ÀLGEBRA LINEAL

Amb tots els problemes PAU 1998-2024

Gerard Romo Garrido

Toomates Coolección vol. 23

Toomates Coolección

Los libros de **Toomates** son materiales digitales y gratuitos. Son digitales porque están pensados para ser consultados mediante un ordenador, tablet o móvil. Son gratuitos porque se ofrecen a la comunidad educativa sin coste alguno. Los libros de texto pueden ser digitales o en papel, gratuitos o en venta, y ninguna de estas opciones es necesariamente mejor o peor que las otras. Es más: Suele suceder que los mejores docentes son los que piden a sus alumnos la compra de un libro de texto en papel, esto es un hecho. Lo que no es aceptable, por inmoral y mezquino, es el modelo de las llamadas "**licencias digitales**" con las que las editoriales pretenden cobrar a los estudiantes, una y otra vez, por acceder a los mismos contenidos (unos contenidos que, además, son de una bajísima calidad). Este modelo de negocio es miserable, pues impide el compartir un mismo libro, incluso entre dos hermanos, pretende convertir a los estudiantes en un mercado cautivo, exige a los estudiantes y a las escuelas costosísimas líneas de Internet, pretende pervertir el conocimiento, que es algo social, público, convirtiéndolo en un producto de propiedad privada, accesible solo a aquellos que se lo puedan permitir, y solo de una manera encapsulada, fragmentada, impidiendo el derecho del alumno de poseer todo el libro, de acceder a todo el libro, de moverse libremente por todo el libro.
Nadie puede pretender ser neutral ante esto: Mirar para otro lado y aceptar el modelo de licencias digitales es admitir un mundo más injusto, es participar en la denegación del acceso al conocimiento a aquellos que no disponen de medios económicos, y esto en un mundo en el que las modernas tecnologías actuales permiten, por primera vez en la historia de la Humanidad, poder compartir el conocimiento sin coste alguno, con algo tan simple como es un archivo "pdf". **El conocimiento no es una mercancía**.
El proyecto Toomates tiene como objetivo la promoción y difusión entre el profesorado y el colectivo de estudiantes de unos materiales didácticos libres, gratuitos y de calidad, que fuerce a las editoriales a competir ofreciendo alternativas de pago atractivas aumentando la calidad de unos libros de texto que actualmente son muy mediocres, y no mediante retorcidas técnicas comerciales.
 Todos los libros se ofrecen en dos versiones: En formato "**pdf**" para una cómoda lectura y en el formato "**doc**" de MSWord para permitir y facilitar su edición y generar versiones parcial o totalmente modificadas. **¡Libérate de la tiranía y mediocridad de las editoriales! Crea, utiliza y comparte tus propios materiales didácticos**

Problem Solving (en español):
Geometría Axiomática Problemas de Geometría 1 Problemas de Geometría 2
Introducción a la Geometría Álgebra Teoría de números Combinatoria Probabilidad
Trigonometría Desigualdades Números complejos Calculus & Precalculus
Libros de texto (en catalán):
Nombres (Preàlgebra) Àlgebra Proporcionalitat Mesures geomètriques
Geometria analítica Combinatòria i Probabilitat Estadística Trigonometria Funcions
Nombres Complexos Àlgebra Lineal Geometria Lineal Càlcul Infinitesimal
Programació Lineal Mates amb Excel
PAU españolas:
Cataluña TEC Cataluña CCSS Valencia Galicia País Vasco Baleares
PAU internacionales:
Portugal Italia Francia Rumanía Pearson Edexcel International A Level
Pearson Edexcel IGCSE Cambridge International A Level Cambridge IGCSE
AQA GCSE International Baccalaureate (IB)
Pruebas de acceso:
ACM4 CFGS PAP
Competiciones matemáticas:
Canguro: España Cataluña Francia USA Reino Unido Austria
USA: Mathcounts AMC 8 10 12 AIME USAJMO USAMO TSTST TST ELMO Putnam
España: OME OMEFL OMEC OMEA OMEM CDP
Europa: OMI Arquimede HMMT BMO Balkan MO JBMO
Internacional: IMO IGO SMT INMO CMO HMMT
AHSME: Book 1 Book 2 Book 3 Book 4 Book 5 Book 6 Book 7 Book 8 Book 9
Otros materiales:
Pizzazz!: Book A Book B Book C Book D Book E Pre-Algebra Algebra , REOIM

¡Genera tus propias versiones de este documento! Siempre que es posible se ofrecen las versiones editables "MS Word" de todos los materiales para facilitar su edición. Descarga en los siguientes enlaces la versión "**.doc**" de este documento:
www.toomates.net/biblioteca/AlgebraLineal01.doc → **http://www.toomates.net/biblioteca/AlgebraLineal08.doc**

¡Ayuda a mejorar! Envía cualquier duda, observación, comentario o sugerencia a **toomates@gmail.com**
¡No utilices una versión anticuada! Todos estos libros se revisan y amplían constantemente. Descarga totalmente gratis la última versión de estos documentos en los correspondientes enlaces superiores, en los que siempre encontrarás la versión más actualizada.
Consulta el **catálogo de libros** completo en **http://www.toomates.net**
Descarga toda la biblioteca Toomates en un solo archivo **Aquí** MEGA
Visita mi **Canal de Youtube**: **https://www.youtube.com/c/GerardRomo**
Visita mi **blog:** **https://toomatesbloc.blogspot.com/**

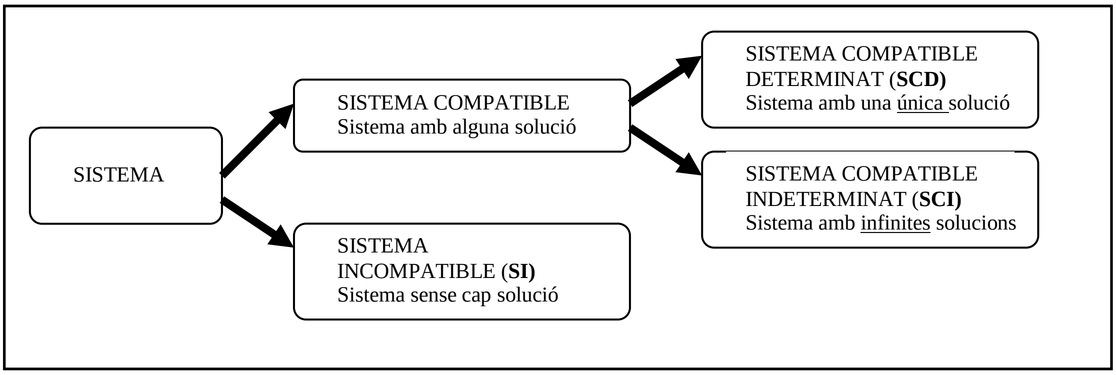
Versión de este documento: **25/11/2024**

Índex.

1 Sistemes d'equacions lineals.

1.1 El mètode de Gauss per a sistemes compatibles determinats.

Classificació dels sistemes d'equacions.



Sistemes d'equacions equivalents. Transformacions vàlides.

Direm que dos sistemes lineals

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} a'_1x+b'_1y+c'_1z=d'_1 \\ a'_2x+b'_2y+c'_2z=d'_2 \\ a'_3x+b'_3y+c'_3z=d'_3 \end{cases}$$

Són **equivalents** quan tenen les mateixes solucions.
S'anomenen **transformacions vàlides** aquelles que transformen un sistema lineal en un altre d'equivalent, és a dir, sense alterar les seves solucions. Les transformacions vàlides són les quatre següents:

a) Intercanviar l'ordre de dues files.

$$\begin{cases} 4x+3y-z=5 \\ 7x-2y+3z=-1 \\ 3x-y+z=7 \end{cases} \xRightarrow{F_1\leftrightarrow F_2} \begin{cases} 7x-2y+3z=-1 \\ 4x+3y-z=5 \\ 3x-y+z=7 \end{cases}$$

b) Intercanviar l'ordre de dues columnes:

$$\begin{cases} 4x+3y-z=5 \\ 7x-2y+3z=-1 \\ 3x-y+z=7 \end{cases} \xRightarrow{C_2\leftrightarrow C_3} \begin{cases} 4x-z+3y=5 \\ 7x+3z-2y=-1 \\ 3x+z-y=7 \end{cases}$$

c) Multiplicar una fila per un nombre <u>diferent de zero</u>:

$$\begin{cases} 4x+3y-z=5 \\ 7x-2y+3z=-1 \\ 3x-y+z=7 \end{cases} \xRightarrow{F_3\to 2F_3} \begin{cases} 4x+3y-z=5 \\ 7x-2y+3z=-1 \\ 6x-2y+2z=14 \end{cases}$$

d) Sumar o restar a una fila qualsevol altra multiplicada per un nombre:

$$\begin{cases} 4x+3y-z=5 \\ 7x-2y+3z=-1 \\ 3x-y+z=7 \end{cases} \xRightarrow{F_2\to F_2+2F_1} \begin{cases} 4x+3y-z=5 \\ 15x+4y+1z=9 \\ 3x-y+z=7 \end{cases}$$

Sistemes especials.

Sistemes sobredeterminats: Un sistema sobredeterminat és aquell que té més equacions que incògnites.

Sistemes homogenis: Un sistema d'equacions és homogeni quan tots els termes independents són zero, per exemple:

$$\begin{cases} 3x-2y+4z=0 \\ 5x+y-3z=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$$

Un sistema homogeni sempre és compatible perquè, com a mínim, sempre tindrà la solució $x=y=z=0$.

Mètode de Gauss de triangularització de sistemes.

Exercici resolt.

Resol el següent sistema: $\begin{cases} 1x & -3y & +2z & =-8 \\ 2x & +y & -3z & =5 \\ 4x & -2y & +5z & =12 \end{cases}$

Solució:

Primera part: Triangularització del sistema.
Per triangularitzar un sistema anirem fent zeros columna a columna, d'esquerra a dreta i de dalt a baix, fent servir exclusivament les transformacions vàlides de l'apartat anterior. En cada columna, marquem el coeficient diagonal com a "**pivot**". Aquest pivot ens servirà per fer zeros tots els nombres per sota d'ell. **El pivot no pot ser zero**.

PAS 1. Fer zero el coeficient de la primera columna, segona fila:

$$\begin{cases} 1x & -3y & +2z & =-8 \\ 2x & +y & -3z & =5 \\ 4x & -2y & +5z & =12 \end{cases}$$

El pivot és un 1

Hem de fer zero el 2 amb un 1. Per tant a la fila segona li restem 2 vegades la fila primera:

$$\begin{cases} 1x & -3y & +2z & =-8 \\ 2x & +y & -3z & =5 \\ 4x & -2y & +5z & =12 \end{cases} \xRightarrow{F_2 \Rightarrow F_2-2F_1} \begin{cases} 1x & -3y & +2z & =-8 \\ 0x & +7y & -7z & =21 \\ 4x & -2y & +5z & =12 \end{cases}$$

PAS 2. Fer zero el coeficient de la primera columna, tercera fila:
Hem de fer zero un 4 i tenim un 1 de pivot. Per tant, a la tercera fila li restarem quatre vegades la primera:

$$\begin{cases} 1x & -3y & +2z & =-8 \\ 0x & +7y & -7z & =21 \\ 4x & -2y & +5z & =12 \end{cases} \xRightarrow{F_3 \Rightarrow F_3-4F_1} \begin{cases} 1x & -3y & +2z & =-8 \\ 0x & +7y & -7z & =21 \\ 0x & +10y & -3z & =44 \end{cases}$$

Ara passem a la segona columna.

$$\begin{cases} 1x & -3y & +2z & =-8 \\ 0x & +7y & -7z & =21 \\ 0x & +10y & -3z & =44 \end{cases}$$

Com a pivot tenim un 7

PAS 3 Fer zero el coeficient de la segona columna, tercera fila:

Hem de fer zero un 10 i tenim un 7 com a pivot. Com ho farem? A la tercera fila multiplicada per 7 li restarem la segona per 10:

$$\begin{cases} 1x & -3y & +2z & =-8 \\ 0x & +7y & -7z & =21 \\ 0x & +10y & -3z & =44 \end{cases} \xRightarrow{F_3 \Rightarrow 7F_3 - 10F_2} \begin{cases} 1x & -3y & +2z & =-8 \\ 0x & +7y & -7z & =21 \\ 0x & \boxed{+0y} & +49z & =98 \end{cases}$$

Observa com el sistema resultant és triangular superior.

Segona part: Resolució del sistema triangular.

Amb els tres passos anteriors hem obtingut un sistema equivalent triangular superior: Tots els coeficients per sota de la diagonal són zeros.
Resolem el sistema triangular "de baix a dalt", començant per l'última equació.

PAS 4: Aïllar la z de la tercera equació:

$$0x \quad +0y \quad +49z \quad =98 \Rightarrow 49z = 98 \Rightarrow z = \frac{98}{49} = 2$$

PAS 5: Aïllar la y de la segona equació (fent servir el valor conegut de z):

$$0x \quad +7y \quad -7z \quad =21 \Rightarrow 7y - 7z = 21 \Rightarrow 7y - 7 \cdot 2 = 21$$

$$\Rightarrow 7y - 14 = 21 \Rightarrow 7y = 21 + 14 \Rightarrow 7y = 35 \Rightarrow y = \frac{35}{7} = 5$$

PAS 6: Aïllar la x de la primera equació (fent servir els valors coneguts de y i z):

$$1x \quad -3y \quad +2z \quad =-8 \Rightarrow x - 3 \cdot 5 + 2 \cdot 2 = -8 \Rightarrow x - 15 + 4 = -8$$
$$\Rightarrow x = -8 + 15 - 4 \Rightarrow x = 3$$

La solució del sistema és $x = 3,\ y = 5,\ z = 2$.

