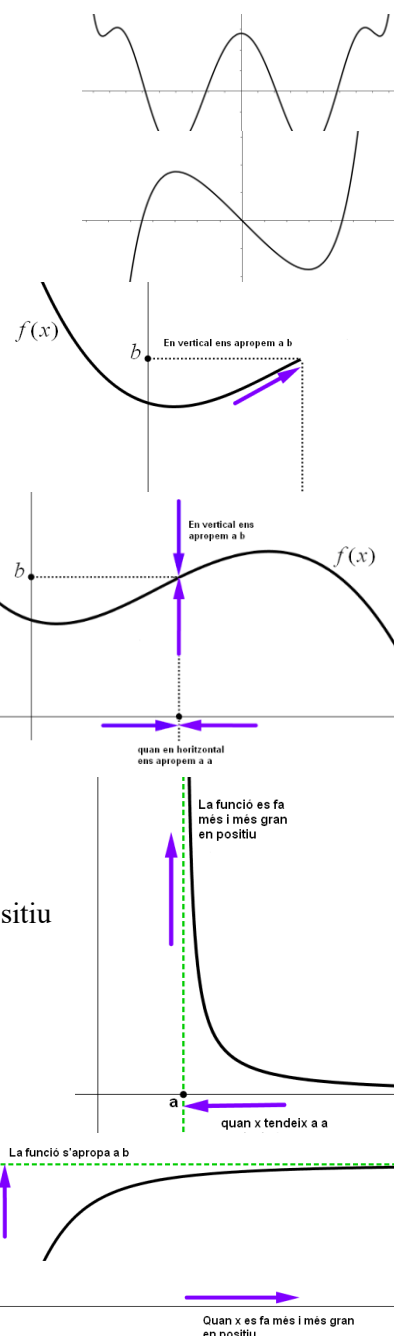
$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ Equival a la frase "la funció es fa més i més gran en negatiu a mida que x s'apropa més i més a a per la dreta".

Comportament d'una funció en l'infinit.

Sempre que tinguem clar ∞ no és un nombre, sinó una *tendència*.

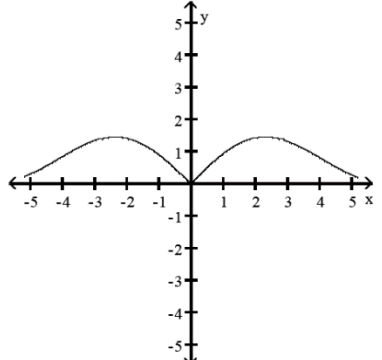
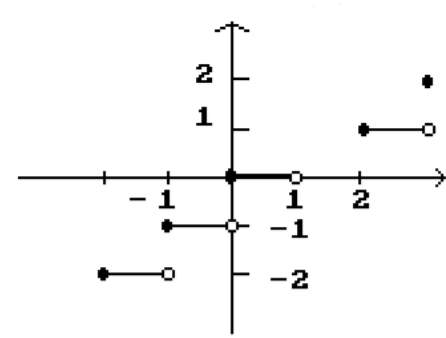
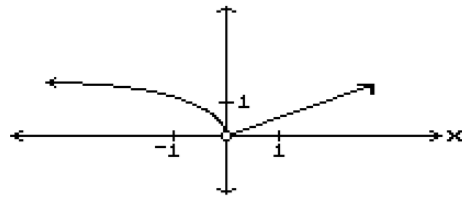
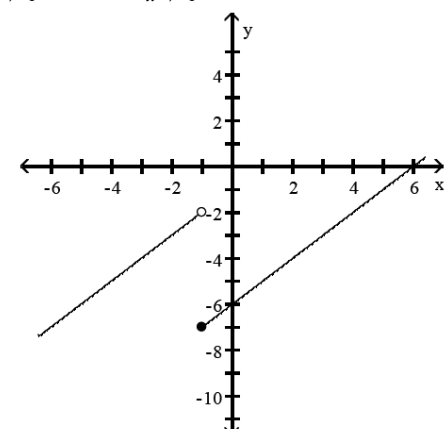
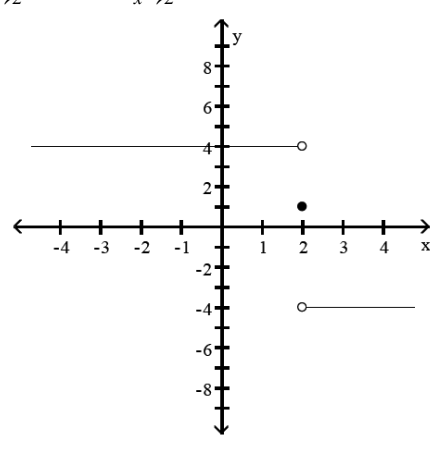
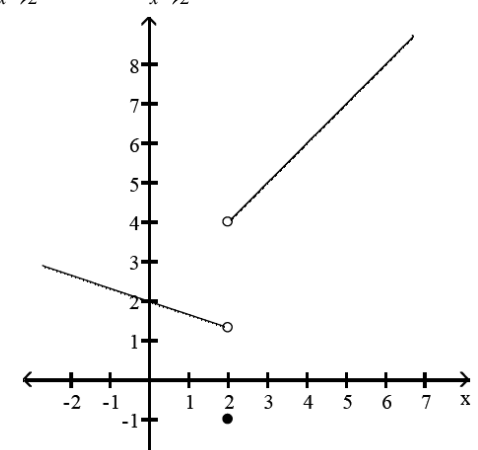
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ equival a la frase "la funció s'apropa a b quan la x es fa més i més gran en positiu".

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ Equival a la frase "la funció s'apropa a b quan la x es fa més i més gran en negatiu".

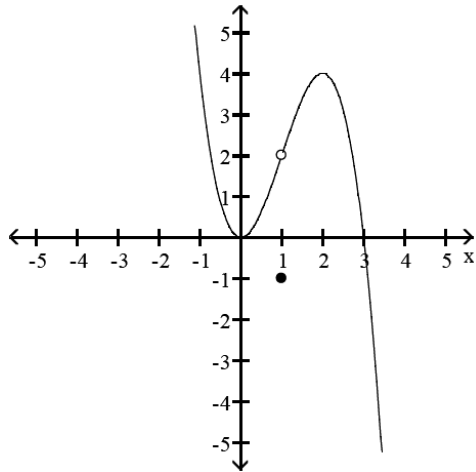


Exercicis

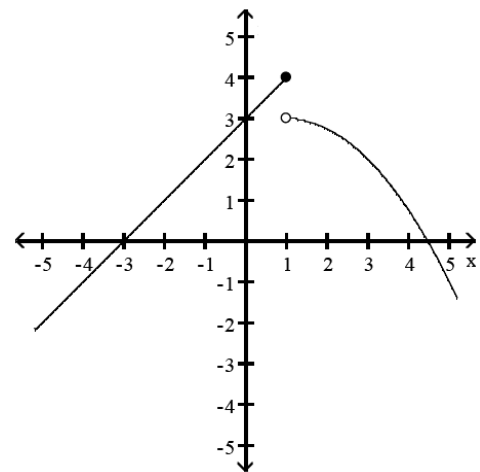
1.3.1 Determina els següents límits observant la gràfica de la funció associada:

<p>a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$</p> 	<p>b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$</p> 
<p>c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$</p> 	<p>d) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$</p> 
<p>e) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$, $f(2)$</p> 	<p>f) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$, $f(2)$</p> 

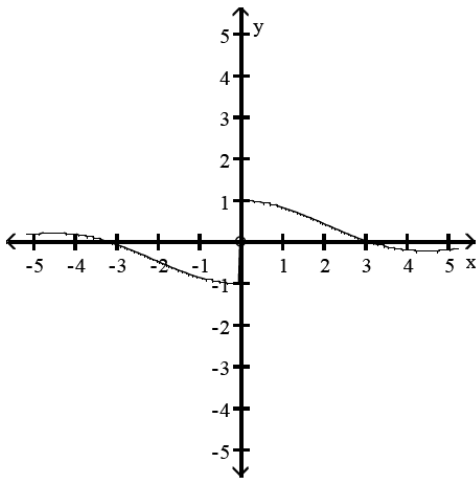
g) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, $f(1)$



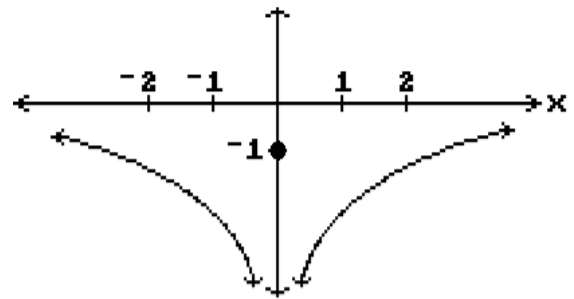
h) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, $f(1)$