Exercici resolt.

Resol el sistema: $\begin{cases} 3x-2y+4z=25 \\ \quad\; 2y-3z=-11 \\ \qquad\quad 4z=20 \end{cases}$

Solució:

PAS 1, PAS 2, PAS 3: El sistema és ja triangular superior, no cal fer-los.

PAS 4: Aïllem la z de la tercera equació: $4z=20 \Rightarrow z=\frac{20}{4}=5$

PAS 5: Substituïm la z a la segona equació i aïllem la y:

$$2y-3z=-11 \Rightarrow 2y-3\cdot 5=-11 \Rightarrow 2y-15=-11 \Rightarrow 2y=-11+15=4$$

$$\Rightarrow y=\frac{4}{2}=2$$

PAS 6: Substituïm la y i la z a la primera equació i aïllem la x:

$$3x-2y+4z=25 \Rightarrow 3x-2\cdot 2+4\cdot 5=25 \Rightarrow 3x-4+20=25$$

$$\Rightarrow 3x=25+4-20=9 \Rightarrow x=\frac{9}{3}=3$$

La única solució del sistema és, doncs, $x=5,\ y=2,\ z=3$

1.1.1

Resol els següents sistemes d'equacions:

a) $\begin{cases} x-5y+4z=6 \\ x-4y+2z=2 \\ x-3y-z=-6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+3y+5z=-5 \\ x+y+3z=3 \\ -x-5y-3z=9 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -x-4y-2z=3 \\ -4x-y-5z=-3 \\ x+2y+3z=6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x-2y+3z=9 \\ -3x+4y+3z=1 \\ 2x-3y-2z=2 \end{cases}$ e) $\begin{cases} -2x+3y-4z=6 \\ -3x+2y-3z=-2 \\ x+y+4z=-2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} -2x-y+z=6 \\ 5x+3y+z=1 \\ -x+3y-5z=-5 \end{cases}$

g) $\begin{cases} -3x+y-5z=2 \\ 4x-y-2z=4 \\ -5x+y+z=-2 \end{cases}$ h) $\begin{cases} -3x-4y-3z=-5 \\ -4x-3y-5z=9 \\ 5x+2y-z=9 \end{cases}$

1.1.2

Resol els següents sistemes sobredeterminats :

a) $\begin{cases} 3x-2y+z=19 \\ 5x+y-3z=5 \\ 2x+4y+z=-8 \\ 4x-3y+2z=28 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+3y-z=0 \\ 5x-2y+3z=-1 \\ -3x+y-z=4 \\ 4x+3y+2z=11 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x+2y-z=8 \\ 5x-y+2z=11 \\ 2x+4y-3z=7 \\ 4x+5y-2z=8 \end{cases}$

1.1.3

Resol els següents sistemes:

a) $\begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ 2x - y - z = 6 \\ 3x - 2y + z = 10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x + y - z = 4 \\ x - 8y + 3z = -6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 3x + y - 2z = -3 \\ 5x - 3y + 3z = 9 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ 3x + 2y - 4z = 5 \\ -x + 4y - 2z = -3 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 5z = 11 \\ x - 5y + 6z = 29 \end{cases}$

1.1.4

Resoleu el sistema següent:

$$\begin{cases} x + 2y - 5z = -1 \\ -3x + y - 2z = 7 \\ 2x - 3y + z = -12 \end{cases}$$

PAU CAT CCSS SET 2007 S3.2 (Solució: PAUCCSS pàg. 212)

1.1.5

Resoleu el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 9 \\ x - y + z = -1 \end{cases}$$

PAU CAT CCSS JUNY 2005 S4.1 (Solució: PAUCCSS pàg. 146)

1.1.6 Exercici del Youtube

Resol el sistema

$$\begin{cases} 2x - 5y + 3z = 4 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x + y + 7z = 11 \end{cases}$$

Solució: https://youtu.be/Ix9hDqfNuIA (Susi Profe)

1.1.7 Exercici del Youtube (en anglès)

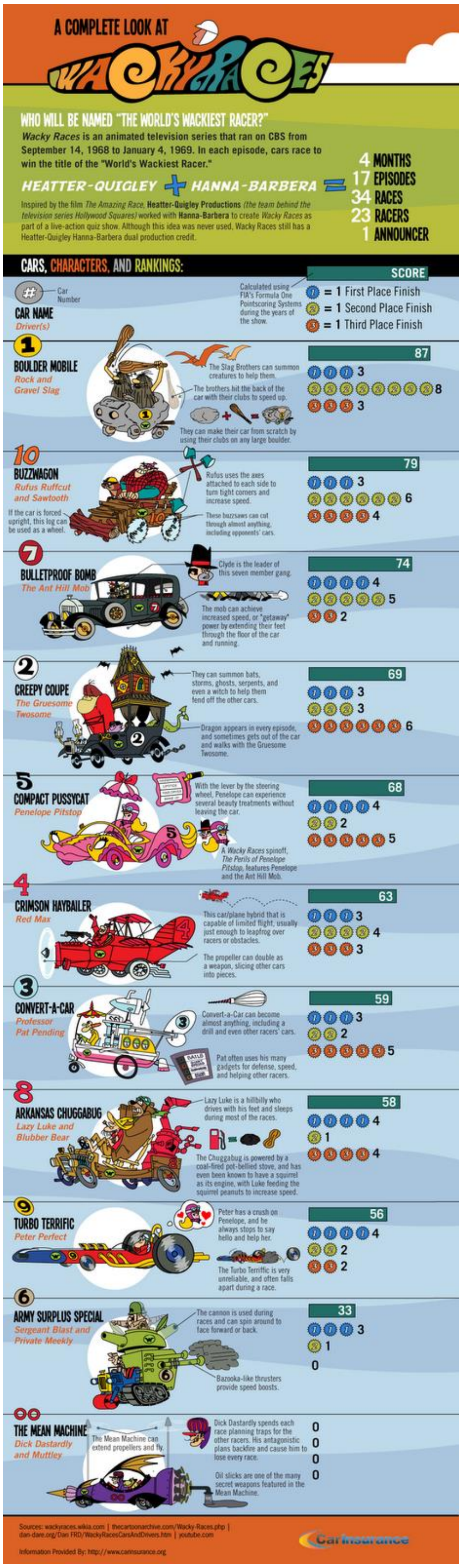
Resol el següent sistema, de forma matricial:

$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ 3x + 2z = 19 \\ 3x + 2y + 4z = 27 \end{cases}$$

Solució: https://youtu.be/1IHsX1lgpRI (mathbff)

1.1.7

La classificació de los “**AutosLocos**” (Exemple de sistema sobredeterminat)



Amb la informació de la imatge, determina els punts que s’obtenen amb una medalla:

Blava  (primera posició),

Groga  (segona posició)

Taronja  (tercera posició).

1.1.9 Exercici del Youtube

Resol el següent sistema (SCD)

$$\begin{cases} x-2y=2 \\ x-y+z=1 \\ x+y+z=3 \end{cases}$$

Solució: https://youtu.be/k051qo8Gsm4 (Xavi Mates)

https://francis.naukas.com/2009/07/17/la-tortuosa-historia-del-metodo-de-eliminacion-de-gauss-para-resolver-sistemas-lineales/

1.1.10 Exercici del Youtube

Resol el següent sistema:

a) $\begin{cases} 2x+y+3z=16 \\ x+y-2z=-5 \\ 3x+2y-z=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x-y+z=3 \\ 2x-y+z=-2 \\ 2x-2y+2z=1 \end{cases}$ (SCI)

Solució: https://youtu.be/kKK1iLzbFDw (IESCampus IESCampus)

1.1.11

Resolució de sistemes.

a) $\begin{cases} 3x-2y+z=9 \\ x+y+2z=8 \\ -2x-y+5z=-5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+y-2z=-8 \\ 2x+2y+3z=0 \\ x+y-3z=-9 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x+y+z=8 \\ 5x-2y+3z=5 \\ -2x+y-4z=-7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x+y+z=-4 \\ 3x+5y+z=-1 \\ 5x+4y-z=2 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x+y+2z=2 \\ 3x+y+z=-3 \\ 3x-4y-z=9 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 4x+3y+z=-2 \\ 5x+4y+z=-3 \\ -5x-5y+z=3 \end{cases}$

1.1.12

Resolució de sistemes.

a) $\begin{cases} -7x+2y-3z=-5 \\ 4x+5y+8z=14 \\ x+5y+6z=9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 6x+3y-8z=-11 \\ x+10y+5z=-5 \\ 2x-2y-7z=-12 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 9x+7y-2z=-5 \\ 2x-4y-9z=7 \\ -7x-y+z=-10 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 9x+8y+5z=-9 \\ -9x-4y+z=3 \\ -8x+3y+10z=-5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} -6x+2y+z=-12 \\ 7x-2y-9z=1 \\ 8x-5y+5z=10 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 9x-5y-4z=1 \\ -x-9y+z=14 \\ -2x-10y+4z=-6 \end{cases}$

1.1.13 Exercici del Youtube

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 7 \\ x + 4y + z = 12 \\ -x + 3y - 5z = -2 \end{cases}$$

Solució: https://www.youtube.com/watch?v=5wK7R7vWUSc (Píldoras matemáticas)

1.1.14 Exercici del Youtube

a) $\begin{cases} 2x + y + z = 6 \\ 3x - y - 3z = -2 \\ x + y - 2z = -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = -1 \\ x + 3z = -5 \\ 3x + 2y - z = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - 3y - z = 9 \\ 3x - 4y - 4z = 8 \\ 4x + 2y - z = 12 \end{cases}$

Solució: https://www.youtube.com/watch?v=OATgDPpHkTk (Píldoras matemáticas)

1.1.15 Exercici del Youtube

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 7 \\ x + 2y - z = -3 \\ -3x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

Solució: https://youtu.be/1Fi8G46FyMM (Joan Miquel Villaró)

1.1.16 Exercici del Youtube

$$\begin{cases} 3x - 2y + 5z = -1 \\ x + y - 2z = 3 \\ -2x + y - 4z = 0 \end{cases}$$

Solució: https://youtu.be/yNdRgloaxH0 (Gominol Tree Matemáticas)

1.1.17 Exercici del Youtube

$$\begin{cases} x + y - z = 9 \\ y + 3z = 3 \\ -x - 2z = 2 \end{cases}$$

Solució: https://youtu.be/ZjO7LZJPT8w (Matemáticas con Juan)

1.1.18 Exercici del Youtube

$$\begin{cases} x + 2y + z = 7 \\ 3x + y + z = 5 \\ 2x + 3y - z = 3 \end{cases}$$

Solució: https://youtu.be/iMCkKatIAw8 (MatematicasprofeAlex)

Els sistemes 3x3 s'apliquen a la determinació de funcions parabòliques:
Apartat 4.4 del llibre de Funcions:

http://www.toomates.net/biblioteca/Funcions.pdf

Els sistemes 3x3 s'apliquen a la resolució de funcions parametritzades amb derivades.
Apartat 4.10 del llibre de Càlcul:

http://www.toomates.net/biblioteca/Calcul.pdf

1.2 Sistemes compatibles indeterminats.

El mètode de Gauss serveix també per resoldre sistemes compatibles indeterminats. Veurem que, amb aquest mètode, el conjunt de solucions quedarà en funció d'una de les incògnites, normalment la z, i per això aquest mètode es diu "**mètode de la z lliure**".

1.2.1 Exercici resolt.

Resol el sistema: $\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 5 \\ \quad 3y - 2z = 7 \\ \qquad 0z = 0 \end{cases}$

Solució:

PAS 1, PAS 2, PAS 3: El sistema és ja triangular superior, no cal fer-los.

PAS 4:

La tercera equació no condiciona en absolut el valor de z: Qualsevol nombre multiplicat per 0 dóna 0. Per tant, **direm que la z és lliure**. La resta de incògnites dependran del valor que prengui la z:

PAS 5:

Aïllem la y de la segona equació:

$$3y - 2z = 7 \Rightarrow 3y = 7 + 2z \Rightarrow y = \frac{7+2z}{3}$$

PAS 6:

Aïllem la x de la primer equació:

$$2x - 3y + 4z = 5 \Rightarrow 2x - 3\left(\frac{7+2z}{3}\right) + 4z = 5 \Rightarrow 2x - (7+2z) + 4z = 5$$

$$\Rightarrow 2x - 7 - 2z + 4z = 5 \Rightarrow 2x - 7 + 2z = 5 \Rightarrow 2x = 5 + 7 - 2z \Rightarrow 2x = 12 - 2z$$

$$\Rightarrow x = \frac{12-2z}{2} = \frac{2(6-z)}{2} = 6 - z$$

Aquest sistema té infinites solucions, perquè depenen d'una variable z que és lliure:

$$\begin{cases} x = 6 - z \\ y = \dfrac{7+2z}{3} \\ z = z \end{cases}$$

En efecte, anem donant valors a z i per obtenir valors per a y i x:

$z = 0 \rightarrow y = 5/3$, $x = 3$

$z = 1 \rightarrow y = 3$, $x = 5$

$z = 2 \rightarrow y = 11/3$, $x = 4$

$z = 3 \rightarrow y = 13/3$, $x = 3$

$z = -1 \rightarrow y = 5/3$, $x = 7$

... per cada valor de z obtenim una solució diferent del sistema...

1.2.2 Exercici resolt.

Resol el sistema: $\begin{cases} x + 2y - 3z = 16 \\ 6x - y - 18z = -8 \\ -4x + 3y + 12z = 24 \end{cases}$

Solució:

Després d'aplicar Gauss resulta: $\begin{cases} x + 2y - 3z = 16 \\ \quad -13y \quad = -104 \\ \qquad\quad 0 = 0 \end{cases}$

Hem d'eliminar l'última fila, que no aporta cap informació: $\begin{cases} x + 2y - 3z = 16 \\ \quad -13y \quad = -104 \end{cases}$

Fem la z lliure:

Aïllem y i veiem que sí està determinada: $-13y = -104 \Rightarrow y = \dfrac{-104}{-13} = 8$

Aïllem la x i veiem que depèn del valor de z:

$$x + 2y - 3z = 16 \Rightarrow x + 2 \cdot 8 - 3z = 16 \Rightarrow x = 16 - 16 + 3z = 3z$$

Les infinites solucions del sistema són de la forma: $\begin{cases} x = 3z \\ y = 8 \\ z \text{ } lliure \end{cases}$

Només cal anar donant valors a z per obtenir solucions diferents:

$$z = 1 \Rightarrow \{x = 3, y = 8, z = 1\}$$
$$z = 2 \Rightarrow \{x = 6, y = 8, z = 2\}$$
$$z = 3 \Rightarrow \{x = 9, y = 8, z = 3\}$$
...

Es tracta d'un sistema amb infinites solucions, és a dir, un Sistema Compatible Indeterminat (SCI).

1.2.3 Exercici del Youtube

Resol el següent sistema, amb el mètode de la z lliure:

$$\begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ 2x - y - z = 6 \\ 3x - 2y + 2z = 10 \end{cases}$$

Solució: https://youtu.be/ERUAPI-jrH0 (Mates con Andrés)

1.2.4 Exercici del Youtube

Intenta resoldre el següent sistema d'equacions:

$$\begin{cases} 4x + y + 2z = 0 \\ 2x + y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

Solució: https://youtu.be/U7XBujtstUU

1.2.5 Exercici del Youtube

Resol el sistema següent:

$$\begin{cases} x - 3y + 7z = 10 \\ 5x - y + z = 8 \\ x + 4y - 10z = -11 \end{cases}$$

Solució: https://youtu.be/3S7Lx7c9N8Q (Susi Profe)

1.2.6 Exercici del Youtube

Resol el següent sistema (SCI)

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ -x - 2z = 2 \\ 2x - 2y + 4z = 2 \end{cases}$$

Solució: https://youtu.be/DpNvT2Cz7ys (Xavi Mates)

1.2.7 Exercici del Youtube

Resol el següent sistema (SI)

$$\begin{cases} 2x - y + z = 5 \\ -x + 2y = 3 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$$

Solució: https://youtu.be/7QGZH88-ms4 (Xavi Mates)

1.2.8

Considereu el sistema

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ -x + 4y - 5z = -8 \end{cases} .$$

a) Comproveu que té infinites solucions. Determineu-les.
b) Determineu, si és possible, una solució en què la suma de les tres incògnites sigui 5.

PAU CAT CCSS JUNY 2011 4.5

1.2.9

Donat el sistema d'equacions següent:

$$\left.\begin{array}{l} x+5y+2z=2 \\ 2x+4y+z=4 \\ x-y-z=2 \end{array}\right\}$$

a) Determineu-ne la solució general, en funció de z.
b) Calculeu la solució particular segons la qual z = 2.

PAU CAT CCSS JUNY 2010 5.1

1.2.10

Considereu el sistema d'equacions següent:

$$\left.\begin{array}{l} 3x-y+2z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+3y=0 \end{array}\right\}$$

a) Expliqueu, raonadament, quantes solucions té.
b) Trobeu una solució amb z= 5.

PAU CAT CCSS SET 2009 1.4

1.2.11

Discutiu i, si escau, resoleu el sistema següent:

$$\begin{cases} 4x+6y-8z=2 \\ 6x+9y-12z=3 \\ x+2y+z=10 \end{cases}$$

PAU CAT CCSS SET 2004 5.4

1.2.12

Resol el següent sistema:

$$\begin{cases} 2x+3z=-1 \\ 3x-2y-2z=5 \\ 5x+2y+14z=-9 \end{cases}$$

1.2.13

En una botiga, per comprar 2 jaquetes i una brusa ens cobren 200 €. Si tornem a la botiga i comprem una jaqueta, uns pantalons i tornem la brusa, ens cobren 100 €. Expressa el preu dels pantalons i de les bruses en funció del de les jaquetes.

1.2.14

Tres nombres, x, y i z, compleixen dues condicions: que el primer és la suma dels altres dos, i que el segon és la suma de la meitat del primer i el doble del tercer.

a) Comproveu que el càlcul dels tres nombres, x, y i z, té una infinitat de solucions.

b) Trobeu una expressió general de les solucions.

PAU CAT TEC SET 2016 1.2

1.2.15

En Joan ha comprat a la papereria 5 bolígrafs, 3 llibretes i 2 llapis, i ha pagat en total 13.80€. La Paula s'ha gastat en total 14,50€ per la compra de 3 bolígrafs, 4 llibretes i 3 llapis, i en Ramir, 13,10€ per 7 bolígrafs, 2 llibretes i un llapis. Es pot calcular el preu de cada article?

1.2.16 Exercici del Youtube

$$\begin{cases} x+y-2z=-5 \\ 2x+y+z=6 \\ 3x+2y-z=1 \end{cases}$$

Solució: https://www.youtube.com/watch?v=woEbHHCP2Oc (Píldoras matemáticas)

1.2.17 Exercici del Youtube

a) $\begin{cases} 6x+2y+z=1 \\ x+3y+z=2 \\ 5x-y=-1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x+z=3 \\ 2y+2z=0 \\ x+3y+2z=-3 \end{cases}$

Solució: https://www.youtube.com/watch?v=Y-RzqorGr-0 (Píldoras matemáticas)

1.2.18 Exercici del Youtube

Resol els següents sistemes:

a) $\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 3x+y-z=0 \\ x-3y-2z=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 3x+y-z=0 \\ 5x-3y+z=0 \end{cases}$

Solució: https://youtu.be/4lbQZC78imc (Mates con Andrés)

Els Sistemes Compatibles Indeterminats es poden interpretar des d'un punt de vista geomètric com a intersecció de dos plans en l'espai.
Vegeu l'apartat 6.2 del Llibre de Geometria Lineal.
El "mètode de la z lliure" és el mètode per trobar l'equació paramètrica de la recta determinada per la intersecció de dos plans.
Vegeu l'apartat 2.6 del Llibre de Geometria Lineal

1.3 Estudi de sistemes amb el mètode de Gauss.

Estudiar o discutir un sistema consisteix a esbrinar el nombre de solucions que tindrà, és a dir, classificar-lo dins d'una de les següents categories: Sistema compatible determinat (1 solució), sistema compatible indeterminat (infinites solucions) o sistema incompatible (sense cap solució).

El mètode més simple per a estudiar un sistema és intentar resoldre'l i veure què passa. Als apartats anteriors hem vist què passa quan apliquem el mètode de Gauss a un sistema compatible determinat o compatible indeterminat. Vegem ara què passa quan apliquem el mètode de Gauss a un sistema incompatible:

Exercici resolt.

Resol el sistema: $\begin{cases} 3x-2y+z=1 \\ \quad 2y-3z=4 \\ \qquad 0z=5 \end{cases}$

Solució:
La última equació és una incompatibilitat: És impossible que un nombre multiplicat per zero doni 5. Direm que aquest sistema és incompatible, i no té cap sentit intentar aïllar la resta d'incògnites.

Teorema de Rouché-Fröbenius (Versió simplificada per sistemes triangulars)

Apliquem el mètode de Gauss al sistema i observem com queda el sistema triangular superior equivalent.

La clau la tenim a la tercera equació:

Si és com $3z=5$ llavors és determinat → SCD

Fins i tot si hi ha a la dreta un zero: $3z=0 \Rightarrow z=\dfrac{0}{3}=0$

Si és com $0z=5$ llavors és incompatible→ SI

Si és $0z=0$ llavors és indeterminat→ SCI

Compatible Determinat (S.C.D.)	$\left(\begin{array}{ccc\|c} \# & * & * & * \\ & \# & * & * \\ & & \# & * \end{array}\right)$
Compatible Indeterminat (S.C.I.)	$\left(\begin{array}{ccc\|c} \# & * & * & * \\ & \# & * & * \\ & & 0 & 0 \end{array}\right)$ o també $\left(\begin{array}{ccc\|c} \# & * & * & * \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \end{array}\right)$
Incompatible (S.I.)	$\left(\begin{array}{ccc\|c} \# & * & * & * \\ & \# & * & * \\ & & 0 & \# \end{array}\right)$
On: # vol dir qualsevol nombre menys el zero i * vol dir qualsevol nombre, inclòs el zero.	

1.3.1

(Un de cada) Estudia i resol en el cas que sigui compatible:

a) $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+3y+z=-2 \\ 5x-y+2z=4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y+3z=2 \\ 2x+3y+4z=1 \\ -2x-y-8z=-7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+2y+4z=3 \\ 2x+4y+8z=1 \\ -y+z=-2 \end{cases}$

1.3.2

(Un de cada) Estudia i resol en el cas que sigui compatible:

a) $\begin{cases} x-2y=1 \\ 2x+5y+3z=-1 \\ 8x-4y-z=-6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x+2y+8z=4 \\ x+y+z=1 \\ 2x+3y-3z=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+5y-6z=11 \\ x+y-2z=3 \\ 2x+8y-8z=15 \end{cases}$

1.4 Millores al mètode de Gauss.

Simplificació d'equacions.

Observa la segona equació del següent sistema:

$$\begin{cases} 1x & -3y & +2z & =-8 \\ 0x & +7y & -7z & =21 \\ 0x & +10y & -3z & =44 \end{cases}$$

Es pot simplificar dividint-la per 7:

$$\begin{cases} 1x & -3y & +2z & =-8 \\ 0x & +7y & -7z & =21 \\ 0x & +10y & -3z & =44 \end{cases} \overset{F_2 \Rightarrow F_2/7}{\Rightarrow} \begin{cases} 1x & -3y & +2z & =-8 \\ 0x & +1y & -1z & =3 \\ 0x & +10y & -3z & =44 \end{cases}$$

Intenta simplificar les equacions sempre que puguis. Recorda que has de dividir tots els nombres de la fila, incloent-hi el terme independent.

Pivotatge.

El mètode de Gauss és molt més fàcil si el pivot és 1 (però no és imprescindible).

Abans de començar podem intentar intercanviar files i columnes per moure un coeficient 1 fins a la cantonada superior esquerra del sistema.

Pivotatge de files:

Suposem que hem de resoldre el sistema $\begin{cases} 3x & +2y & -5z & =39 \\ 2x & -4y & +5z & =-28 \\ x & +3y & -2z & =30 \end{cases}$

Inicialment, el pivot és un 3, però podem intercanviar les files 1 i 3:

$$\begin{cases} 3x & +2y & -5z & =39 \\ 2x & -4y & +5z & =-28 \\ x & +3y & -2z & =30 \end{cases} \overset{F_1 \Leftrightarrow F_3}{\Rightarrow} \begin{cases} x & +3y & -2z & =30 \\ 2x & -4y & +5z & =-28 \\ 3x & +2y & -5z & =39 \end{cases}$$

Pivotatge de columnes:

Suposem que hem de resoldre el sistema $\begin{cases} 3x & +2y & +z & =-1 \\ 2x & -4y & +5z & =11 \\ 5x & -3y & +2z & =17 \end{cases}$

L'únic 1 que hi ha al sistema està a la primera fila però a la tercera columna. Afortunadament, l'intercanvi de columnes també és una transformació vàlida:

$$\begin{cases} 3x & +2y & +z & =-1 \\ 2x & -4y & +5z & =11 \\ 5x & -3y & +2z & =17 \end{cases} \overset{C_1 \Leftrightarrow C_3}{\Rightarrow} \begin{cases} z & +2y & +3x & =-1 \\ 5z & -4y & +2x & =11 \\ 2z & -3y & +5x & =17 \end{cases}$$

Atenció! No es pot pivotar amb la columna de termes independents (la de la dreta, la que no porta lletres)

Pivotatge doble.

Podem combinar el pivotatge de files amb el pivotatge de columnes per moure qualsevol 1 fins a la cantonada superior esquerra del sistema. Per exemple, al sistema següent:

$$\begin{cases} 2x & -3y & -2z & =-9 \\ -3x & -2y & +z & =3 \\ 5x & -2y & +3z & =-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x & -3y & -2z & =-9 \\ -3x & -2y & +z & =3 \\ 5x & -2y & +3z & =-1 \end{cases} \overset{C_1 \Leftrightarrow C_3}{\Rightarrow} \begin{cases} -2z & -3y & +2x & =-9 \\ z & -2y & -3x & =3 \\ 3z & -2y & +5x & =-1 \end{cases} \overset{F_2 \Leftrightarrow F_1}{\Rightarrow} \begin{cases} z & -2y & -3x & =3 \\ -2z & -3y & +2x & =-9 \\ 3z & -2y & +5x & =-1 \end{cases}$$

Solució: $x=-1,\ y=1,\ z=2$

Representació matricial d'un sistema.