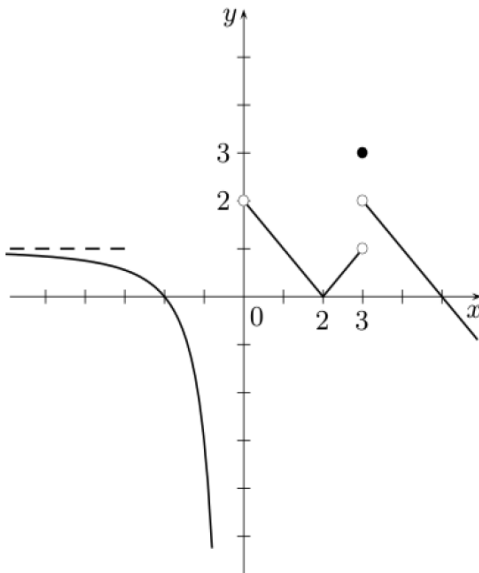
i) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$



j) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $f(0)$

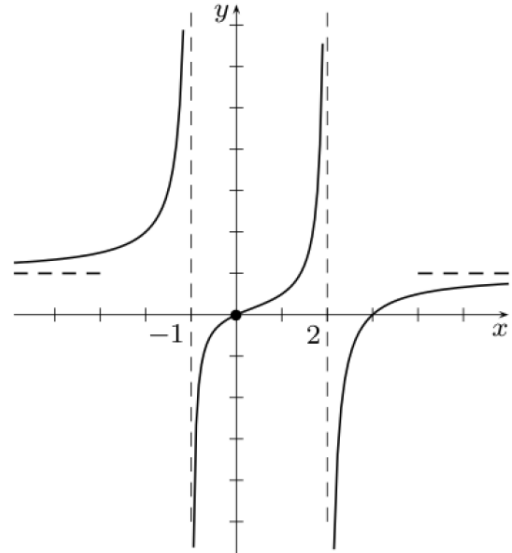


1.3.2 Observant la gràfica, determina:



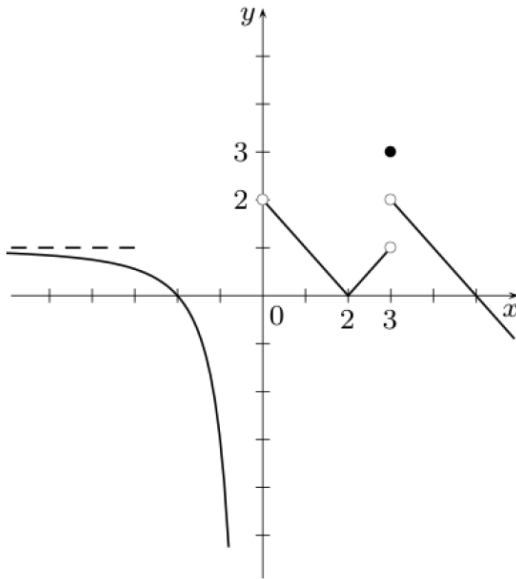
- a) $f(0)$ b) $f(2)$ c) $f(3)$
 d) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ f) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$
 g) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

1.3.3 Observant la gràfica, determina:



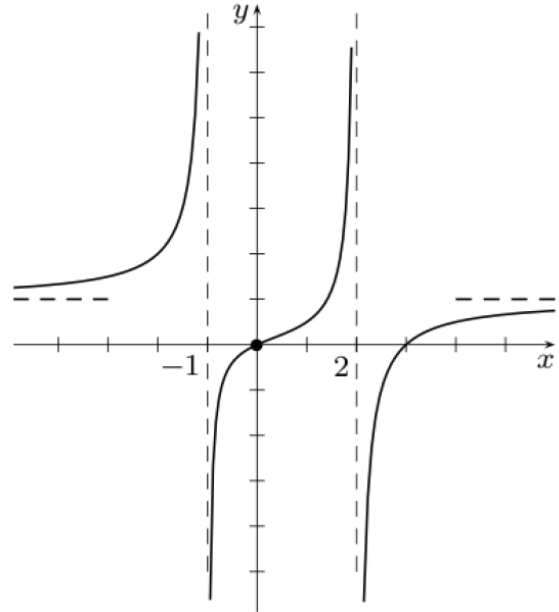
- a) $f(0)$ b) $f(2)$ c) $f(3)$
 d) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ e) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
 f) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ g) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

1.3.2 Observant la gràfica de la funció $f(x)$, determina:



- a) $f(0)$ b) $f(2)$ c) $f(3)$
 d) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ e) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
 f) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ g) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

1.3.3 Observant la gràfica de la funció $f(x)$, determina:



- a) $f(0)$ b) $f(2)$ c) $f(3)$
 d) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ e) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
 f) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ g) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

- 1.3.4** Donada la següent funció definida a trossos: $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < -2 \\ \frac{x+6}{x^2-x} & -1 < x < 2 \\ 3x-2 & x \geq 2 \end{cases}$
- a) $f(-3/2)$ b) $f(2)$ c) $f(3/2)$ d) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ e) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$
 f) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ g) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

Indeterminacions.

1) $\infty - \infty$	2) $\infty \cdot 0$	3) $\frac{0}{0}$	4) $\frac{\infty}{\infty}$
5) 1^∞	6) ∞^0	7) 0^0	

Truco per calcular aproximadament un límit.

En general, el valor de $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, en $x = a$ serà aproximadament el valor de la funció per a un valor $x = a'$ molt pròxim, per exemple, a una centèsima: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a + 0.01)$

Exemple: Ens demanen calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$.

Ens trobem davant d'una indeterminació 0/0 i no coneixem cap tècnica (Hôpital). Podem donar valor a x: 0,1 0,01 0,001 0,0001 i -0,1 , -0,001. -0,0001 etc, Veurem l'evolució de y

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cong \frac{\sin(0.01)}{0.01} = 1 \text{ (Recorda que has de tenir la calculadora en Radians)}$$

1.4 Indeterminació $\frac{\infty}{\infty}$ amb ordre de creixement.

• Direm que: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \infty$ si $f(x) \gg g(x)$

• Direm que: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 0$ si $f(x) \ll g(x)$

Direm quei $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow k \neq 0$ si $f(x) \approx g(x)$

Infinits d'ordre k. Direm que l'infinít $f(x)$ quan $x \rightarrow a$ és **d'ordre k** si és equivalent al polinomi $g(x) = x^k$. És molt fàcil comprovar que qualsevol polinomi de grau k és d'ordre k.

Exemple: $f(x) = 3x + 5$ i $g(x) = x \rightarrow$ són infinits del mateix ordre quan $x \rightarrow \infty$ perquè

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 5}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(3 + 5/x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{5}{x} \right) = 3$$

Comparació d'infinits exponencial, potencial, radical i logarítmic.

Quan $x \rightarrow \infty$, tota funció exponencial a^x amb base $a > 1$ és d'ordre superior a qualsevol funció potencial x^n amb $n > 0$, i tota funció potencial és d'ordre superior a tota funció logarítmica $\log_b x$ amb $b > 1$. Aquesta comparativa també inclou les funcions radicals $f(x) = \sqrt[n]{x}$, només cal escriure el radical en forma d'exponent fraccionari: $f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$:

$$\boxed{a^x \gg x^n \gg \sqrt[m]{x} \gg \log_b x}$$

1.5 Indeterminacions del tipus 0/0 amb quocients de polinomis

Vegem el cas en què tant el numerador com el denominador són polinomis que s'anul·len per a $x = a$. En aquest cas numerador i denominador són divisibles per a $x - a$, la qual cosa en permet la factorització mitjançant la divisió per a $x - a$.

Exemple: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x+1} = \frac{3}{2}$

Exercicis:

1.5.1 Calcula els següents límits:

a) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{x^2-25}$

b) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{x^2+4x+3}$

c) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2+3x-10}{x+5}$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-7x-10}{x-2}$

e) $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2+t-2}{t^2-1}$

f) $\lim_{t \rightarrow -1} \frac{t^2+3t+2}{t^2-t-2}$

g) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{-2x-4}{x^3+2x^2}$

h) $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{5y^3+8y^2}{3y^4-16y^2}$

i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{-1}-1}{x-1}$

1.5.2 Calcula els següents límits:

a) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3-9x^2+15x+25}{x^3-5x^2+2x-10}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2-11x+14}{4x^2-16x+16}$

c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+x^2-x-1}{x^3+2x^2+x}$

Solucions: 1.5.1: a) 1/10 b) -1/2 c) -7 d) -3 e) 3/2 f) -1/3 g) -1/2 h) -1/2 i) -1

1.5.2: a) 0 b) ∞ c) 2

1.6 Indeterminació tipus $\frac{0}{0}$ amb arrels quadrades $\sqrt{\quad}$

Hem de multiplicar numerador i denominador pel conjugat.

Exercici resolt 1. Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$

Solució: $f(x) = \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} \Rightarrow f(0) = \frac{0}{0} \rightarrow$ indeterminació

Multipliquem i dividim pel conjugat:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+4} - 2)(\sqrt{x+4} + 2)}{x(\sqrt{x+4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+4})^2 - 2^2}{x(\sqrt{x+4} + 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 4 - 4}{x(\sqrt{x+4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x(\sqrt{x+4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{0+4} + 2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Exercici resolt 2. Calcula $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}$

Solució: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x} = \frac{\sqrt{2^2+5}-3}{2^2-2 \cdot 2} = \frac{0}{0} \rightarrow$ indeterminació 0/0

$$\begin{aligned} \text{Multipliquem i dividim pel conjugat: } \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x} &= \frac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x^2-2x)(\sqrt{x^2+5}+3)} = \frac{(\sqrt{x^2+5})^2 - 3^2}{(x^2-2x)(\sqrt{x^2+5}+3)} = \\ &= \frac{x^2+5-3^2}{(x^2-2x)(\sqrt{x^2+5}+3)} = \frac{x^2-4}{(x^2-2x)(\sqrt{x^2+5}+3)} = \frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)} = \frac{(x+2)}{x(\sqrt{x^2+5}+3)} \xrightarrow{x \rightarrow 2} \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Exercici resolt 3. Calcula $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6}-x}{x-3}$

Solució: $f(x) = \frac{\sqrt{x+6}-x}{x-3} \Rightarrow f(3) = \frac{3-3}{3-3}$, i ens trobem davant d'una indeterminació $\frac{0}{0}$.

$$\begin{aligned} \text{Multipliquem i dividim pel conjugat: } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6}-x}{x-3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+6}-x)(\sqrt{x+6}+x)}{(x-3)(\sqrt{x+6}+x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+6})^2 - x^2}{(x-3)(\sqrt{x+6}+x)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+6-x^2}{(x-3)(\sqrt{x+6}+x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(x-3)(x+2)}{(x-3)(\sqrt{x+6}+x)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(x+2)}{(\sqrt{x+6}+x)} = \frac{-(3+2)}{(\sqrt{3+6}+3)} = \frac{-5}{\sqrt{9}+3} = \frac{-5}{6} \end{aligned}$$

Exercicis:

1.6.1 a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{2+x}}{x^2 + x}$ c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x+2} - 2}$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{2 - \sqrt{8-x}}$ e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x+2} - 2}$

1.6.2 a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x-2}$ b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x+2\sqrt{x}}$ e) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+11} - 4}{x-5}$ f) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{2} - \sqrt{x}}$ g) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{2 - \sqrt{x}}$

1.6.3 Calcula els següents límits:

a) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 9x^2 + 15x + 25}{x^3 - 5x^2 + 2x - 10}$ b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 11x + 14}{4x^2 - 16x + 16}$ c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3 + 2x^2 + x}$