El mètode de Gauss és molt mecànic. De fet, les lletres només ens fan nosa i podríem fet tots els passos sense escriure-les.

$$\begin{cases} -2x & +3y & & =2 \\ 3y & +y & -2z & =4 \\ 5x & -2y & +z & =3 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \\ 5 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Observa que la tercera i quarta columna estan separades per una línia vertical. Aquesta línia ens indica que la quarta columna, la dels termes independents, és especial, i no es pot intercanviar amb les altres.

Recorda que has d'escriure tots els coeficients zeros:

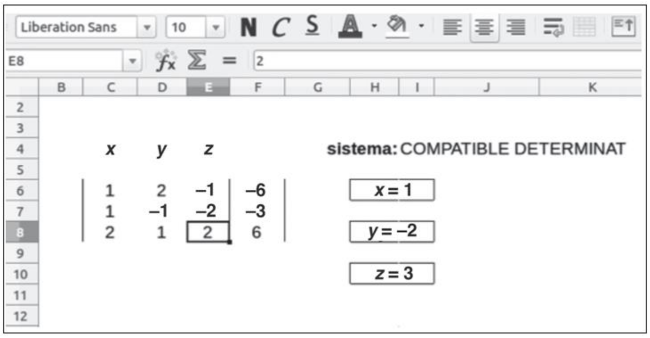
Si no hi ha lletra → el coeficient és 0.

Si ha lletra però no hi ha coeficient → el coeficient és 1.

1.5 Problemes PAU amb resolució de sistemes 3x3.

1.5.1

Uns estudiants de batxillerat han programat un full de càlcul com el de la figura següent que dona la solució d'un sistema d'equacions compatible determinat d'una manera automàtica:



a) Escriviu el sistema i comproveu que els valors proposats com a solució són correctes.
b) Quin valor s'hauria de posar en lloc del 2 que està emmarcat en la imatge, corresponent a la cel·la E8 (a_{33} de la matriu de coeficients), perquè el sistema fos incompatible?

PAU CAT TEC JUNY 2018 1.6

1.5.3

Sabem que el vector (2, 1, –1) és una solució del sistema

$$\left.\begin{aligned} ax+by+cz&=a+c \\ bx-y+bz&=a-b-c \\ cx-by+2z&=b \end{aligned}\right\}$$

Calculeu el valor dels paràmetres a, b i c.

PAU CAT TEC JUNY 2013 4.1

1.5.4

Considereu un sistema qualsevol de dues equacions amb tres incògnites. Responeu raonadament a les qüestions següents:
a) És possible que el sistema considerat sigui compatible determinat?
b) Pot ser incompatible?

PAU CAT TEC JUNY 2010 5.1

1.5.5

En la resolució pel mètode de Gauss d'un sistema de tres equacions amb tres incògnites ens hem trobat amb la matriu següent:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 6 \end{array}\right)$$

a) Expliqueu, raonadament, quin és el caràcter del sistema inicial.
b) Si és compatible, trobeu-ne la solució.

PAU CAT TEC JUNY 2009 4.4

1.5.6

Considereu un sistema de dues equacions amb tres incògnites.
a) Pot ser incompatible?
b) Pot ser compatible determinat?
Raoneu les respostes.

PAU CAT TEC SET 2008 4.3

1.5.7

En un sistema hi ha, entre d'altres, aquestes dues equacions:

$$x + 2y - 3z = 5 \text{ i } 2x + 4y - 6z = -2$$

Què podeu dir de les solucions del sistema?

PAU CAT TEC SET 2005 3.1

1.5.8

La matriu ampliada d'un sistema d'equacions lineals, un cop reduïda pel mètode de Gauss, és

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) El sistema, és compatible o incompatible? Raoneu la resposta.
b) En cas que sigui compatible resoleu-lo.

PAU CAT TEC JUNY 2004 1.1

1.5.9

Considereu el sistema d'equacions

$$\left.\begin{array}{l} ax + y + z = a + 1 \\ 2x - y + az = a + 2 \\ x - y + z = 4 \end{array}\right\}$$

on a és un paràmetre.
Si x = 1, y = –1, z = 2 és una solució, quin és el valor del paràmetre a?

PAU CAT TEC JUNY 2003 5.4

1.5.10

Donat el sistema d'equacions

$$\left.\begin{array}{l} 3x - 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + z = 4 \end{array}\right\}$$

a) Afegiu-hi una equació lineal de manera que el sistema resultant sigui incompatible.
b) Afegiu-hi una equació lineal de manera que el sistema resultant sigui compatible indeterminat. Resoleu el sistema que s'obtingui.

PAU CAT TEC JUNY 2000 1.3

1.5.11

a) La matriu ampliada d'un sistema de tres equacions amb tres incògnites és

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Justifiqueu, sense resoldre'l, si el sistema és incompatible, compatible indeterminat o determinat.

b) Considereu ara la matriu d'un altre sistema de tres equacions amb tres incògnites:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Justifiqueu si és incompatible o compatible i, en aquest darrer cas, resoleu-lo.

PAU CAT CCSS SET 2016 1.4

1.5.12

Sigui el sistema d'equacions

$$\left.\begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ 3x + 4y - 5z = 6 \\ x - y = 2 \end{array}\right\}$$

a) Justifiqueu si és compatible determinat.
b) Resoleu el sistema format per les dues primeres equacions.

PAU CAT CCSS JUNY 2016 3.3

1.5.13

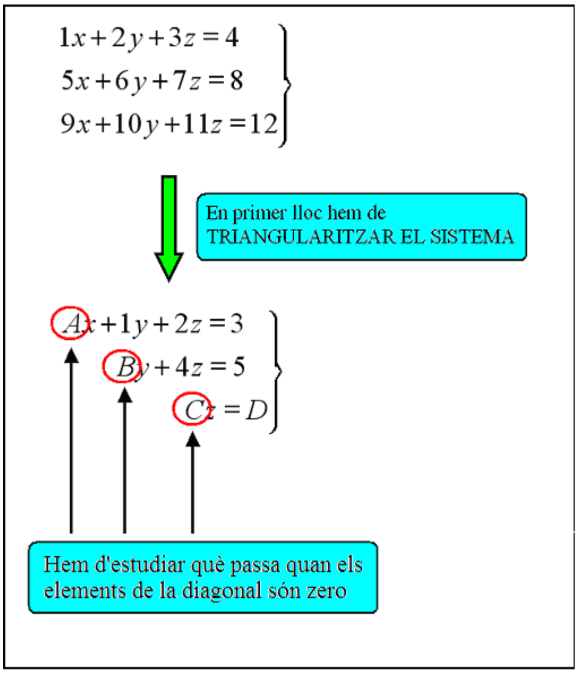
Digueu si un sistema de dues equacions amb tres incògnites pot ser incompatible. Justifiqueu la resposta i, si escau, exemplifiqueu-ho.

1.6 Estudi de sistemes que depenen de paràmetres amb Gauss.

Un sistema depenent d'un o més paràmetres és un sistema d'equacions en el qual algun coeficient s'ha *amagat* darrera d'una lletra.

Per estudiar (discutir) un sistema primer el triangularitzem i després:

Si els elements de la diagonal no són zero: SCD
Si algun element de la diagonal és zero: S'ha d'estudiar (SCI o SI).



1.6.1 Exercici del Youtube

Discutiu el sistema

$$\begin{cases} 6x+3y+3kz=3 \\ kx+2y-z=-2 \\ y-3z=-3 \end{cases}$$

Solució: https://youtu.be/klWAnkzOIbo (Unicoos)

1.6.2 Exercici del Youtube

Discutiu el sistema

$$\begin{cases} x+y+kz=1 \\ kx+(k-1)y+z=k \\ x+y+z=k+1 \end{cases}$$

En aquest problema es demana resoldre el sistema en funció de k, que és un bon exercici d'àlgebra.

Solució: https://youtu.be/RGchECmeIFk (Mates con Andrés)

1.6.3 Exercici del Youtube

Estudia, amb el mètode de Gauss, el següent sistema en funció dels valors del paràmetre k:

$$\left.\begin{array}{l} x-2y+z=1 \\ 2x+y-3z=2 \\ kx-y-2z=3 \end{array}\right\}$$

Solució: https://youtu.be/sWoXIUJ7hyw (Matemática con el Profe Sergio)

1.6.4 Exercici del Youtube

Estudia, amb el mètode de Gauss, el següent sistema en funció dels valors del paràmetre k:

$$\left.\begin{array}{l} x-2y-z=-2 \\ -2x-az=2 \\ y+az=-2 \end{array}\right\}$$

b) Resol el sistema per a $a=4$.

Solució: https://youtu.be/i372RSV1zuw (No todo es matemáticas)

El mètode de Gauss no és una bona tàctica per a estudiar sistemes molt farcits de paràmetres. És molt més pràctic el mètode del determinant, que s'estudiarà a l'apartat 1.9

1.6.5

Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real p:

$$\begin{cases} px+y+z=2 \\ 2x+py+p^2z=1 \\ 2x+y+z=2 \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre p.
b) Resoleu, si és possible, el sistema per al cas p = 2.

PAU CAT TEC JUNY 2021 2.2 (Solució: PAUTEC pàg. 650)

1.6.6

Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real a:

$$\begin{cases} x+2y+az=8 \\ 2x+y-az=1 \\ 3x-3az=1 \end{cases}$$

a) Comproveu que, per a qualsevol valor del paràmetre a, el sistema d'equacions lineals no té solució.
b) Interpreteu geomètricament el sistema d'equacions lineals. Feu un dibuix esquemàtic que representi la posició relativa dels tres plans.

PAU CAT TEC JUNY 2021 5.5 (Solució: PAUTEC pàg. 667)

1.6.7

Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real k:

$$\begin{cases} x + ky + z = 3 + k \\ kx + y + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre k.
b) Resoleu, si és possible, el sistema per al cas k = 1, i feu-ne una interpretació geomètrica.

PAU CAT TEC SET 2021 1.1 (Solució: PAUTEC pàg. 688)

1.6.8

Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real k:

$$\begin{cases} 5x + y + 4z = 19 \\ kx + 2y + 8z = 28 \\ 5x + y - kz = 23 + k \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre k.
b) Resoleu, si és possible, el sistema per al cas k = 0.

PAU CAT TEC JUNY 2020 #2

1.6.9

Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real k:

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = -1 \\ x + k^2 y + 3z = 2k \\ 3x + 7y + 7z = k - 3 \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre k.
b) Resoleu el sistema per al cas k = –1.

PAU CAT TEC JUNY 2019 1.2 (Solució: PAUTEC Pàg. 530)

1.6.10

Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real a:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y - z = 1 \\ 2x + ay = 2a \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre a.
b) Resoleu el sistema per al cas a = 1.

PAU CAT TEC SET 2018 3.2

1.6.11

Considereu el sistema d'equacions lineals següent:

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+y-z=1 \\ 2x+ay=2a \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre real a.
b) Resoleu el sistema per al cas a = 2.

PAU CAT TEC SET 2017 2.3

1.6.12

Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre λ:

$$\begin{cases} \lambda x+y-z=0 \\ y+z=10 \\ 2\lambda x-y+5\lambda z=30 \end{cases}$$

a) Estudieu per a quins valors del paràmetre λ el sistema és incompatible.
b) Resoleu el sistema per al cas λ = 1.

PAU CAT TEC JUNY 2017 1.1

1.6.13

Sabem que el sistema d'equacions lineals següent té una única solució:

$$\begin{cases} x+a\,y=1 \\ x+a\,z=1 \\ y+z=a \end{cases}$$

a) Comproveu que a ≠ 0.
b) Trobeu la solució del sistema en funció del paràmetre a.

PAU CAT TEC JUNY 2017 1.4

1.6.14

Considereu el sistema d'equacions lineals següent:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+4y+4z=4k-7 \\ 2x-ky=-1 \\ -2x=k+1 \end{array}\right\}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre real k.
b) Resoleu el sistema per al cas k = 0.

PAU CAT TEC JUNY 2016 3.1

1.6.15

Considereu el sistema d'equacions lineals següent:

$$\left.\begin{array}{l} -3x+2y+3z=0 \\ (a-2)y-3z=0 \\ -x-y+(-a-3)z=0 \end{array}\right\}$$

a) Calculeu per a quins valors del paràmetre a el sistema té més d'una solució.
b) Resoleu el sistema per al cas a = –3.

PAU CAT TEC JUNY 2015 2.1

1.6.16

La matriu de coeficients d'un sistema d'equacions lineals homogeni és

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1-a & 0 \\ 4 & 1 & 2a+2 \end{pmatrix}$$

a) Per a quins valors del paràmetre a el sistema té una sola solució? Quina és aquesta solució única?
b) Resoleu el sistema si a=2.

PAU CAT TEC JUNY 2013 5.2

1.6.17

Considereu el sistema d'equacions lineals següent:

$$\left.\begin{array}{l} x+y-3z=2 \\ 2x+ay-5z=2a+3 \\ 2x-3y+(a-2)z=9 \end{array}\right\}$$

a) Calculeu el valor o els valors del paràmetre a per al qual o per als quals el sistema és compatible indeterminat.
b) Quantes solucions té aquest sistema quan a=−3?

PAU CAT TEC SET 2012 4.3

1.6.18

Analitzeu, segons els valors del paràmetre k, el caràcter (és a dir, si és compatible o no i si és determinat o no) del sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} 2x+y-z=k-4 \\ (k-6)y+3z=0 \\ (k+1)x+2y=3 \end{cases}$$

PAU CAT TEC JUNY 2011 4.4

1.6.19

Donat el sistema d'equacions lineals :

$$\left.\begin{array}{r} x+2y-z=-1 \\ 2x+y+z=4 \\ x-y+(p-3)z=5 \end{array}\right\}$$

a) Estudieu-ne el caràcter (és a dir, si és compatible o no i si és determinat o no) en funció del paràmetre p.
b) Comproveu que si p≠5 la solució del sistema no depèn del valor d'aquest paràmetre.

PAU CAT TEC JUNY 2010 1.2

1.6.20

Hem escalonat la matriu ampliada d'un sistema d'equacions lineals, A·X=b, i hem obtingut:

$$\left(A \mid b\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & a+2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a-1 & 3 \end{array}\right)$$

a) Discutiu aquest sistema en funció del paràmetre a.
b) Resoleu-lo quan a= 2.

PAU CAT TEC JUNY 2010 4.4

1.6.21

Considereu el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} 2x + y - (a-1)z = 4 \\ x - 2y + z = -4 \\ 4x - (a+1)y + z = -2a \end{cases}$$

a) Discutiu-lo en funció del paràmetre a.
b) Resoleu-lo quan sigui compatible indeterminat.
c) En el cas de l'apartat anterior, trobeu una solució del sistema en què x, y i z tinguin valors enters.

PAU CAT TEC JUNY 2008 5.5 (Problema)

1.6.22

Discutiu el sistema següent en funció del paràmetre p.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 5 \\ 2x + py + 2z = 10 \\ px + 6y + 3z = 12 \end{cases}$$

PAU CAT TEC JUNY 2007 1.6 (Primera part)

1.6.23

Esbrineu si el sistema següent pot ser compatible indeterminat per a algun valor del paràmetre m.

$$\left.\begin{array}{r} x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + 4y + 3z = 0 \\ x + y + mz = 0 \end{array}\right\}$$

És incompatible per a algun valor de m?

PAU CAT TEC JUNY 2006 1.2

1.6.24

Considereu el sistema d'equacions

$$\begin{cases} px + 7y + 8z = 1370 \\ x + y + z = 200 \\ 7x + py + 8z = 1395 \end{cases}$$

a) Discutiu-lo en funció del paràmetre p.
b) ~~Doneu la interpretació geomètrica en els casos en què el sistema és incompati~~ble.
c) Resoleu el sistema per a p=6.

PAU CAT TEC SET 2006 4.6

1.6.25

De tres nombres, x, y, z, sabem el següent: que el primer més el segon sumen 0; que el primer més el tercer sumen 1; que la suma de tots tres és 0 i, per acabar, que el primer multiplicat per un nombre k més el doble de la suma del segon i del tercer dóna 1.
a) Què podeu dir del valor de k?
b) Quant valen els tres nombres?

PAU CAT TEC JUNY 2005 4.5 (Problema)

1.6.26

Donat el sistema

$$\begin{cases} y + z = 2 \\ -2x + y + z = -1 \\ (2-2m)x + (2m-2)z = m-1 \end{cases}$$

on m és un paràmetre:
a) Discutiu el sistema segons els valors de m;
b) Resoleu els casos compatibles;
~~c) En cada un dels casos de la discussió de l'apartat a), feu una interpretació geomètrica del sistema.~~

PAU CAT TEC JUNY 2004 3.5

1.6.27

Per a quin o quins valors del paràmetre real λ el sistema d'equacions

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y + (\lambda+2)z = 0 \\ x + (2\lambda)y + 3z = 9 \\ 2x - z = 4 \end{array}\right\}$$

és compatible i indeterminat?

PAU CAT TEC JUNY 2003 2.4

1.6.28

Se sap que el sistema d'equacions

$$\left.\begin{aligned} x+y-az&=-2\\ 2x+y-8z&=-1\\ -x-2y+10z&=5 \end{aligned}\right\}$$

té més d'una solució.
Calculeu a ~~i digueu quina és la interpretació geomètrica que té el conjunt de totes les solucions d'aquest sistema~~.

PAU CAT TEC JUNY 2000 3.3

1.6.29

Resoleu el sistema següent per als valors de k que el facin compatible

$$\left.\begin{aligned} x+2y&=3\\ 2x-y&=1\\ 4x+3y&=k \end{aligned}\right\}$$

PAU CAT TEC JUNY 1999 1.1

1.6.30

Discutiu el sistema d’equacions

$$\left.\begin{aligned} ax-y+2z&=2-a\\ 2x+3y-z&=-3a\\ x+2y-z&=-2a \end{aligned}\right\}$$

segons els valors del paràmetre a.

PAU CAT TEC SET 1998 5.4

1.6.31

Expliqueu què vol dir que un sistema d'equacions lineals sigui compatible i què vol dir que sigui indeterminat. Poden haver-hi sistemes que siguin a la vegada incompatibles i indeterminats? Digueu finalment per a quins valors del paràmetre a el sistema d'equacions següent és indeterminat, i per a quins valors de a és incompatible:

$$\begin{cases} a^2x+y=0\\ x+3y+z=a\\ -x+y+z=1 \end{cases}$$

PAU CAT TEC SET 1997 4B.4

1.6.32

Considereu el sistema d’equacions següent:

$$\left.\begin{aligned} x-2y+3z&=3\\ -x+y+2z&=1\\ 7x-10y+z&=a \end{aligned}\right\}$$

a) Digueu per a quins valors del paràmetre a el sistema és incompatible.
b) Resoleu el sistema per al valor de a per al qual el sistema és compatible, i trobeu-ne una solució entera.

PAU CAT CCSS JUNY 2009 4.4

1.6.33

Considereu el sistema d'equacions següent:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=5 \\ 2x+3y+z=3 \\ a\,x+10\,y+z=2 \end{array}\right\}$$

a) Trobeu els valors de a per als quals el sistema no és compatible determinat.
b) Trobeu el valor de a per al qual el valor de x és 2. Determineu també els valors de y i de z en aquest cas.

PAU CAT CCSS JUNY 2008 2.4

1.6.34

Considereu el sistema d'equacions lineals següent:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+3z=k \\ 2y+z=0 \\ x+3y+k^2z=2 \end{array}\right\}$$

a) Discutiu el sistema en funció del paràmetre k.
b) Determineu la solució del sistema per al valor de k que fa que el sistema sigui indeterminat.
c) Trobeu la solució per a k= 1.

PAU CAT CCSS SET 2008 4.5

1.6.35

Discutiu en funció del paràmetre a el sistema següent:

$$\begin{cases} x+y+z=5 \\ 5x+y-z=11 \\ 3x-y+a\,z=2 \end{cases}$$

PAU CAT CCSS SET 2006 4.2

1.6.36

Discutiu en funció del paràmetre p el sistema d'equacions lineals de matriu ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 8 \\ 0 & p+5 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & p-1 & 0 \end{array}\right)$$

PAU CAT CCSS JUNY 2006 1.3

1.6.37

Discutiu en funció del paràmetre m el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} x+y+mz=1 \\ x+y-z=2 \end{cases}$$

En el cas que sigui possible doneu també la solució.

PAU CAT CCSS JUNY 2006 3.3

1.6.38

En estudiar un sistema lineal dependent del paràmetre k pel mètode de Gauss, hem arribat a la matriu ampliada següent:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 8 \\ 0 & k-2 & 5 & 12 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 \end{array}\right)$$

Discutiu el sistema en funció del paràmetre k.

PAU CAT CCSS JUNY 2004 1.2

1.6.39

Determineu per a quin valor del paràmetre λ el sistema següent:

$$\begin{cases} x-3y+5z=2 \\ 2x-4y+2z=1 \\ 5x-11y+9z=\lambda \end{cases}$$

és compatible i, en aquest cas, resoleu-lo.

PAU CAT CCSS SET 2002 1.3

1.6.40

Quins valors del paràmetre a fan que el sistema següent sigui compatible i determinat? Hi ha algun valor per al qual sigui compatible i indeterminat?

$$\left.\begin{array}{l} 2x-3y+5z=3 \\ 6x-y-z=4 \\ y+a\,z=1 \end{array}\right\}$$

PAU CAT CCSS SET 1999 2.1

1.7 Problemes PAU CCSS que es resolen amb sistemes d'equacions (I).

1.7.1

L'empresa d'esports aquàtics DiverAqua ofereix tres tipus d'activitats: esquí aquàtic, caiac i moto aquàtica. El preu per sessió i client de cadascuna d'aquestes activitats és de 40 € per l'esquí aquàtic, 20 € pel caiac i 60 € per la moto aquàtica. Sabem que avui DiverAqua ha venut 45 sessions en total. També sabem que el nombre de clients que han escollit esquí aquàtic és el triple dels que han escollit una sessió de caiac. La recaptació total del dia ha estat de 1.700 €.

a) Plantegeu un sistema d'equacions lineals que reculli tota aquesta informació.

b) Quantes persones han dut a terme cadascuna de les tres activitats?

PAU CAT CCSS SET 2023 2.1 (Solució: PAUCCSS pàg. 653)

1.7.2

En Robert ha fet tres proves d'una assignatura. Fent la mitjana aritmètica de les notes obtingudes en cadascuna de les tres proves li ha quedat una nota global de 6. En Robert sap que la nota de la tercera prova ha estat igual que la mitjana aritmètica de les notes de les altres dues proves.

a) Amb aquesta informació, pot saber alguna de les tres notes? En cas afirmatiu, de quina prova i quina seria la nota obtinguda?

b) La professora li diu que ha estat molt irregular i que si només es tinguessin en compte les notes de les dues darreres proves hauria obtingut una mitjana de 7. Quina nota ha obtingut en cada prova?

PAU CAT CCSS JUNY 2023 #3 (Solució: PAUCCSS pàg. 631)

1.7.3

En Martí explica a en Marcel que l'altre dia, quan va agafar l'autocar per anar de Barcelona a Tarragona, l'autocar es va espatllar just a la meitat del trajecte. Des d'aquest punt va anar caminant fins a la població més propera, de manera que va fer a peu una vintena part del total del trajecte. Allà va agafar un taxi fins a Tarragona, i diu que va fer 5 quilòmetres més en autocar que en taxi.

a) Plantegeu i resoleu un sistema d'equacions per a calcular quants quilòmetres va fer en Martí en autocar, a peu i en taxi.

b) Si l'autocar anava a 100 km/h, en Martí va caminar a 5 km/h i el taxi anava a 90 km/h, quant temps va tardar a fer tot el trajecte?

PAU CAT CCSS SET 2022 3.2 (Solució: PAUCCSS pàg. 607)

1.7.4 Exercici del Youtube

A l'institut d'en Martí han elaborat tres tipus diferents de rams de roses per a vendre el dia de Sant Jordi. L'opció clàssica consisteix en una rosa i una espiga. L'opció de ram petit està formada per tres roses i dues espigues. I, finalment, l'opció de ram gran consisteix en mitja dotzena de roses i tres espigues. Tots els rams (siguin de l'opció que siguin) porten un bonic embolcall. Sabem que s'han utilitzat 200 roses, 135 espigues i 85 embolcalls.

a) Quants rams s'han elaborat de cada tipus?

b) Si el preu de venda d'un ram de l'opció clàssica és de 3 euros, el d'un ram petit és de 5 euros i el d'un ram gran és de 10 euros, quants diners s'ingressaran si es venen tots?

PAU CAT CCSS JUNY 2022 2.1 (Solució: PAUCCSS pàg. 581)

(Solució: https://youtu.be/3s6mM9oev4s?si=CxdOv9MdhWlsX9Nh&t=86)

1.7.5

La Filomena fa una festa i convida els amics a menjar un pastís. Ha anat a la botiga i ha comprat una dotzena d'ous, una bossa de farina d'ametlla i un paquet de sucre morè. La festa ha estat un èxit i decideix repetir la trobada i tornar a fer el pastís. Torna a la botiga i compra una altra dotzena d'ous i dues bosses de farina d'ametlla. Però un cop a casa s'adona que no té gens de sucre. Torna a la botiga i compra un paquet de sucre morè i també una altra dotzena d'ous. La primera compra li va costar 6 €, la segona 6,5 € i la darrera 3,5 €.

a) Plantegeu un sistema d'equacions amb les dades del problema.

b) Calculeu el preu d'una dotzena d'ous, el d'una bossa de farina d'ametlla i el d'un paquet de sucre morè.

PAU CAT CCSS SET 2021 1.2 (Solució: PAUCCSS pàg. 559)

1.7.6

En una festa familiar s'han reunit 20 persones. Si comptem el total d'homes i dones junts, observem que n'hi ha el triple que de nens. A més, sabem que, si hi hagués assistit una dona més, el nombre de dones hauria estat igual que el nombre d'homes.

a) Plantegeu un sistema d'equacions per a esbrinar quants homes, quantes dones i quants nens van assistir a la festa.

b) Resoleu el sistema de l'apartat anterior i interpreteu-ne el resultat.