Solucions: 1.6.1: a) 4 b) $-\sqrt{2}/2$ c) 4 d) $-2/3$ e) 2

1.6.2: a) $1/2\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{3}$ c) $\sqrt{2}/4$ d) 0 e) $1/8$ f) $-8\sqrt{2}$ g) -32

1.7 Altres indeterminacions amb polinomis i arrels quadrades.

Exemple resolt. (Indeterminació $\infty-\infty$) Calcula $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{x} - x$

$$\text{Solució. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{x} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Exemple resolt. (Indeterminació $\infty-\infty$) Calcula $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2-x}{x+1} - \frac{2x^2}{x-1}$

Solució. Estem davant d'una indeterminació $\infty-\infty$ que superarem fent la resta:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2-x}{x+1} - \frac{2x^2}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x^2-x)(x-1) - 2x^2(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x^2+x}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(-5+\frac{1}{x})}{x^2(1-\frac{1}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5+0}{1-0} = \frac{-5}{1} = -5 \end{aligned}$$

Exemple resolt. (Indeterminació ∞/∞) Calcula $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2-4x+1}}{x+3}$

$$\text{Solució. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2-4x+1}}{x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2(1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2})}}{x(1+\frac{3}{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}})}{x(1+\frac{3}{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{3}{x}} = \frac{\sqrt{1-0+0}}{1+0} = \frac{1}{1} = 1$$

Exemple resolt. (Indeterminació $\infty-\infty$): Calcula $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+5x-9} - \sqrt{x^2-6x+8}$

Solució. Multiplicarem i dividirem pel conjugat:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+5x-9} - \sqrt{x^2-6x+8} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+5x-9} - \sqrt{x^2-6x+8})(\sqrt{x^2+5x-9} + \sqrt{x^2-6x+8})}{(\sqrt{x^2+5x-9} + \sqrt{x^2-6x+8})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+5x-9-(x^2-6x+8)}{(\sqrt{x^2+5x-9} + \sqrt{x^2-6x+8})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{11x-17}{(\sqrt{x^2+5x-9} + \sqrt{x^2-6x+8})} = * \end{aligned}$$

Treiem factor comú “x” en el denominador:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+5x-9} + \sqrt{x^2-6x+8} &= \sqrt{x^2\left(1+\frac{5}{x}-\frac{9}{x^2}\right)} + \sqrt{x^2\left(1-\frac{6}{x}+\frac{8}{x^2}\right)} = \\ &= x\sqrt{1+\frac{5}{x}-\frac{9}{x^2}} + x\sqrt{1-\frac{6}{x}+\frac{8}{x^2}} = x\left(\sqrt{1+\frac{5}{x}-\frac{9}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{6}{x}+\frac{8}{x^2}}\right) \end{aligned}$$

Ara ja podem “tatxar” el factor “x” en numerador i denominador i continuar:

$$* = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(11-\frac{17}{x})}{x\left(\sqrt{1+\frac{5}{x}-\frac{9}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{6}{x}+\frac{8}{x^2}}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{11-\frac{17}{x}}{\sqrt{1+\frac{5}{x}-\frac{9}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{6}{x}+\frac{8}{x^2}}} = \frac{11-0}{\sqrt{1+0-0} + \sqrt{1-0+0}} = \frac{11}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = \frac{11}{2}$$

Exemple resolt. (Indeterminació $\infty-\infty$) Calcula $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+3} - \sqrt{x^2+1}$

Solució. Multiplicarem i dividirem pel conjugat:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+3} - \sqrt{x^2+1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+3} - \sqrt{x^2+1})(\sqrt{x^2+3} + \sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+3} + \sqrt{x^2+1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+3-(x^2+1)}{\sqrt{x^2+3} + \sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2+3} + \sqrt{x^2+1}} = \frac{2}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

Exemple resolt. (Indeterminació $\infty-\infty$): Calcula $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - (x+1)$

Solució. Multiplicarem i dividirem pel conjugat:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - (x+1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\sqrt{x^2+x}-(x+1)][\sqrt{x^2+x}+(x+1)]}{\sqrt{x^2+x}+(x+1)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x})^2 - (x+1)^2}{\sqrt{x^2+x}+(x+1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x-1}{\sqrt{x^2+x}+(x+1)} = \frac{-1}{2}$$

L'últim pas és senzill si es té en compte que, en el càlcul d'un límit quan x tendeix a infinit, per saber l'exponent d'una expressió dintre d'una arrel, s'ha de dividir entre 2 el seu exponent. Així, doncs, si l'expressió dintre de l'arrel és $x^2 + x$, el terme de grau màxim és x^2 , i com que es troba dintre d'una arrel

el seu exponent és $2/2 = 1$. Per tant, el grau màxim de l'arrel és 1. Per tant, el grau màxim del denominador és també 1 i el coeficient de grau màxim del denominador és $1 + 1 = 2$ (el primer 1 de l'arrel i el segon, com a coeficient de x)

Una forma alternativa de veure aquest últim pas és la següent:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x-1}{\sqrt{x^2+x}+(x+1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x-1}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x})}+(x+1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x-1}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}+(x+1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(-1-\frac{1}{x})}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}+(x+1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(-1-\frac{1}{x})}{x\left[\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \left(1+\frac{1}{x}\right)\right]} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{-1-0}{\sqrt{1+0}+1+0} = \frac{-1}{2}$$

Exemple resolt. (Indeterminació $0 \cdot \infty$): Calcula $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x}{x^3 + x} \cdot \frac{x^3 - 5x}{x^2 - 3x}$

$$\text{Solució. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x}{x^3 + x} \cdot \frac{x^3 - 5x}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 - 2x)(x^3 - 5x)}{(x^3 + x)(x^2 - 3x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(x-2)(x^2-5)}{x^2(x^2+1)(x-3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-2)(x^2-5)}{(x^2+1)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2x^2 - 5x + 10}{x^3 - 3x^2 + x - 3} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(1 - \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{10}{x^3}\right)}{x^3 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^3}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{10}{x^3}}{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 0 - 0 + 0}{1 - 0 + 0 - 0} = \frac{1}{1} = 1$$

Exemple resolt. (Indeterminació $0/0$ simplificant expressions)

$$\text{Calcula } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}}{x-1} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\right)2(x+1)}{(x-1)2(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-(x+1)}{2(x-1)(x+1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x+1}{2(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)}{2(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{2(x+1)} = \frac{-1}{2(1+1)} = \frac{-1}{4}$$

1.8 Indeterminació 1^∞ .

Mètode de la fórmula: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)g(x) = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)-1) \cdot g(x)}$

Exercici resolt. Calcula: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-3}{x^2-5}\right)^{3x+1}$

Solució: $f(x) = \frac{x^2-3}{x^2-5} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1$ $g(x) = 3x+1 \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$; tenim, una indeterminació 1^∞ .

Apliquem la fórmula: $f(x) - 1 = \frac{x^2-3}{x^2-5} - 1 = \frac{x^2-3}{x^2-5} - \frac{x^2-5}{x^2-5} = \frac{x^2-3-(x^2-5)}{x^2-5} = \frac{-3+5}{x^2-5} = \frac{2}{x^2-5}$

$(f(x) - 1)(3x + 1) = \frac{2}{x^2-5}(3x + 1) = \frac{6x+2}{x^2-5} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-3}{x^2-5}\right)^{3x+1} = e^0 = 1$

Mètode de les plantilles: Adaptar les expressions a una de les dues plantilles següents:

$$(A) \lim_{u \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{k}{u}\right)^u = e^k \quad (B) \lim_{v \rightarrow 0} (1 + kv)^{1/v} = e^k$$

Exercici resolt. Calcula $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+3}{2x-5}\right)^{\frac{x^2-1}{x+2}}$

Solució: Indeterminació 1^∞ , que resoldrem reescrivint l'expressió de la forma A:

$$\frac{2x+3}{2x-5} = \frac{2x-5+8}{2x-5} = \frac{2x-5}{2x-5} + \frac{8}{2x-5} = 1 + \frac{8}{2x-5}$$

$$\begin{aligned} \frac{2x+3}{2x-5} &= \left(1 + \frac{8}{2x-5}\right)^{\frac{2x-5}{2x-5}} = \left(\left(1 + \frac{8}{2x-5}\right)^{2x-5}\right)^{\frac{1}{2x-5}} \left(\frac{2x+3}{2x-5}\right)^{\frac{x^2-1}{x+2}} = \left(\left(1 + \frac{8}{2x-5}\right)^{2x-5}\right)^{\frac{1}{2x-5}} \left(\frac{2x+3}{2x-5}\right)^{\frac{x^2-1}{x+2}} \\ &= \left(\left(1 + \frac{8}{2x-5}\right)^{2x-5}\right)^{\frac{1}{2x-5} \cdot \frac{x^2-1}{x+2}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} (e^8)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{8}{2}} = e^4 \end{aligned}$$

Exercici resolt. Calcula $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + 3x)^{1/\sin x}$

$$(1 + 3x)^{1/\sin x} = \left(\left((1 + 3x)^{1/x}\right)^x\right)^{1/\sin x} = \left((1 + 3x)^{1/x}\right)^{x(1/\sin x)} = \left((1 + 3x)^{1/x}\right)^{x/\sin x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} (e^3)^1 = e^3$$