PAU CAT CCSS JUNY 2021 2.3 (Solució: PAUCCSS pàg. 529)

1.7.7

Fem dues proves de consum de combustible a un vehicle: en la primera, el vehicle recorre 200 km per carretera i 100 km per ciutat, i consumeix un total de 17 litres, mentre que en la segona recorre 300 km per carretera i 50 km per ciutat, i consumeix 17,5 litres. Suposant que els consums mitjans per carretera i per ciutat són sempre constants:

a) Quin és el consum mitjà per 100 km en cada una de les dues proves?

b) Quants litres consumirà el mateix vehicle si en una tercera prova recorre 400 km per carretera i 150 km per ciutat?

PAU CAT CCSS JUNY 2021 5.5 (Solució: PAUCCSS pàg. 539)

1.7.8

Un venedor d'una llibreria de vell cobra, a més a més d'un sou fix, diferents comissions depenent del tipus de llibre que ven. Cobra 1 € per cada còmic, 1,5 € per cada revista i 2 € per cada novel·la. Ahir, va vendre el doble de revistes que de novel·les i 5 còmics menys que revistes, i va aconseguir en total una comissió de 30 €. Quantes publicacions va vendre de cada tipus?

PAU CAT CCSS JUNY 2020 #1 (Solució: PAUCCSS pàg. 458)

1.7.9

Un triatló consta de tres segments que cal realitzar consecutivament practicant tres modalitats d'esport diferents: natació, ciclisme i cursa a peu. La distància total que es recorrerà en el triatló és de 75 km. Sabem que el recorregut en bicicleta és igual a quatre vegades la distància que cal recórrer nedant i corrent conjuntament. Sabem també que si sumem 3 km a la distància que es fa corrent ens dona el mateix que cinc vegades el recorregut que es fa nedant. Determineu la distància recorreguda en cada modalitat.

PAU CAT CCSS SET 2020 #5 (Solució: PAUCCSS pàg. 487)

1.7.10

El supermercat Minipreu fa una oferta de pots de melmelada, ampolles d'aigua mineral i paquets de sal. Un senyor va comprar 2 pots de melmelada, 4 ampolles d'aigua i 1 paquet de sal, i va pagar 20 €. Un altre senyor va comprar 1 pot de melmelada, 2 ampolles d'aigua i va tornar un paquet de sal que estava en males condicions, i va pagar 7 €. Una senyora va comprar 3 ampolles d'aigua i va tornar 2 paquets de sal, i va pagar 2 €. Quant valia cada pot de melmelada, cada ampolla d'aigua i cada paquet de sal?

PAU 1994/5/A

1.7.11

En un estudi de mercat, 500 participants han tastat tres cafès diferents, presentats com a producte A, producte B i producte C, i han escollit quin dels tres els ha agradat més. Sabem que el producte B ha estat escollit pel doble de persones que el producte A i que el producte B l’han escollit 32 persones més que els productes A i C junts. Calculeu quantes persones han escollit cada producte.

PAU CAT CCSS JUNY 2019 1.1 (Solució: PAUCCSS pàg. 429)

1.8 Problemes PAUCCSS que es resolen amb sistemes d'equacions (II).

1.8.1

En tres sortejos consecutius de la Lotto 6/49 hi ha hagut 51 persones que han encertat els 6 números de la combinació guanyadora en algun dels tres sortejos. El nombre de persones que van encertar la combinació guanyadora en el tercer sorteig és la meitat del total de persones que la van encertar en els dos primers sortejos junts. També sabem que el nombre de persones que van encertar la combinació guanyadora en el primer sorteig supera en 11 el total de persones que van encertar-la en el segon i en el tercer sortejos junts. Amb aquestes dades, calculeu quantes persones van encertar la combinació guanyadora de la Lotto 6/49 en cada un dels tres sortejos.

PAU CAT CCSS SET 2019 5.4 (Solució: PAUCCSS pàg. 437)

1.8.2

En Pol va quedar ahir amb uns amics en un bar i van prendre 4 refrescos, 3 entrepans i 5 boles de gelat. Tot plegat els va costar 19,50 €. Dies enrere, havia anat al mateix bar amb el seu cosí Martí, i per 2 refrescos, 1 entrepà i 2 boles de gelat havien pagat 8,10 €. En aquest bar tots els refrescos valen el mateix, tots els entrepans tenen el mateix preu i les boles de gelat es venen també a preu únic.

a) Avui en Pol hi ha tornat amb uns altres amics i han pres 6 refrescos, 5 entrepans i 8 boles de gelat. Expliqueu raonadament quant han pagat en total.

b) Si 1 refresc, 1 entrepà i 1 bola de gelat costen 5,10 €, quant val el refresc, l'entrepà i la bola de gelat separadament?

PAU CAT TEC SET 2018 1.3 (Solució: PAUCCSS pàg. 410)

1.8.3

Tenim unes quantes monedes d'un euro distribuïdes en tres piles. Passem dotze monedes de la tercera pila a la segona i, a continuació, en passem deu de la segona pila a la primera. Un cop fet això, les tres piles tenen la mateixa quantitat de monedes.

a) Amb aquestes dades, podem determinar la quantitat de monedes que hi havia inicialment en cada pila? Raoneu la resposta.

b) Esbrineu la quantitat de monedes que hi havia inicialment a cada pila si sabem que en total hi ha 51 monedes.

PAU CAT CCSS JUNY 2017 1.4 (Solució: PAUCCSS pàg. 392)

1.8.4

La Maria té el doble de diners que en Pol i la Júlia junts. En Pol té la sisena part de diners que la Maria. La Júlia té el doble de diners que en Pol. La Maria té el triple de diners que la Júlia.

a) Amb aquestes dades, podem saber quants diners tenen cadascun d'ells? Trobeu el conjunt de solucions possibles.

b) Si en Pol té 35 €, quants diners tenen la Maria i la Júlia?

PAU CAT CCSS SET 2016 1.1(Solució: PAUCCSS pàg. 384)

1.8.5

La butlleta guanyadora d'una loteria està formada per tres nombres. Sabem que la suma del primer i el segon excedeix en dues unitats el tercer; que el primer nombre menys el doble del segon és deu unitats menor que el tercer, i que la suma dels tres nombres és 24. Quina és la butlleta guanyadora?

PAU CAT CCSS JUNY 2016 3.5

1.8.6

En resoldre un sistema lineal de tres equacions amb tres incògnites, x, y i z, hem trobat que les solucions compleixen les condicions següents:
- La suma de les solucions és 6.
- La segona és la mitjana aritmètica de les altres dues.
- El valor de la tercera és la suma dels valors de les altres dues.

Escriviu el sistema d'equacions que satisfà les condicions anteriors, resoleu-lo i indiqueu si és compatible determinat o indeterminat.

PAU CAT CCSS JUNY 2015 2.2

1.8.7

En Pol, la Júlia i la Maria han comprat un regal. La Júlia ha gastat la meitat de diners que la Maria, i en Pol n'ha gastat el triple que la Júlia.
a) Expliqueu raonadament si amb aquestes dades en tenim prou per a determinar quant ha gastat cadascun d'ells.
b) Si a més ens diuen que entre tots tres han gastat 63 €, quant ha gastat cadascú?

PAU CAT CCSS JUNY 2014 3.1

1.8.8

La Júlia, en Pol i la Maria han anat a comprar fruita. La Júlia ha comprat un kilogram de pomes, dos de préssecs i tres de taronges, i ha pagat 9 €. En Pol ha comprat dos kilograms de pomes i quatre de préssecs, i ha pagat 12 €. La Maria, en canvi, ha comprat quatre kilograms de pomes i dos de taronges, i ha pagat 8 €. Calculeu el preu del kilogram de cada fruita.

PAU CAT CCSS SET 2013 1.2

1.8.9

Una botiga ven llaunes de beguda a 0,6 € la llauna, però si comprem un paquet de sis llaunes ens cobren 3 €.
a) Quin és el percentatge d'estalvi en comprar un paquet respecte a la compra de sis llaunes soltes?
b) En una setmana, la botiga ha venut 240 llaunes i ha ingressat 132,6€. Quants paquets de sis llaunes ha venut?

PAU CAT CCSS SET 2012 4.3

1.8.10

En Joan, en Pere i en Marc tenen, entre els tres, seixanta-tres anys. Si en Joan tingués tres anys menys, la seva edat seria el doble de les edats d'en Pere i en Marc junts. Si en Pere tingués un any més, la seva edat seria la meitat de la d'en Marc. Quina és l'edat actual de cadascun d'ells?

PAU CAT CCSS JUNY 2012 3.6 (Sol. PAUCCSS pàg. 319)

1.8.11

Si sumem 2 unitats al denominador d'una fracció, la nova fracció val 1 unitat. En canvi, si sumem 3 unitats al numerador de la fracció original, la nova fracció val 2 unitats. Determineu la fracció original.

PAU CAT CCSS SET 2010 2.1

1.8.12

En una botiga de queviures hem comprat ampolles d'aigua a 0,5€ cadascuna, de llet a 1€ i de suc de fruita a 1,5€. En arribar a la caixa ens adonem que portem 40 ampolles, el cost total de les quals és de 38€. També observem que si les ampolles d'aigua que portem fossin de llet i les de llet fossin d'aigua, la compra ens sortiria 4€ més barata. Determineu el nombre d'ampolles de cada beguda que hem comprat.

PAU CAT CCSS JUNY 2010 4.1

1.8.13

Un trajecte de 200 km s'ha de fer combinant taxi, ferrocarril i autobús. El cost del taxi és de 5€/km; el del ferrocarril, de 2€/km, i el de l'autobús, de 3€/km. El recorregut ens ha costat 500€, per haver fet el doble de kilòmetres amb ferrocarril que amb taxi i autobús junts. Determineu les distàncies que hem recorregut amb cada mitjà de transport.

PAU CAT CCSS JUNY 2008 2.5

1.8.14

Una persona va a la vinateria i compra tres classes de vi. En total, en compra 20 botelles i s'hi gasta 100€. Compra botelles de tres classes, A, B i C, que costen 3€, 7€ i 8€ respectivament. Trobeu el nombre de botelles de cada classe que ha comprat, sabent que almenys n'ha comprat una de cada classe.

PAU CAT CCSS SET 2007 3.6

1.8.15

Una companyia aèria de baix cost fa vols des de Girona fins a tres ciutats, A, B i C. Calculeu el preu dels bitllets a cada ciutat amb la informació següent: si ven 10 bitllets per anar a la ciutat A, 15 per a la B i cap per a la C, ingressa 925€; si ven 12 bitllets per a A, 8 per a B i cap per a C, ingressa 760€; si ven 6 bitllets per a A, 5 per a B i 8 per a C, ingressa 855€.

PAU CAT CCSS JUNY 2007 1.2

1.8.16

Una marca comercial utilitza tres ingredients A, B i C en l'elaboració de tres tipus de pizzes P1, P2 i P3. La pizza P1 s'elabora amb 1 unitat de A, 2 de B i 2 de C; la P2 s'elabora amb 2 unitats de A, 1 de B i 1 de C, i la P3 s'elabora amb 2 unitats de A, 1 de B i 2 de C. El preu de venda al públic és de 4,80€ per a P1, 4,10 € per a P2 i 4,90€ per a P3. Sabent que el marge comercial (benefici) és d'1,60€ en cadascuna, trobeu quant costa cada unitat de A, B i C a la marca comercial esmentada.

PAU CAT CCSS JUNY 2005 4.6

1.8.17

Tres germans tenen edats diferents, però sabem que la suma de les edats dels tres germans és de 37 anys, i la suma de l'edat del gran més el doble de l'edat del mitjà més el triple de l'edat del petit és de 69 anys.
a) Expresseu les edats dels tres germans en funció de l'edat del germà petit.
b) És possible que el germà petit tingui 5 anys? I 12 anys? Raoneu la resposta.
c) Calculeu l'edat dels tres germans.

PAU CAT CCSS JUNY 2004 3.6

1.8.18

En un determinat poble es representen tres espectacles que anomenarem E1, E2 i E3 respectivament, cada un amb un preu diferent.
Calculeu el preu de cada espectacle si sabem el següent:
– Si assistíssim dues vegades a E1, una vegada a E2 i també una vegada a E3 ens costaria 34€.
– Si anéssim tres vegades a l'espectacle E1 i una a E2 ens costaria 46,5€.
– En el cas d'assistir només una vegada a cada un dels tres espectacles ens costaria 21,5€.

PAU CAT CCSS JUNY 2002 3.2

1.8.19

Una empresa fabrica tres models de cotxes: A, B i C. El model A ha de passar 20 hores en la unitat de muntatge; el model B, 30 hores, i el model C, 10 hores. El model A ha de passar 10 hores a la unitat d'acabats; el model B, 20 hores, i el model C, 30 hores. En total s'han produït 14 cotxes. La unitat de muntatge ha treballat 370 hores i la d'acabats, 290 hores. Quants cotxes de cada tipus s'han produït?

PAU CAT CCSS JUNY 1998 6.6

1.8.20

Una capsa conté 40 monedes, que són de 50 cèntims, d'1 € i de 2 €. Sabem que el nombre de monedes de 50 cèntims que hi ha és el doble que el de monedes de 2 €.
a) Podem saber el nombre de monedes que hi ha de cada tipus? En cas afirmatiu, calculeu-lo. En cas negatiu, doneu la solució en funció d'un paràmetre.
b) Esbrineu si es pot calcular el valor total, en euros, de les monedes de la capsa. En casafirmatiu, calculeu-lo.