1.9 Repàs de límits i indeterminacions.

1.9.1

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 25}{x^2 - 4x - 5} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x^2 - 4x - 5} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{7x^2 - 4x - 3}{3x^2 - 4x + 1} \\
 \text{d) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 + 5x^3 + 6x^2}{x^2(x+1) - 4(x+1)} & \text{e) } \lim_{x \rightarrow -3} |x+1| + \frac{3}{x} & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x^2 - 9} \\
 \text{g) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 + 7} - 3}{x + 3} & \text{h) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{\sqrt{x^2 + 5} - (x+1)} & \text{i) } \lim_{y \rightarrow 5} \left(\frac{2y^2 + 2y + 4}{6y - 3} \right)^{1/3} \\
 \text{j) } \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[4]{2 \cos(x) - 5} & \text{k) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3+x} - \frac{1}{3-x} & \text{l) } \lim_{x \rightarrow -6} \frac{2x+8}{x^2-12} - \frac{1}{x+6} \\
 \text{m) } \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 - 2} - \sqrt{x^2 + 1} & \text{n) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x-2} - \sqrt{x} & \text{o) } \lim_{x \rightarrow 7} \sqrt[6]{2x-14} \\
 \text{p) } \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{3-3x} & \text{q) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 10}{4x^3 + x} & \text{r) } \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{x-3}{5-x}} \\
 \text{s) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + x^2 - 2}{x^2 + x - 2x^3 + 1} & \text{t) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+5}{2x^2 + 1} & \text{u) } \lim_{x \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{x^5 + 1}{x^6 + x^5 + 100}\right) \\
 \text{v) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x}{x^2 - 4} & \text{w) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x}{x^2 + 2x + 1} & \text{x) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 25}{x^2 - 4x - 5} \\
 \text{y) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 5} + 2}{x - 3} & \text{z) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x + \sin(x)}{x^4} & \text{aa) } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} + e^{x^2} \\
 \text{ab) } \lim_{x \rightarrow \infty} 2x^2 - 3x & \text{ac) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2-x}}{x} & \text{ad) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{1 + \ln x} \\
 \text{ae) } \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 1} - 2x & \text{af) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} &
 \end{array}$$

Solucions:

1.3.1 a) 0 b) 0, -1 c) 0 d) -2, -7, no def. e) 4, -4, 1 f) 1/2, 4, -1 g) 2, 2, 2, -1 h) 4, 3, no def. i) -1, 1, no def. j) $-\infty$, $-\infty$, -1

1.3.2 a) No definit b) 0 c) 3 d) $-\infty$ e) No definit f) 2 g) No definit h) 1

1.3.3 a) 0 b) No definit c) 0 d) No definit e) 0 f) $-\infty$ g) 1

1.3.4 a) No def. b) 4 c) 10 d) No def. e) 5/2 f) 4 g) No def.

1.5.1 a) 4 b) $-2/2$ c) 4 d) $-2/3$ e) 2

1.5.2 a) 2 2 1 b) 2 3 c) 4 2 d) 0 e) 1/8 f) -8 2 g) -32

1.7.1 a) 5 b) 5/3 c) 5 d) 1 e) 1 f) 1/24 g) 1/6 h) -18 i) 4/3 j) no def. k) -2/9 l) 1/36 m) 0 n) no def. o) no def. p) 0 q) ∞ r) -1 s) -3/2 t) 0 u) 1 v) no def. w) $-\infty$ x) no def. y) no def. z) ∞ aa) $-\infty$ ab) ∞ ac) 1/2 ad) 0 ae) $-\infty$ af) 2/3

Continuïtat

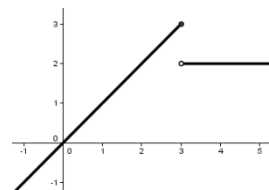
Una funció $y = f(x)$ és **contínua** en el punt “a” si existeixen i són iguals els següents valors:

a) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$	b) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$	c) $f(a)$
------------------------------------	------------------------------------	-----------

Discontinuitats notables.

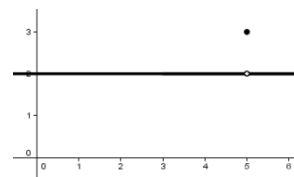
1. Discontinuitat de salt: $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$

Exemple: $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 3 \\ 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$
té una discontinuïtat de salt en $x = 3$.



2. Discontinuitat evitable: $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq f(a)$

Exemple: $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \neq 5 \\ 3 & \text{si } x = 5 \end{cases}$
té una discontinuïtat d'aquest tipus a $x = 5$
També les trobem en algunes indeterminacions 0/0.

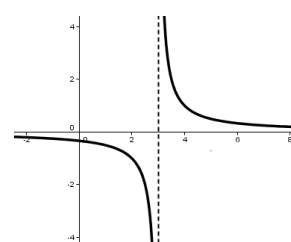


Exemple: $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ té una discontinuïtat d'aquest tipus a $x = 2$

3. Asímtotes verticals: $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$ o bé $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$

Normalment es troben en funcions racionals, quan denominador = 0 i el numerador no.

Exemple: $f(x) = \frac{1}{x - 3}$ té una discontinuïtat d'aquest tipus a $x = 3$



Continuïtat de funcions fonamentals.

1. La funció constant $f(x) = k$ és contínua en $(-\infty, +\infty)$
2. La **funció potencial** $f(x) = x^n$, amb $n > 0$ és contínua en $(-\infty, +\infty)$
3. Les **funcions irracionals**. En el seu domini. $Dom(\sqrt[n]{x}) = (-\infty, +\infty)$ si n és senar
4. La **funció exponencial** $f(x) = a^x$, $a > 0, a \neq 1$ és contínua en $(-\infty, +\infty)$
5. La **funció logarítmica** $f(x) = \log_a x$, En el seu domini $(0, +\infty)$
6. Les **funcions trigonomètriques** $f(x) = \sin(x)$ i $f(x) = \cos(x)$ són contínues en $(-\infty, +\infty)$.
tang(x) es contínua en el seu domini: $Dom(\tan(x)) = (-\infty, +\infty) - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$
7. Les **funcions trigonomètriques inverses** $f(x) = \arcsin(x)$ i $f(x) = \arccos(x)$
són contínues en el seu domini $[-1, 1]$.

Continuïtat amb les operacions amb funcions.

Si les funcions $f(x)$ i $g(x)$ són contínues en $x = a$, llavors també són contínues en $x = a$ les següents funcions:

1. La **funció suma:** $f(x) + g(x)$
2. La **funció diferència:** $f(x) - g(x)$
3. La **funció producte:** $f(x) \cdot g(x)$. La **funció quocient:** $\frac{f(x)}{g(x)}$ quan $g(a) \neq 0$
5. Si $g(x)$ és contínua en $x = a$ i $f(x)$ és contínua en $g(a)$, llavors la **funció composta** $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ també és contínua en $x = a$

Una conseqüència dels resultats anteriors és que qualsevol **funció polinòmica** és contínua en tota la recta $(-\infty, +\infty)$.

2.2 Continuïtat de funcions definides a trossos.

Mètode per determinar la continuïtat de funcions definides a trossos.

Objectiu : Estudiar la continuïtat al voltant del seu punt frontera $x = a$: $f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x < a \\ h(x) & \text{si } x \geq a \end{cases}$

Procediment:

1º. Treure tres valors : $A = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ $B = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ $C = f(a)$

2º. Comprovar que $A = B = C$: $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

Exercicis:

2.2.1 La funció $f(x)$ definida de la següent manera: $f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x \leq -2 \\ 1 & \text{si } -2 < x \leq 1 \\ -x + 5 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- Dibuixeu la gràfica de la funció.
- Determina els punts de tall de la funció amb els eixos.
- Estudieu la continuïtat de la funció.

2.2.2 La funció $f(x)$ definida de la següent manera: $f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - 3x + 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- Dibuixeu la gràfica de la funció.
- Determina els punts de tall de la funció amb els eixos.
- Estudieu la continuïtat de la funció.

PAU CAT TEC 2006 3.4

Sol: P tall: (-1,0)(0,2)(2,0)(1,0) c) $f(x)^- = f(x)^+ = 2 \rightarrow$ Continua

2.2.3 Representa gràficament i estudia la continuïtat de la funció: $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ e^x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Sol: $f(0^+) = 0$ $f(0^-) = 1 \rightarrow$ discontinuïtat de salt

2.2.4 Representa gràficament i estudia la continuïtat de la funció $f(x) = \begin{cases} |x^2 - 1| & x \leq 1 \\ 2x - 2 & x > 1 \end{cases}$

2.2.5 Representa i estudia la continuïtat de la funció: $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x \leq 3 \\ 4 & 3 < x \leq 9 \\ x - 5 & x > 9 \end{cases}$

2.2.6 Analitza la continuïtat de la funció: $f(x) = \begin{cases} x + 1 & x \leq -2 \\ x^2 + 4 & -2 < x \leq 1 \\ 2x + 3 & x > 1 \end{cases}$

Sol: $f(-2^-) = -1$ $f(-2^+) = 8 \rightarrow$ salt b) $f(1^-) = 5$ $f(1^+) = 5 \rightarrow$ continua

2.2.7 Estudia la continuïtat de la funció: $f(x) = \begin{cases} x - 2 & x < 1 \\ -3 & -1 \leq x \leq 2 \\ 3 + x & 2 < x < 4 \\ 7 & x > 4 \end{cases}$

2.2.8 Calcula el valor de k per al què la següent funció sigui contínua en tot \mathbb{R} :

$$f(x) = \begin{cases} \sin(3x) & x \leq \pi/2 \\ 2k + \cos(2x) & x > \pi/2 \end{cases}$$

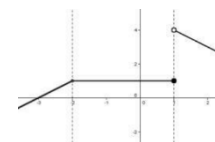
2.2.9 Estudi de la continuïtat de $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x & \text{si } x < 2 \\ 6 - x^2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$$

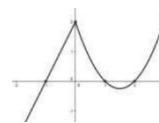
2.2.10 Estudia la continuïtat de la funció $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-3} & \text{si } x \leq 4 \\ x - 2 & \text{si } 4 < x < 5 \\ -x + 8 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$

Solucions:

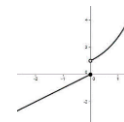
2.2.1 a) b) Punt de tall amb l'eix Y: (0,1), Punts de tall amb l'eix X: (-3,0) i (5,0) c) Per a qualsevol $x < -2$ la funció és el polinomi $x+3$, i per tant contínua. De la mateixa manera, si $-2 < x < 1$ o si $x > 1$
 Si $x = -2 : f(-2) = 1$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$ contínua en aquest punt. Si $x = 1 : f(1) = 1$;
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ límits laterals diferents per tant la funció té una discontinuïtat en $x=1$.



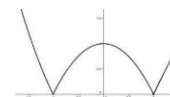
2.2.2 b) Punt de tall amb l'eix Y: (0,2) Punts de tall amb l'eix X: (-1,0), (1,0) i (2,0) c) Per a qualsevol $x < 0$ la funció és el polinomi $2x+2$, i per tant contínua. De la mateixa manera, si $x > 0$, es tracta d'una funció polinomial contínua. Si $x = 0 : f(0) = 2$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ Els límits laterals coincideixen amb el valor de la funció en aquest punt per tant la funció també és contínua en aquest punt.



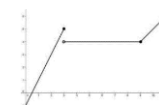
2.2.3 Per a qualsevol $x < 0$ la funció és el polinomi x , i per tant contínua. De la mateixa manera, si $x > 0$, la funció és l'exponencial, contínua. Si $x = 0 : f(0) = 0$. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ Els límits laterals no coincideixen en aquest punt per tant la funció té una discontinuïtat de salt.



2.2.4 Per a qualsevol $x < 1$ la funció és $1 - 2x$, una composició de funcions contínues, i per tant contínua. Si $x > 1$, la funció és polinòmica, i per tant contínua. Per a $x=1$ apliquem la definició de continuïtat: $f(1) = 0$
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ Aquests tres valors coincideixen, i per tant en aquest punt la funció també és contínua.



2.2.5 Observem que la funció té una discontinuïtat de salt en $x=3$



2.3 Continuïtat de funcions definides a trossos amb paràmetres.

Exercici resolt. Sigui $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 1 & x \leq 2 \\ 3x + a & x > 2 \end{cases}$

Determina el valor del paràmetre a per al qual aquesta funció és contínua.

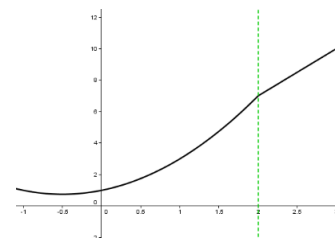
Solució:

Per a $x \neq 2$ aquesta funció és contínua, perquè és polinòmica (grau 2 esquerra i grau 1 dreta)

Per a $x = 2$, hem d'aplicar la definició de continuïtat: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$

- $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 + ax + 1 = 2^2 + a \cdot 2 + 1 = 4 + 2a + 1$
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 3x + a = 3(2) + a$
- $f(2) = 2^2 + a \cdot 2 + 1 = 4 + 2a + 1$

Condicció de continuïtat en $x = 2$: $4 + 2a + 1 = 3(2) + a$
 $4 + 2a + 1 = 6 + a$
 $\Rightarrow 4 + 1 - 6 = a - 2a \Rightarrow -1 = -a \Rightarrow 1 = a$



Exercici resolt Donada la funció $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x + 1 & x < 2 \\ ax^2 + bx + 1 & x \geq 2 \end{cases}$

Determineu els valors a i b de forma que la funció sigui contínua i la seva gràfica passi pel punt $(3, 1)$.

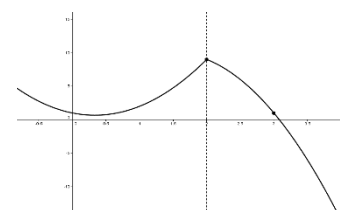
Solució:

$f(x)$ contínua en $x=2$:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= [ax^2 + bx + 1]_{x=2} = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 1 = 4a + 2b + 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= [3x^2 - 2x + 1]_{x=2} = 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 1 = 9 \\ f(2) &= [ax^2 + bx + 1]_{x=2} = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 1 = 4a + 2b + 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 4a + 2b + 1 = 9$$

La gràfica passa pel punt $(3, 1) \Leftrightarrow f(3) = 1 \Leftrightarrow a3^2 + b3 + 1 = 1 \Leftrightarrow 9a + 3b + 1 = 1$

El sistema $\begin{cases} 4a + 2b + 1 = 9 \\ 9a + 3b + 1 = 1 \end{cases}$ té una única solució que és $a = -4, b = 12$.



Exemple resolt. Determina els valors d' a i b per als que és contínua

la funció $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x < -2 \\ ax^2 + bx & -2 \leq x \leq 4 \\ x - 4 & x > 4 \end{cases}$

Solució: Els dos únics punts “problemàtics” són $x = -2$ i $x = 4$.

Al voltant de $x = -2$:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} 2x + 1 = [2x + 1]_{x=-2} = 2(-2) + 1 = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} ax^2 + bx = [ax^2 + bx]_{x=-2} = a(-2)^2 + b(-2) = 4a - 2b$$

$$f(-2) = a(-2)^2 + b(-2) = 4a - 2b$$

Per tant, s'ha de complir $4a - 2b = -3$

Al voltant de $x = 4$:

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} ax^2 + bx = [ax^2 + bx]_{x=4} = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 = 16a + 4b$$

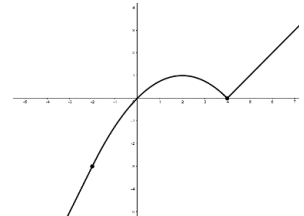
$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} x - 4 = [x - 4]_{x=4} = 4 - 4 = 0$$

$$f(4) = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 = 16a + 4b$$

Per tant, s'ha de complir $16a + 4b = 0$

Així doncs, si la funció és contínua, s'hauran de complir totes dues condicions, és a dir, s'ha de satisfer el sistema lineal 2×2 següent:

$$\begin{cases} 4a - 2b = -3 \\ 16a + 4b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{-1}{4}, b = 1$$



Exercicis:

2.3.1 Troba el valor de k perquè la funció següent sigui contínua:

$$a) f(x) = \begin{cases} x + k & x \leq 0 \\ 2x^2 - kx + 6 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad b) f(x) = \begin{cases} x & x < 1 \\ \ln(x) + k & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} kx + 2 & x < 2 \\ \sqrt{x-2} + 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

2.3.2 Determina els valors dels paràmetres a i b perquè la funció sigui contínua:

$$a) f(x) = \begin{cases} ax + 2 & x \leq -1 \\ x^2 - 1 & \text{si } -1 < x < 1 \\ 2x + b & \text{si } 1 \leq x \end{cases} \quad b) f(x) = \begin{cases} x + 1 & x \leq -2 \\ ax^2 + b & \text{si } -2 < x < 1 \\ -4x & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

2.3.3 Determina els valors dels paràmetres a i b perquè la funció sigui contínua:

$$a) f(x) = \begin{cases} \sin x + 4 & x \leq 0 \\ 2^x + bx + a - b & 0 < x \leq 1 \\ x^2 + bx + a & x > 1 \end{cases} \quad b) f(x) = \begin{cases} \cos x + a & x \leq 0 \\ 3^x + x + 3a - 3b & 0 < x \leq 1 \\ x^2 + bx + a + 1 & x > 1 \end{cases}$$

2.3.4 Determina a i b perquè sigui contínua: $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & x \leq -1 \\ 2ax + 3b & -1 < x < 2 \\ 4x + 7 & x \geq 2 \end{cases}$

2.3.5 Determina h perquè sigui contínua: $f(x) = \begin{cases} 3h \vec{x} + 1 & x \leq 3 \\ 2x^2 + hx - 5 & x > 3 \end{cases}$

Solucions: 2.3.1 a) $k = 6$ b) $k = 1$ c) $k = 1/2$ 2.3.3 a) $a = 4, b = 1$ b) $a = 3, b = 2$

2.3.4 $a = 13/6, b = 19/9$ 2.3.5 $h = 2$

2.3.6 Determina a perquè sigui contínua: $f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x} & x < 1 \\ -x^2 + a & -1 \leq x < 1 \\ \frac{x+2}{x} & x \geq 1 \end{cases}$

2.3.7 Troba k per tal que sigui contínua $f(x) = \begin{cases} k^2x - 1 & \text{si } x \geq 1 \\ x + 2 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

Solució: <https://youtu.be/08M60J6sReM> (Susi Profe)

2.3.8 Troba el valor dels paràmetres a i b per als que la funció sigui contínua

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{si } x \leq -1 \\ b & \text{si } -1 < x < 3 \\ 2x + 4 & x \geq 3 \end{cases} \quad \text{Solució: } \a href="https://youtu.be/UfOvXKxvSMY">https://youtu.be/UfOvXKxvSMY (Susi Profe)$$

2.3.9 Determina a i b per que sigui contínua. $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ ax + b & 0 \leq x < 1 \\ 2 & x \geq 1 \end{cases}$

Solució: <https://youtu.be/N4BG7SW6gZw> (Unicoos)

2.3.10 Determina els valors d'a i b per als que la següent funció és contínua:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < -2 \\ ax^2 + bx & \text{si } -2 \leq x \leq 4 \\ x - 4 & \text{si } x > 4 \end{cases} \quad \text{https://youtu.be/kQKU7O2Dc-s}$$

(profesor10demates)

2.3.11 Determina el valor de k per al que la funció sigui contínua en tot IR:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2 & \text{si } x \leq -2 \\ kx & \text{si } x > -2 \end{cases} \quad \text{https://youtu.be/VR-oKs7wFmo} \quad (\text{profesor10demates})$$

2.3.12 Determina el valor de m per al que la funció sigui contínua en tot IR:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - mx^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{2}{mx} & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{https://youtu.be/pZuqOolzKw} \quad (\text{Mates con Andrés})$$

2.3.13 Determina el valor del paràmetre a per al que la funció $f(x) = \begin{cases} \sqrt{a}x & 0 \leq x \leq 8 \\ \frac{x^2 - 32}{x - 4} & x > 8 \end{cases}$ és contínua en $x = 8$. Té algun altre punt de discontinuïtat?

2.3.14 Trobeu el valor de k per al que la funció $f(x) = \begin{cases} 6 - \frac{x}{2} & x < 2 \\ x^2 + kx & x \geq 2 \end{cases}$ és contínua.

2.3.15 Determina els valors d'a i b per als que la funció $f(x) = \begin{cases} x + 1 & x \leq -1 \\ a + x^2 & -1 < x < 1 \\ (b - x)^2 & x \geq 1 \end{cases}$ és contínua.

2.3.16 Determina els valors d'a i b per als que la funció $f(x) = \begin{cases} a e^x & x < 0 \\ 1 - x^2 & 0 \leq x < 1 \\ b(1 - e^{x-1}) & x \geq 1 \end{cases}$ és contínua.