PAU CCSS JUNY 2022 5.2 (Sol. PAUCCSS pàg. 606)

1.8.21

Una empresa distribueix dos tipus de paquets a les farmàcies (A i B). El paquet de tipus A conté els productes següents: 5 termòmetres digitals per infrarojos, 30 mascaretes i 10 tests ràpids d’antígens. El paquet de tipus B conté 1 termòmetre digital per infrarojos, 15 mascaretes i 20 tests ràpids d’antígens. El preu del paquet de tipus A és de 550 € i el del paquet de tipus B és de 200 €. El preu de cada producte és el mateix en els dos tipus de paquets.

a) Amb les dades de l’enunciat, és possible trobar el preu d’un termòmetre, el d’una mascareta i el d’un test d’antígens? Justifiqueu la resposta plantejant i classificant un sistema d’equacions. Resoleu el sistema deixant la solució en funció del preu del test d’antígens.

b) Si un test d’antígens costa 4 €, quin serà el preu d’una mascareta? I el d’un termòmetre?

PAU CCSS JUNY 2023 5.3 (Sol. PAUCCSS pàg. 678)

1.9 Problemes de sistemes d'equacions amb percentatges.

1.9.1

Una botiga ven un tipus determinat d'ampolla d'aigua a 70 cèntims. Aquesta setmana fa una oferta de 4×3, és a dir, que si comprem quatre ampolles d'aigua només en paguem tres. La botiga també ha anunciat que la propera setmana l'oferta de 4×3 ja no serà vigent, però, en canvi, aplicarà un 20 % de descompte sobre el total de la compra que facin els clients.

a) Calculeu el preu que haurem de pagar per 4 ampolles d'aigua tant aquesta setmana com la propera. En lloc d'un 20 %, quin descompte caldria aplicar per a igualar l'oferta de 4×3?

b) Calculeu, en general, quin descompte caldria aplicar per a igualar una oferta de $m \times (m - 1)$; és a dir, que consisteix a vendre m ampolles d'aigua pel preu de $m - 1$ ampolles, en què m és un enter més gran que 1.

PAU CAT CCSS SET 2023 2.6 (Solució: PAUCCSS pàg. 660)

1.9.2

Una empresa de productes lactis va ingressar l'any passat un total d'1.800.000 € per les vendes de formatges. Les exportacions a la Unió Europea van aportar tants ingressos com les vendes en l'àmbit estatal i les exportacions a països extracomunitaris juntes. Aquest any l'empresa ha ingressat 1.950.000 € i sabem que les vendes estatals han disminuït un 5 %, les exportacions a la Unió Europea han augmentat un 15 % i les exportacions a països extracomunitaris han augmentat un 10 %. Determineu les quantitats que va ingressar per cada concepte (vendes en l'àmbit estatal, exportacions a la Unió Europea i exportacions a països extracomunitaris) l'any passat, i també les quantitats que ha ingressat aquest any.

PAU CAT CCSS JUNY 2021 5.3 (Solució: PAUCCSS pàg. 536)

1.9.3

Un inversor ha obtingut un benefici de 1.500 € després d'invertir un total de 40.000 € en tres empreses diferents. Aquests beneficis es desglossen de la manera següent: la quantitat invertida en l'empresa A li ha reportat un 2 % de beneficis, la quantitat invertida en l'empresa B, un 5 %, i la quantitat invertida en l'empresa C, un 7 %. Els diners invertits en l'empresa B han estat els mateixos que en les altres dues empreses juntes. Quina va ser la quantitat invertida en cada una de les tres empreses?

PAU CAT CCSS SET 2018 3.3 (Solució: PAUCCSS pàg. 420)

1.9.4

Un grup inversor vol invertir 6.000 euros en lletres, bons i accions que tenen una rendibilitat del 10 %, del 8 % i del 4 %, respectivament. Tenint en compte que vol obtenir una rendibilitat global del 7 %:
a) Trobeu la quantitat que ha d'invertir en lletres i en bons en funció de la quantitat invertida en accions. Quins valors pot prendre la quantitat invertida en accions sabent que les quantitats invertides en cadascun dels productes han de ser sempre més grans o iguals que zero?
b) Quant ha d'invertir en cadascuna de les tres opcions si vol invertir en lletres tant com en els altres dos productes junts?

PAU CAT CCSS SET 2017 2.4

1.9.5

Una persona decideix invertir un total de 60.000 €, repartits entre tres entitats d'estalvi diferents: A, B i C. Aquesta persona decideix que la quantitat invertida a l'entitat A sigui la meitat de la quantitat total invertida a les entitats B i C. A més, sabem que l'entitat A li ha assegurat una rendibilitat del 5%; l'entitat B, una rendibilitat del 10%, i l'entitat C, una rendibilitat del 2%. Calculeu les quantitats invertides a cada entitat d'estalvi si sabem que aquest inversor obtindrà uns beneficis totals de 4.200€.

PAU CAT CCSS SET 2015 5.1

1.9.6

He anat a una botiga i he decidit comprar uns pantalons, una camisa i unes sabates. Si faig la compra avui, em costarà tot plegat 120 €. A més, actualment, la camisa i les sabates costen, plegades, el doble dels pantalons.
Si m'espero una setmana, els pantalons i les sabates tindran un descompte del 20 %, mentre que la camisa només tindrà un descompte del 10 %. D'aquesta manera, pagaré 99 €. Quin és el preu inicial de cada article?

PAU CAT CCSS JUNY 2013 3.1

1.9.7

El propietari d'un bar ha comprat refrescos, cervesa i vi per un total de 5.000€, sense impostos. El vi val 600€ menys que els refrescos i la cervesa plegats. Si tenim en compte que pels refrescos ha de pagar un IVA del 6%, per la cervesa un del 12% i pel vi un del 30%, aleshores la factura total, amb els impostos inclosos, puja a 5.924€. Calculeu quant ha pagat, sense IVA, per cada classe de beguda.

PAU CAT CCSS SET 2014 5.4

1.9.8

Una empresa compra tres immobles per un valor total de 2 milions d'euros. En vendre'ls, espera obtenir uns guanys del 20%, del 50 % i del 25%, respectivament, que li reportaran uns beneficis totals de 600 000 euros. En el moment de posar-los a la venda, però, aconsegueix uns guanys del 80%, del 90% i del 85%, respectivament, cosa que li reporta uns beneficis totals d'1,7 milions d'euros. Quant havia pagat per cada immoble?

PAU CAT CCSS JUNY 2011 1.1

1.9.9

Una botiga ha venut 225 llapis de memòria de tres models diferents, que anomenarem A, B i C, i ha ingressat un total de 10500€. El llapis A costa 50€, i els models B i C són, respectivament, un 10% i un 40% més barats que el model A. La suma total de llapis venuts dels models B i C és la meitat que la de llapis venuts del model A. Calculeu quants exemplars s'han venut de cada model.

PAU CAT CCSS JUNY 2010 1.3

1.9.10

Un botiguer compra deu televisors i sis equips de música. D'acord amb el preu marcat hauria de pagar 10480€. Com que paga al comptat, li fan un descompte del 5 % en cada televisor i del 10% en cada equip de música, i només ha de pagar 9842€. Quin és el preu marcat de cada televisor i de cada equip de música?

PAU CAT CCSS JUNY 2009 4.2

1.9.11

Fa un any, una persona va invertir 12000€ en accions de tres empreses, que anomenarem A, B i C. Ara, les accions de l'empresa A han augmentat de valor en un 25%, les de l'empresa B han augmentat en un 10% i, en canvi, les de l'empresa C han perdut un 15% del seu valor. Si ara vengués totes les accions, no obtindria ni pèrdues ni beneficis. Sabent que va invertir en les accions de l'empresa C el mateix que en les altres dues juntes, calculeu la quantitat de diners que va invertir en accions de cada empresa.

PAU CAT CCSS JUNY 2009 3.6

1.9.12

Una persona va invertir 6000€ comprant accions de dues empreses, A i B. Al cap d'un any, el valor de les accions de l'empresa A ha pujat un 5 % i, en canvi, el valor de les accions de l'empresa B ha baixat un 10 %. Tot i això, si vengués ara les accions guanyaria 150€. Determineu quants diners va invertir en accions de cada empresa.

PAU CAT CCSS SET 2008 4.2

1.9.13

Tres entitats financeres, A, B i C, ofereixen, respectivament, per a dipòsits superiors a 2000€, un interès anual del 2%, 3% i k% (que no coneixem). La Joana, en Manel i en Dani decideixen invertir els estalvis en aquestes entitats durant un any. Sabem que si tots ho fessin a l'entitat A, obtindrien en total uns beneficis de 164€; però si la Joana optés per A, en Manel per C i en Dani per B, obtindrien 192€; finalment, si la Joana i en Manel es decidissin per B i en Dani per C, obtindrien 218€.

a) Escriviu un sistema d'equacions que descrigui la situació.

b) Sense resoldre el sistema, determineu la quantitat total de diners invertida entre les tres persones.

c) Trobeu, si existeix, un valor de k per al qual hi hagi infinites solucions. Resoleu el sistema per a aquest valor de k, i doneu-ne tres solucions diferents.

PAU CAT CCSS JUNY 2007 1.6

1.9.14

La despesa mensual en salaris d'una empresa de 36 treballadors és de 54.900€. Hi ha tres categories de treballadors que indicarem A, B i C. El salari mensual d'un treballador de la categoria A és de 900€, el d'un de la B és de 1.500€ i el d'un de la C és de 3.000€ . Sense acomiadar ningú, l'empresa vol reduir la despesa salarial en un 5%. Per fer-ho ha rebaixat un 5% el salari de la categoria A, un 4% el de la B i un 7% el de la C. Esbrineu quants treballadors hi ha de cada categoria.

PAU CAT CCSS JUNY 2006 3.6

1.9.15

La Joana i la Mercè tenien 20000€ cadascuna per invertir. Cadascuna d'elles fa la mateixa distribució dels seus diners en tres parts P, Q i R, i les porta a una entitat financera. Al cap d'un any, a la Joana li han donat un 4% d'interès per la part P, un 5% per la part Q i un 4% per la part R i a la Mercè li han donat un 5% per la part P, un 6% per la part Q i un 4% per la part R. La Joana ha rebut en total 850 € d'interessos, mentre que la Mercè n'ha rebut 950€. De quants euros constava cadascuna de les parts P, Q i R?

PAU CAT CCSS JUNY 2004 3.5

1.9.16

Un videoclub està especialitzat en pel·lícules de tres tipus: infantils, oest americà i terror. Se sap que:
El 60% de les pel·lícules infantils més el 50% de les de l'oest representen el 30% del total de les pel·lícules.
El 20% de les infantils més el 60% de les de l'oest més del 60% de les de terror al representen la mitat del total de les pel·lícules.
Hi ha 100 pel·lícules més de l'oest que d'infantils.
Troba el nombre de pel·lícules de cada tipus.

1.9.17

Una botiga ha venut 600 exemplars d'un videojoc per un total de 6384€. El preu original era de 12€, però també ha venut còpies defectuoses amb descomptes del 30% i del 40%. Si sabem que el nombre de còpies defectuoses venudes va ser la meitat del de les còpies en bon estat, calcula a quantes còpies se'ls va aplicar el 30% de descompte.

1.9.18

Un magatzemista disposa de tres tipus de cafè: el tipus A de 9.8 €/kg; el B de 8.75 €/kg i el C de 9.5 €/kg. Vol fer una mescla amb els tres tipus de 10.5 kg a 9.40 €/kg. Quants quilos de cada tipus ha de mesclar si ha de posar el doble del tipus C que dels tipus A i B?

1.9.19

Un hipermercat comença una campanya d'ofertes. En la primera, ofereix un descompte d'un 4% en un cert producte A, un 6% en un producte B i un 5% en el producte C. Dues setmanes després, comença una nova campanya, descomptant un 8% sobre el preu inicial de A, un 10% sobre el preu inicial de B i un 6% sobre el preu inicial de C.
Sabem que si un client compra durant la primera oferta un producte A, dos productes B i tres productes C, estalvia 16 euros respecte del preu inicial. Sabem també que si compra tres productes A, un producte B i cinc productes C en la segona oferta, l'estalvi és de 29 euros. Finalment, sabem que si compra un producte A, un producte B i un producte C, sense cap tipus de descompte, ha de pagar 135 euros.
Determineu el preu de cada producte abans de les ofertes.

1.9.20

Juan decideix invertir 12000 euros en borsa, comprant accions de tres empreses diferents: A, B i C. Inverteix en A el doble que en B i C juntes. Passat un any, les accions de l'empresa A han donat un 4% de benefici, les de B un 5% de benefici i les de C han donat unes pèrdues del 2%. Com a resultat de tot plegat, Juan ha obtingut un benefici de 432.5 euros. Determina els euros que va invertir en cada empresa.