2.3.17 Determina a per als que la funció sigui contínua $f(x) = \begin{cases} e^{2x} & x < 0 \\ x^2 + a & 0 \leq x \leq 3 \\ \frac{x+5}{x-3} & x > 3 \end{cases}$

2.3.18 Determina els valors d'a i b per als que la funció $f(x) = \begin{cases} ax + 1 & x < -2 \\ \frac{x+b}{x^2+1} & -2 \leq x \end{cases}$ sigui contínua.

2.3.19 a) Determina els valors d'a i b per als que la següent funció sigui contínua i derivable:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & x \leq 1 \\ \frac{2 \ln x + 2}{x^2} & x > 1 \end{cases}$$

b) Per als valors anteriors, estudia la seva monotonia i fes una representació gràfica.

2.3.20 a) Determina els valors d'a per als que la següent funció sigui contínua i derivable:

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & x < 1 \\ 3(x - 2)^2 & x \geq 1 \end{cases}$$

b) Per als valors anteriors, estudia la seva monotonia i fes una representació gràfica.

c) Determina l'interval en el que $f(x) \geq 3$.

2.3.21 a) Determina els valors d'a per als que la següent funció sigui contínua en $x = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & x < 2 \\ e^{2-x} + 2 & x \geq 2 \end{cases}$$

b) Per al valor anterior, la funció és derivable en $x = 2$?

2.4 Problemes PAU CCSS amb continuïtat de f. definides a trossos.

2.4.1 Considereu la funció $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x \leq -1 \\ ax + b & \text{si } -1 < x < 2 \\ x^2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

Trobeu el valor de a i b perquè la funció sigui contínua per a tots els nombres reals.

PAU CAT CCSS SET 2018 3.1 (Solució: [PAUCCSS](#) pàg. 418)

2.4.2 Considereu la funció: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + b & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

a) Determineu el valor de b perquè la funció f sigui contínua en el punt $x = 0$.

Justifiqueu si f pot ser discontinua en algun altre punt.

~~b) Justifiqueu si, per a valors positius de x, la funció f és creixent o decreixent.~~

PAU CAT CCSS JUNY 2010 1.2

2.4.3 Considereu la funció: $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 2 \\ x - 1 & \text{si } 2 \leq x < 4 \\ 3 & \text{si } x > 4 \end{cases}$

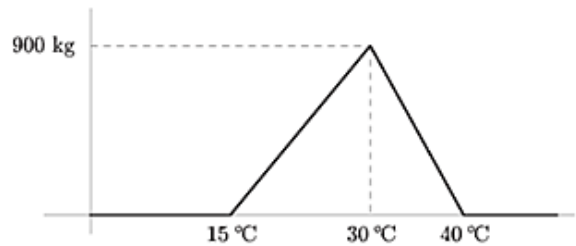
a) Feu-ne la representació gràfica.

b) Digueu en quins punts és discontinua i quin tipus de discontinuïtat té.

PAU CAT CCSS JUNY 2009 3.1

2.4.4 Un hivernacle està destinat al cultiu de tomàquets. Se sap que les tomaqueres només produeixen fruits si la temperatura dins l'hivernacle està entre 15°C i 40°C . En la gràfica següent es mostra la producció de tomàquets en kilograms, segons la temperatura que es manté a l'hivernacle.

- a) Si la temperatura està entre 15°C i 29°C , digueu quina variació experimenta la producció en augmentar la temperatura 1°C . Calculeu aquesta variació quan la temperatura està entre 30°C i 39°C .



- b) Definiu una funció a trossos que expressi la producció segons la temperatura.

c) Trobeu les temperatures per a les quals s'obté el 75 % de la producció màxima.

PAU CAT CCSS JUNY 2008 5.6

2.4.5 Considerem la funció següent: $f(x) = \begin{cases} -4x + a & \text{si } x \leq -2 \\ x^2 - 5 & \text{si } -2 < x < 1 \\ bx + 3 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$

- a) Calculeu els valors de a i de b per tal que f(x) sigui contínua per a tot x.
b) Feu un gràfic de la funció obtinguda en l'apartat anterior.

PAU CAT CCSS JUNY 2007 2.2 (Solució: [PAUCCSS](#) pàg. 196)

2.4.6 Considereu la funció: $f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - 3x + 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- a) Dibuixeu la gràfica.
b) Estudieu-ne la continuïtat.
~~e) Determineu els extrems relatius.~~

PAU CAT CCSS JUNY 2006 3.4

2.4.7 Considereu la funció: $f(x) = \begin{cases} x^3 + x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 3x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

- a) Estudieu-ne la continuïtat.
~~d) Determineu els intervals de creixement i decreixement de la funció.~~
~~e) Feu un gràfic aproximat de la funció.~~
~~f) Trobeu els extrems relatius i absoluts en l'interval $[-2, 2]$.~~

PAU CAT CCSS SET 2006 4.5

2.4.8 Sigui $f(x) = \begin{cases} e^{x-1} & \text{si } x < 1 \\ (x+a)^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ Per a quins valors del paràmetre a la funció és contínua?

PAU CAT CCSS JUNY 2004 3.3 (Solució: [PAUCCSS](#) pàg. 120)

2.4.9 Considereu la funció $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 & x < 0 \\ \frac{1}{x-3} & x \geq 0 \end{cases}$.

a) Feu-ne una representació gràfica aproximada. Justifiqueu per a quins valors de x la funció és discontinua.

b) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de f en el punt d'abscissa $x=4$.

Sol: $f(0^-)=4$ $f(0^+)=-a/3 \rightarrow$ disc salt. $f(3)=\infty$ disc. asimptòtica

PAU CAT CCSS JUNY 2011 4.4

- 2.4.10** Una empresa de paqueteria té unes tarifes d'enviaments de paquets que depenen del pes de cada paquet, tot i que no de manera lineal. Volem enviar un paquet a una distància aproximada de 650 km. La informació que ofereix l'empresa al seu web sobre els preus per a enviar un paquet a aquesta distància és la següent:
- si un paquet pesa fins a 2 kg, l'enviament té un cost fix de 30 €;
 - si un paquet pesa més de 2 kg però menys d'11 kg, els primers 2 kg costen 15 €/kg i la resta de kilograms es paguen a 12 €/kg;
 - si un paquet pesa entre 11 i 25 kg, ambdós inclosos, els primers 11 kg costen 13 €/kg i la resta costen 15 €/kg;
 - a partir de 25 kg, cal posar-se en contacte amb l'empresa.
- a) Quant costarà enviar un paquet de 9,5 kg? I un de 13 kg? Trobeu la funció definida a trossos que dona el preu de l'enviament d'un paquet de fins a 25 kg en funció del seu pes i estudeu-ne la continuïtat.
- b) Si hem pagat 162 € per un enviament, quant pesava el paquet que hem enviat?

PAU CAT CCSS 2024 5.1 (Solució: [PAUCCSS](#) pàg. 751)

- 2.4.11** Según una compañía telefónica, el coste de la transferencia de datos se descompone en dos conceptos: un coste fijo de 25 céntimos de euro por transferencia realizada más un coste variable en función de los gigabytes transferidos. El coste variable asociado a los 2 primeros gigabytes es gratis, pero a partir de 2 gigabytes, pasa a tarifarse los gigabytes restantes a 10 céntimos de euro por gigabyte.
- a) Si $f(x)$ representa el coste total en céntimos de euro de una transferencia en función de la cantidad de gigabytes transferidos en la misma (x), obtén la expresión de dicha función f para cualquier valor positivo x .
- b) ¿Es el coste una función continua de la cantidad transferida?
- c) Estudia y representa gráficamente la función f en el intervalo $(0, \infty)$.
- d) Si el coste total de una transferencia ha sido de 2,25 euros, ¿cuántos gigabytes se han transferido?
- e) ¿Cuál es el coste mínimo de una transferencia cualquiera? ¿Y el coste máximo?

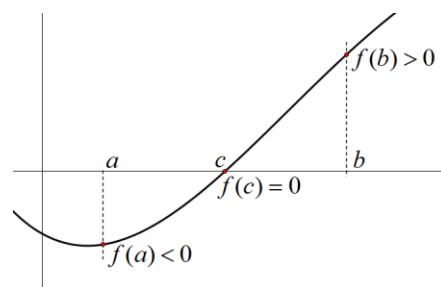
Asturias 2020

2.5 Teorema de Bolzano i les seves aplicacions.

Teorema de Bolzano.

Si una funció és contínua en un interval tancat $[a, b]$ i $f(a) \cdot f(b) < 0$ (vol dir que les dues imatges tenen signe distint), existeix un punt c de l'interval obert (a, b) en el qual la funció s'anul·la.

Si f contínua en $[a, b]$ i suposant que $f(a)$ i $f(b)$ tenen signes diferents, llavors existeix un $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$



Observacions:

1. És indispensable la continuïtat en l'interval tancat. Si la funció és discontinua, la tesi del teorema de Bolzano no es verifica necessàriament. Per exemple en $f(x) = \frac{1}{x}$, amb $f(-1) = -1$ i $f(1) = 1$, però no existeix cap c tal que $f(c) = 0$.
2. El teorema de Bolzano es pot usar per buscar les arrels o zeros d'una funció per aproximacions successives.

Exemple resolt.

Demostra que l'equació $e^{-x} + 2 = x$ té, almenys, una solució real.

Solució.

$$f(0) = e^{-0} + 2 - 0 = 3 > 0 \rightarrow +$$

$$f(3) = e^{-3} + 2 - 3 \cong -0.95 < 0 \rightarrow -$$

Aquesta funció és perfectament contínua en tot el seu domini perquè és composició i suma de funcions contínues, per tant, aplicant el Teorema de Bolzano, existirà un valor $1 < x < 3$ tal que $f(x) = e^{-x} + 2 - x = 0 \Leftrightarrow e^{-x} + 2 = x$, és a dir, serà una solució de l'equació.

Exercicis

2.5.1 Considereu la funció $f(x) = \frac{x^3}{x-2}$.

- a) Estudieu si té punts crítics i, en cas que en tingui, justifiqueu de quin tipus són. Determineu també quins són els intervals de creixement i decreixement de la funció.
- b) Comproveu que l'equació $f(x) = 0$ té una única solució en l'interval $(-2, 1)$.

PAU CAT TEC SET 2021 1.6 (Solució: [PAUTEC](#) pàg. 707)

2.5.2 Considereu la funció $f(x) = e^{x-1} - x - 1$.

- a) Estudieu-ne la continuïtat, els extrems relatius i els intervals de creixement i decreixement.
- b) Demostreu que l'equació $f(x) = 0$ té exactament dues solucions entre $x = -1$ i $x = 3$.

PAU CAT TEC JUNY 2021 2.6 (Solució: [PAUTEC](#) pàg. 667)

2.5.3 Considereu la funció $f(x) = \frac{x^3}{x-2}$.

- a) Estudieu si té punts crítics i, en cas que en tingui, justifiqueu de quin tipus són. Determineu també quins són els intervals de creixement i decreixement de la funció.
- b) Comproveu que l'equació $f(x) = 0$ té una única solució en l'interval $(-2, 1)$.

PAU CAT TEC SET 2021 1.6 (Solució: [PAUTEC](#) pàg. 707)

2.5.4 Considereu la funció $f(x) = \frac{2x^3 - 5x + 4}{1-x}$.

- a) Calculeu-ne el domini i estudieu-ne la continuïtat. Té cap asímptota vertical?
- b) Observeu que $f(-2) = -\frac{2}{3}$, $f(0) = 4$ i $f(2) = -10$. Raoneu si, a partir d'aquesta

informació, podem deduir que l'interval $(-2, 0)$ conté un zero de la funció. Podem deduir-ho per a l'interval $(0, 2)$? Trobeu un interval determinat per dos enters consecutius que contingui, com a mínim, un zero d'aquesta funció.

PAU CAT TEC JUNY 2019 1.4 (Solució: [PAUTEC](#) pàg. 537)

2.5.5 Sigui la funció $f(x) = \sqrt{x} + x - 2$

a) Comproveu que la funció $f(x)$ compleix l'enunciat del teorema de Bolzano a l'interval $[0, 2]$ i que, per tant, l'equació $f(x) = 0$ té alguna solució a l'interval $(0, 2)$. Comproveu que $x = 1$ és una solució de l'equació $f(x) = 0$ i raoneu, tenint en compte el signe de $f'(x)$, que la solució és única.

b) ~~A partir del resultat final de l'apartat anterior, trobeu l'àrea limitada per la gràfica de la funció $f(x)$, l'eix de les abscisses i les rectes $x = 0$ i $x = 1$.~~

PAU CAT TEC JUNY 2018 1.5

2.5.6 a) Donada la funció $f(x) = x^3 - 3x$, calculeu els punts de tall amb els eixos i els extrems relatius (si en té), i feu un esbós de la gràfica de la funció.

b) Basant-se en el gràfic anterior, i sense cap més càlcul, raoneu que la funció $g(x) = x^3 - 3x - 10$ talla l'eix de les x en un sol punt.

c) Indiqueu, raonadament, un interval de longitud 1 en el qual es troba la solució real de l'equació $x^3 - 3x - 10 = 0$.

PAU CAT CCSS JUNY 2001 5.5

2.5.7 Es tallen les funcions $f(x) = 2^x$ i $g(x) = \frac{1}{x}$?

Solució: <https://youtu.be/49kOTXcixmM> (Unicoos)

2.5.8 Demostreu que les corbes $f(x) = \sin(x)$ i $g(x) = 1/x$ es tallen en algun punt de l'interval $(2\pi, 5\pi/2)$

Teorema dels valors intermedis (Darboux).

Si $f(x)$ és contínua en $[a, b]$, aleshores pren tots els valors intermedis entre $f(a)$ i $f(b)$.

Simbòlicament: $\forall k \in [f(a), f(b)] \exists c \in [a, b] | f(c) = k$

Demostració. És una conseqüència immediata del teorema de Bolzano.

Corol·lari.

Si $f(x)$ i $g(x)$ són funcions contínues en $[a, b]$ i $f(a) < g(a)$ i $f(b) > g(b)$, aleshores existeix un nombre $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = g(c)$.

Màxims i mínims de funcions.

Una funció $f(x)$ té un màxim en el punt c si les imatges de tots els altres punts del domini són menors o no són superiors. Simbòlicament:

$$f \text{ té un màxim en } c \Leftrightarrow \forall x \in \text{Dom}(f) | f(x) \leq f(c)$$

De la mateixa manera definirem el que és un mínim d'una funció. Els màxims i els mínims s'anomenen **extrems**.

Teorema de Weierstrass.

Si $f(x)$ és una funció contínua en un interval tancat $[a, b]$, la funció té un màxim i un mínim absoluts en aquest interval. És a dir, existeixen $m, M \in [a, b]$ per als quals es compleix que $\forall x \in [a, b] | f(m) \leq f(x) \leq f(M)$

Demostració. Òbviament, si hem d'unir $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$ amb una corda contínua tindrem un punt més alt i un punt més baix.

Teorema de Bolzano generalitzat.

La imatge contínua d'un interval tancat també ho és. Més concretament, si f és contínua en l'interval $[a, b]$, f té un màxim en c , $f(c) = M$, i un mínim en d , $f(d) = m$, la imatge de $[a, b]$ per f és $[m, M]$ i la funció és injectiva si i solament si és estrictament monòtona.

2.6 Resolució aproximada d'equacions amb el mètode de la bisecció.

El mètode de la bisecció és un que no pot fallar. La idea és senzilla. Sabem que en un interval $[x_1, x_2]$ hi ha un zero perquè la funció contínua $f(x)$ hi canvia de signe. Avaluem la funció en el punt $x_3 = (x_1 + x_2)/2$, el centre de l'interval. Utilitzem llavors x_3 per substituir x_1 si $f(x_1)$ i $f(x_3)$ tenen el mateix signe i seguim llavors amb $[x_3, x_2]$, o per substituir x_2 si $f(x_2)$ i $f(x_3)$ tenen el mateix signe i continuem en aquest cas amb $[x_1, x_3]$. Després d'una d'aquestes iteracions, l'interval que conté l'arrel ha disminuït la seva longitud a la meitat. Per construcció, és evident que això no pot fallar. Si un interval conté una arrel, la bisecció la trobarà.

2.6.1 Exercici resolt.

- a) Demuestra que l'equació $x^3 - x - 1 = 0$ té una solució en l'interval $(1, 2)$.
 b) Resol l'equació $x^3 - x - 1 = 0$ amb 3 decimals correctes mitjançant el mètode de Bisecció.

La solució és $x = 1.325$

x	$f(x)$	Arrel en l'interval	Punt mig
1	-1		
2	5	[1, 2]	1.5
1.5	0.8750	[1, 1.5]	1.25
1.25	-0.2969	[1.25, 1.5]	1.375
1.375	0.2246	[1.25, 1.375]	1.3125
1.3125	-0.0515	[1.3125, 1.375]	1.3438
1.3438	0.0826	[1.3125, 1.3438]	1.3282
1.3282	0.0147	[1.3125, 1.3282]	1.3204
1.3204	-0.0186	[1.3204, 1.3282]	1.3243
1.3243	-0.0018	[1.3243, 1.3282]	1.3263
1.3263	0.0065	[1.3243, 1.3263]	1.3253
1.3253	0.0025	[1.3243, 1.3253]	1.3248
1.3248	0.0003	[1.3243, 1.3248]	1.3246
1.3246	-0.0007	[1.3246, 1.3248]	

2.6.2 Determina la solució positiva de l'equació $x^4 - x - 1 = 0$ amb 3 decimals correctes mitjançant el mètode de bisecció.

2.6.3 Resol l'equació $e^x = 2 - x$ amb 3 decimals correctes mitjançant el mètode de bisecció.

2.6.4 Youtube Resol l'equació $x^3 + x^2 - 1 = 0$ aproximant a les dècimes.

Solució: <https://youtu.be/ZMN-N5ETgIc> (Mates con Andrés)

2.6.5 Problema resolt. Resoleu l'equació $e^{-x} - x^2 + 3 = 0$.

Solució. Escrivim l'equació de forma adequada $e^{-x} = x^2 - 3$

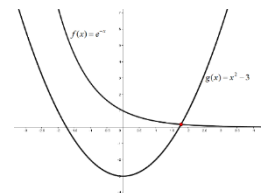
Es tracta de veure en quins punts es tallen les gràfiques de les funcions contínues

$$f(x) = e^{-x} \text{ i } g(x) = x^2 - 3$$

En la següent figura observem que hi ha intersecció en un únic punt, amb abscissa positiva. Per tant, la nostra equació té exactament una arrel:

Ara, aplicant successivament el mètode de la bisecció podem anar trobant aproximacions de l'arrel de

$$h(x) = e^{-x} - x^2 + 3 \quad x \cong 1.78006$$



a	b	$h(a)$	$h(b)$	Punt mig	$h(\text{punt mig})$
1	2	2.36	-0.86	1.5	0.97
1.5	2	0.97	-0.86	1.75	0.11
1.75	2	0.11	-0.86	1.875	-0.36
1.75	1.875	0.11	-0.36	1.8125	-0.12
1.75	1.8125	0.11	-0.12	1.78125	-0.0044
1.75	1.78125	0.11	-0.004	1.76563	0.0536

2.6.6 Problema resolt. Trobeu les solucions aproximades de l'equació $\ln x = \frac{x}{3}$

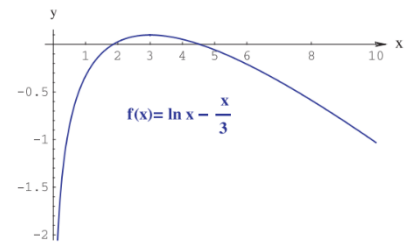
amb un error inferior a 0.01.

Solució. A la figura següent podem veure les gràfiques de $\ln x$ i $\frac{x}{3}$ que ens ajudaran a determinar l'interval adient per aplicar el teorema de Bolzano.

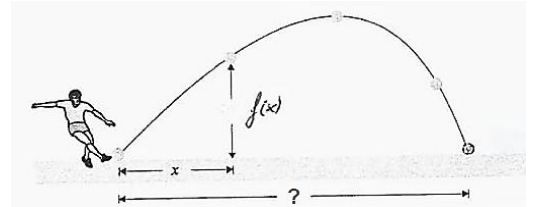
Així, considerant $f(x) = \ln x - \frac{x}{3}$, que és contínua en el seu domini, i els intervals $[1, 2]$ i $[4, 5]$, observem que $f(1) \cdot f(2) < 0$ i $f(4) \cdot f(5) < 0$

i, per tant, aplicant el teorema de Bolzano, sabem que en cada un d'aquests intervals hi ha una arrel. Per determinar-les amb una precisió de 0.01 cal anar aplicant el mètode de la bisecció fins a les centèsimes, com als exemples anteriors,

deduint que les solucions aproximades de l'equació $\ln x = \frac{x}{3}$ amb un error inferior a 0.01 són $x = 1.85$ i $x = 4.53$.



2.6.7 En la figura està representada la trajectòria de una pelota de fùtbol, després de ser golpeada en “vaselina” por Cristiano Ronaldo durante un entrenamiento de la selección portuguesa para la EURO-2004.

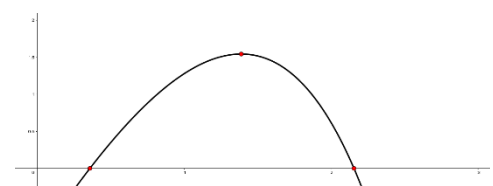


Considérese la funció $f(x) = 2x + 10 \ln(1 - 0.1x)$ que nos indica la altura de la pelota en el instante en que su proyección sobre el suelo se encuentra a x metros del lugar donde fue golpeada.

- Determina, aproximando hasta las centésimas, la distancia alcanzada por la pelota.
- Estudia la máxima altura alcanzada por la pelota.

2.6.8 La funció $f(x) = 4x - e^x$ té dos zeros (punts de tall amb l'eix X. El primer és $x = 0.357$ i el segon es troba entre $x = 2$ i $x = 3$.

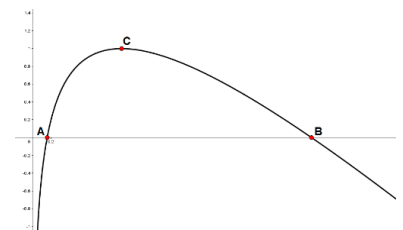
- Determina aquest segon zero amb dos decimals de precisió, amb el mètode de la bisecció.
- Determina el màxim d'aquesta funció.



2.6.9 Observa la gràfica de la funció $f(x) = \ln x - x + 2$.

Aquesta funció talla l'eix X en un punt A a prop de 0.2 (exactament en $x=0.1586$) i en un punt B més a la dreta.

- Determina les coordenades del punt B, amb precisió fins a les dècimes, amb el mètode de la bisecció.
- Determina les coordenades del màxim C de la funció.



2.6.10 La columna de l'esquerra de la taula següent mostra l'esquema d'un programa informàtic que s'ha elaborat per a trobar solucions aproximades d'una equació $f(x)=0$ en un interval (a, b) , sabent que $f(a) \cdot f(b) < 0$. La columna de la dreta recull un exemple de funcionament del programa en què es pot veure com actuaria per trobar una solució de l'equació $x + \ln(x) = 0$ entre els valors $a = 0,5$ i $b = 2$.

a) Expliqueu per què aquest programa és capaç de trobar una solució aproximada de l'equació $x + \ln(x) = 0$ entre els valors $a = 0,5$ i $b = 2$.

b) Volem aplicar aquest programa per a trobar les tres arrels de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ amb valors de a i b diferents. Trobeu justificadament entre quins valors a i b , per a cada arrel, hem d'aplicar el programa per a trobar aproximacions de cadascuna de les tres arrels de la funció.

PAU TEC JUNY 2022 5.6
(Sol. PAUTEC pàg. 765)

Esquema del programa	Exemple																														
1. Escriure «Introduïu un valor a »	L'usuari introdueix $a = 0,5$																														
2. Escriure «Introduïu un valor b »	L'usuari introdueix $b = 2$																														
3. Escriure «Introduïu una funció $f(x)$ »	L'usuari introdueix $f(x) = x + \ln(x)$																														
4. Calcular $c = (a + b)/2$	El programa calcula la mitjana entre a i b i li assigna el nom $c = (0,5 + 2)/2 = 1,25$																														
5. Si $f(a) \cdot f(c) < 0$, aleshores reassignar $b = c$; en cas contrari, reassignar $a = c$	El programa comprova que $f(0,5) \cdot f(1,25) = (0,5 + \ln(0,5)) \cdot (1,25 + \ln(1,25)) < 0$; per tant, reassigna $b = 1,25$																														
6. Repetir els passos 4 i 5 tants cops com faci falta fins que $f(a) - f(b) < 0,00000001$	El programa va repetint la comprovació anterior, canviant cada vegada els valors de a o de b : <table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th></th> <th>a</th> <th>b</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>inici</td> <td>0,5</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>iteració 1</td> <td>0,5</td> <td>1,25</td> </tr> <tr> <td>iteració 2</td> <td>0,5</td> <td>0,875</td> </tr> <tr> <td>iteració 3</td> <td>0,5</td> <td>0,6875</td> </tr> <tr> <td>iteració 4</td> <td>0,5</td> <td>0,59375</td> </tr> <tr> <td>iteració 5</td> <td>0,546875</td> <td>0,59375</td> </tr> <tr> <td>iteració 6</td> <td>0,546875</td> <td>0,5703125</td> </tr> <tr> <td>iteració 7</td> <td>0,55859375</td> <td>0,5703125</td> </tr> <tr> <td>[...]</td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>		a	b	inici	0,5	2	iteració 1	0,5	1,25	iteració 2	0,5	0,875	iteració 3	0,5	0,6875	iteració 4	0,5	0,59375	iteració 5	0,546875	0,59375	iteració 6	0,546875	0,5703125	iteració 7	0,55859375	0,5703125	[...]		
	a	b																													
inici	0,5	2																													
iteració 1	0,5	1,25																													
iteració 2	0,5	0,875																													
iteració 3	0,5	0,6875																													
iteració 4	0,5	0,59375																													
iteració 5	0,546875	0,59375																													
iteració 6	0,546875	0,5703125																													
iteració 7	0,55859375	0,5703125																													
[...]																															
7. Quan $f(a) - f(b) < 0,00000001$, escriure: «La solució de l'equació és c » i aturar el programa	Després d'unes 30 iteracions, el programa escriu: «La solució de l'equació és 0,56714329»																														

2.6.11 Donada la funció $f(x) = 6\sqrt{x} - x^2 - \frac{1}{2x}$,

- a) Demostra que l'equació $f(x) = 0$ té una solució α , entre 3 i 4.
b) Determina el valor d' α , amb aproximació fins a les dècimes.

2.6.12 Donada la funció $f(x) = 2^x - 10\sin x - 2$, on x està mesurat en radians,

- a) Demostra que l'equació $f(x) = 0$ té una solució α , entre 2 i 3.
b) Determina el valor d' α , amb aproximació fins a les dècimes.

2.6.13 Donada la funció $f(x) = 2x^3 - \frac{7}{x^2} + 16$,

- a) Demostra que l'equació $f(x) = 0$ té una única solució α , entre -2 i -1.
b) Determina el valor d' α , amb aproximació fins a les dècimes.

2.6.14 Demostra que l'equació $x^6 + 2x = 1000$ té dues úniques solucions reals, i que una d'elles es troba a l'interval $[3,4]$. Determina una aproximació a aquesta solució amb el mètode de la bissecció.

2.6.15 Donada la funció $f(x) = x^4 - \sqrt{12x^3} + 7$

- a) Determina el seu domini de definició.
b) Estudi de la seva monotonia.
c) Demostra que la funció anterior només té dues arrels, i determina-les, amb el mètode de bissecció, amb una aproximació de dècimes d'unitat.
d) Representa gràficament aquesta funció.

2.6.16 Donada la funció $f(x) = \frac{2(x^3+3)}{\sqrt{x}} - 9, x > 0$

- Determina el seu domini de definició.
- Estudi de la seva monotonia.
- Demuestra que la funció anterior només té dues arrels, i determina-les, amb el mètode de bisecció, amb una aproximació de dècimes d'unitat.
- Representa gràficament aquesta funció.

2.7 Continuïtat de funcions racionals (indeterminació 0/0).

2.7.1 Estudia la continuïtat de la funció $f(x) = \frac{x^3 - x}{x - 1}$ Solució: <https://youtu.be/32ReJLtR8QQ> (Mates con Andrés)

2.7.2 Estudia la continuïtat de la funció $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$ Solució: <https://youtu.be/xIU949Eq7nY>

2.7.3 Estudia la continuïtat de la funció $f(x) = \frac{x^3 + 8}{x^2 - 4}$ Solució: <https://youtu.be/WDC2U40ftFw> (unicoos)

2.7.4 Estudia la continuïtat de la funció $f(x) = \frac{x + 3}{x^2 - 3x - 10}$ Solució: <https://youtu.be/0bnmfkpDoGY>

2.7.5 Estudia i classifica les discontinuïtats de la funció $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2}$

2.7.6 Determina i classifica les discontinuïtats de la funció $f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 2x - 3}$

2.7.7 Determina i classifica les discontinuïtats de la funció $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}$

2.7.8 Determina i classifica les discontinuïtats de la funció $f(x) = \frac{x^2 - x^3}{x^2 - 1}$

2.7.9 Donada la funció $g(x) = \frac{(x-1)\sqrt{x}}{x^2-1}$ indica quin és el seu domini. És $g(x)$ una funció contínua en el seu domini? Justifica la resposta i, en cas negatiu, indica quin tipus de discontinuïtat presenta.

Balears 2024

2.7.10 Considereu la funció $f(x) = -2 + 10(x-1)\ln x$, definida per a $x > 0$.

- Comproveu que $f(x)$ té una arrel a l'interval $[1, 1,5]$ i busqueu un interval d'una dècima de longitud que també contingui aquesta mateixa arrel.
- Sense calcular els punts crítics, justifiqueu que $f(x)$ és decreixent a l'interval $(0, 1)$ i creixent a $(1, +\infty)$. Quins màxims i mínims té aquesta funció?
- Calculeu $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, i feu un esbós de la gràfica d'aquesta funció.

PAU CAT TEC 2024 5.1 (Solució: [PAUTECH](#) pàg. 926)