1.9.21

Una agència immobiliària té tres locals en lloguer, pels quals ha cobrat en total 1.650 euros en aquest mes. L'agència ha pagat al propietari del primer local el 95% de la quantitat que ha cobrat pel lloguer; al propietari del segon local, el 90% de la quantitat que ha cobrat pel lloguer; i al propietari del tercer local, el 80% de la quantitat cobrada pel lloguer. Després d'aquests tres pagaments, a l'agència li han quedat 132 euros de guany. Se sap també que el lloguer que es cobra pel primer local és el doble de la suma del que es cobra pel lloguer dels altres dos locals junts. Quants euros cobra l'agència per cadascun dels tres locals que té en lloguer?

1.9.22

En una empresa de 57 treballadors la despesa en salaris en aquest mes ha sigut de 62000 euros. En l'empresa hi ha treballadors de tres categories, denominades A, B i C. Aquest mes el salari dels treballadors de la categoria A ha sigut de 800 euros, el dels treballadors de la categoria B de 1000 euros i el dels treballadors de la categoria C de 2000 euros. Una auditoria externa ha indicat que la desigualtat salarial entre els treballadors de l'empresa és excessiva, per la qual cosa s'ha decidit que el mes vinent s'incrementarà en un 4% el salari als treballadors de la categoria A, es mantindrà el salari als treballadors de la categoria B i es rebaixarà en un 10% el salari als treballadors de la categoria C. D'aquesta manera, la despesa de l'empresa en salaris en el mes vinent serà un 2% inferior a la despesa en salaris d'aquest mes. Quants treballadors de cada categoria té l'empresa?

1.9.23

Una empresa de mobles disposa de tres fàbriques que produeixen un model de sofà determinat. El mes passat es van fabricar un total de 1.260 unitats d'aquest model i sabem que la segona fàbrica va produir tants sofàs com les altres dues juntes.

a) Amb aquesta informació, podem determinar quants sofàs va produir cadascuna de les fàbriques? Justifiqueu la resposta. A continuació, calculeu, només amb aquesta informació, quants sofàs va produir la segona fàbrica.

b) També sabem que un 10 % dels sofàs produïts per la primera fàbrica, un 30 % dels produïts per la segona i un 20 % dels produïts per la tercera eren de color gris, i que en total es van fabricar 284 sofàs d'aquest color. Trobeu quants sofàs va produir cada fàbrica el mes passat.

PAU CAT CCSS JUNY 2024 1.2 (Solució: PAUCCSS pàg. 729)

1.9.24

Una inversora vol invertir el seu capital en un banc especialitzat en criptomonedes que ofereix diferents dipòsits amb els interessos següents:

- BTC (bitcoin): 15 % anual.
- ETH (ether): 10 % anual.
- LNK (link): 13 % anual.

La inversora vol invertir la mateixa quantitat en bitcoins que entre les altres dues criptomonedes juntes i vol obtenir un rendiment anual global d'un 13 %.

a) Quina ha de ser la relació entre la inversió en ethers i en links?

b) Si sabem que la inversió total serà de 150.000 €, quina quantitat invertirà en cada criptomoneda?

PAU CAT CCSS SET 2024 3.2 (Sol. PAUCCSS pàg 753)

1.9.25

Fa un any una societat de capital de risc va invertir 100000 euros en accions de tres empreses, que anomenarem A, B i C. Ara, les accions de l'empresa A han augmentat de valor en un 50 %, les de l'empresa B han augmentat en un 10 % i, en canvi, les de l'empresa C han perdut un 15 % del seu valor. Si la societat ara vengués totes les accions obtindria 102000 euros. Sabem que va invertir en les accions de l'empresa C el mateix que en les altres dues juntes. Calculau la quantitat de diners que la societat va invertir en accions de cada empresa.

PAU Balears 2022

1.9.26

Para poder llevar a cabo la última obra que le han encargado, una empresa de construcción necesita adquirir 400 kg de cemento, I50 kg de ladrillos y 120 kg de azulejos. Antes de hacer la compra del material consulta precios en dos suministradores, A y B. El suministrador A le ofrece un precio de venta total de 9800 €. El suministrador B, que está en liquidación, le ofrece importantes descuentos. En concreto, baja el precio del cemento a la mitad del que le ofrece el suministrador A, el del ladrillo a una tercera parte y el del azulejo a una cuarta parte, lo que supone un ahorro de 6400 € con respecto al precio total de venta ofrecido por el suministrador A. Se sabe, además, para el suministrador A, que el precio del kg de azulejo es el doble de la suma de los precios del cemento y los ladrillos.

Cantabria 2022 Junio

1.9.27

Una tienda de electrodomésticos ha vendido 750 televisores de tres modelos diferentes, A, B y C. Los ingresos totales obtenidos han sido de 230 400 euros. El precio de venta del modelo A era de 320 euros; el del modelo B, un 20 % más barato que A; y el del C, un 10 % más caro que A. Además, de A y C se han vendido, en total, el doble de unidades que de B. Calcula cuántas unidades se han vendido de cada modelo de televisor.

Cantabria 2020 Junio

1.9.28

Analizamos en un comercio los precios de tres artículos A, B y C. El producto A, es de primera necesidad y tiene un tipo superreducido de IVA del 4 %; el producto B es de alimentación y tiene un tipo reducido de IVA del 10% y el artículo C es un pequeño electrodoméstico cuyo tipo de IVA es del 21 %. El precio total sin IVA de la compra de 1 artículo A de primera necesidad, 2 productos B de alimentación y 5 pequeños electrodomésticos C es de 483 €. Mientras que el total de IVA correspondiente a la compra de 100 artículos de primera necesidad A, 10 productos de alimentación B y 100 pequeños electrodomésticos C, es de 1954 €. Además, se sabe que el precio sin IVA del pequeño electrodoméstico es igual al precio sin IVA de cuatro artículos de primera necesidad más ocho artículos de alimentación. Calcula los precios a la venta de los tres artículos, teniendo en cuenta que el precio a la venta es el precio con IVA incluido.

Madrid 2025 (Modelo)

1.9.29 Exercici del Youtube

Una marca de vehículos ha vendido este mes coches de tres colores: blancos, negros y rojos. El 60% de los coches blancos más el 50% de los coches negros representan el 30% de los coches vendidos. El 20% de los coches blancos junto con el 60% de los coches negros y el 60% de los coches rojos representan la mitad de los coches vendidos. Se han vendido 100 coches negros más que blancos. Determina el número de coches vendidos de cada color.

Andalucía 2023

https://youtu.be/Sgdd62HOzPc (profesor10demates)

1.9.30

La suma de la inversión en acciones de una empresa textil, una empresa de gas y una compañía de telefonía es de 7400€. Las acciones de la empresa textil pagan un 2% de interés anual, las de la empresa de gas un 4% y las de la compañía de telefonía pagan un 5%. La suma del interés anual es de 278€. La inversión en acciones de la compañía de telefonía es de 1000€ menos que la suma de la inversión en acciones de la empresa textil y las acciones de la compañía de gas.

a) Plantear un sistema lineal que permita calcular la cantidad invertida en cada una de las acciones.

b) Calcular la cantidad invertida en cada una de las acciones.

c) ¿Podemos calcular el capital invertido en cada una de las acciones si cambiamos la
tercera condición por "el doble de la inversión en acciones de la compañía de telefonía es de 2000€ menos que la diferencia de la inversión en las acciones de la empresa textil y las acciones de la compañía de gas"?

Aragón 2012

1.9.31

En un teatro hay tres tipos de localidades, que llamaremos A, B y C. Las del tipo A cuestan 24 euros, las del tipo B cuestan 20 euros y las del tipo C cuestan 15 euros. El teatro tiene una capacidad de 400 butacas de las cuales se han vendido el 80%. En total se han recaudado 5.940 euros. Sabiendo que se han vendido el doble de localidades del tipo B que del tipo A. ¿Cuántas localidades de cada tipo se han vendido?

País Vasco 2016

1.9.32

Un autobús transporta 60 viajeros de tres tipos. Hay viajeros que pagan el billete entero, que vale 1,2 euros. Otro grupo de viajeros abona el 80% y un tercer grupo abona el 50%. La recaudación del autobús fue de 46,56 euros. Calcular el número de viajeros de cada clase sabiendo que el número de los viajeros con mayor descuento es el doble que el número del resto de viajeros.

País Vasco 2017

1.9.33 Exercici del Youtube

Una marca de vehículos ha vendido este mes coches de tres colores: blancos, negros y rojos. El 60% de los coches blancos más el 50% de los coches negros representan el 30% de los coches vendidos. El 20% de los coches blancos junto con el 60% de los coches negros y el 60% de los coches rojos representan la mitad de los coches vendidos. Se han vendido 100 coches negros más que blancos. Determina el número de coches vendidos de cada color.

Andalucía 2023
https://youtu.be/Sgdd62HOzPc (profesor10demates)

1.9.34

En una tienda de ropa se liquidan los pantalones que han quedado sin vender en la temporada. Los hay de tres tipos: A, sin defecto, todos al mismo precio de 20 euros; B, con defecto no apreciable, con una rebaja del 20% sobre el precio de los anteriores y C, con defecto apreciable, con una rebaja del 60% sobre el precio de los que no tienen defecto. Hay 70 pantalones para vender. El precio total de todos ellos es de 1280 euros, y los que tienen defecto suponen el 40% de los que no lo tienen. ¿Cuántos pantalones hay de cada clase?

Canarias Extraordinaria 2021 B4

1.9.35

En un centro educativo se imparten enseñanzas de ESO, Bachillerato y Ciclos Formativos. Si sumamos el 20% del alumnado de ESO, con el 20% del alumnado de Bachillerato y el 40% del alumnado de Ciclos Formativos se obtienen 42 alumnos más que el 20% del alumnado total del centro. Asimismo si sumamos el número de alumnos de ESO más la mitad de los de Ciclos Formativos obtenemos 40 alumnos menos que el total de matriculados en Bachillerato. Si el centro tiene en total 1115 alumnos, hallar el número de matriculados en cada tipo de enseñanza.

Canarias. Julio 2019. PRUEBA B. 4

1.9.36

En el presupuesto de una corporación pública, las partidas dedicadas a inversión en proyectos de interés comunitario, gastos de funcionamiento (personal y corrientes) y gastos sociales (acciones culturales, educativas y sociales) suman 125 millones de euros. La inversión en proyectos es el 56,25% del resto de lo presupuestado y, por cada 9 millones dedicados a gastos sociales, hay 11 dedicados a gastos de funcionamiento. ¿Cuáles son las cantidades asignadas a cada partida?

Canarias. Junio 2017. PRUEBA A. 4

1.10 Més problemes de sistemes d'equacions.

1.10.1

Una empresa instal·la cases prefabricades de tres tipus: A, B i C. Cada casa de tipus A necesita 10 hores de paleta, 2 de fontaneria i 2 d'electricista. Cada casa de tipus B necesita 15 hores de paleta, 4 de fontaneria i 3 d'electricista. Cada casa de tipus C necesita 20 hores de paleta, 6 de fontaneria i 5 d'electricista. Si l'empressa vol dedicar 270 hores de treball de paleta, 68 de fontarneria i 58 d'electricista, Quantes cases de cada tipus en podrà contruir?

1.10.2

RSCLS i Associats fabrica tres tipus de computadora personal: Cicló, Ciclop i Cicloide. Per armar una Cicló es necessiten 10 hores, altres 2 per provar els seus components i 2 hores més per a instal·lar els seus programes. El temps requerit per a la Ciclop és 12 hores en el seu acoblament, 2,5 per provar-la i 2 hores per a instal·lar-la. La Cicloide, la més senzilla de la línia, necessita 6 hores d'armat, 1,5 hores de prova i 1,5 hores d'instal·lació. Si la fàbrica d'esta empresa disposa de 1560 hores de treball per mes per armar, 340 hores per provar i 320 hores pera instal·lar, quantes PC de cada tipus pot produir en un mes?

1.10.3

La mitjana de les temperatures en les ciutats de Nova York, Washington DC i Boston fou de 88ºF durant cert dia d'estiu. A Washington fou 9º major que la mitjana de les temperatures de les altres 2 ciutats. A Boston fou 9º menor que la temperatura mitjana en les altres 2 ciutats. Quina fou la temperatura en cada ciutat?

1.10.4 Exercici del Youtube

El cajero de un banco sólo dispone de billetes de 10, 20 y 50 euros. Hemos sacado 290 euros del banco y el cajero nos ha entregado exactamente 8 billetes. El número de billetes de 10 euros es el doble del de 20 euros. Plantee y resuelva el sistema de ecuaciones lineales asociado a este problema para obtener el número de billetes de cada tipo que nos ha entregado el cajero.

PAU ANDALUCíA CCSS 2006

Solució: https://youtu.be/BZ9t4cqA5uc (Javier Delgado - Seletube)

1.10.5 Exercici del Youtube

Los tres modelos existentes de una marca de automóviles cuestan 12.000, 15.000 y 22.000 euros, respectivamente.
Un concesionario ha ingresado 1.265.000 euros por la venta de automóviles de esta marca. ¿Cuántos coches ha vendido de cada modelo si del más barato se vendieron tantos como de los otros dos juntos y del más caro la tercera parte de los coches que cuestan 15.000 euros?

PAU Madrid CCSS Junio 2007

Solució : https://youtu.be/cXRBVWNhlw0 (Mates con Andrés)

1.10.6

Un banco invirtió 2 millones de euros en tres empresas diferentes, A, B y C. Lo que invirtió en A era el doble de lo que invirtió en B. Al cabo de un año, la rentabilidad de la operación ha sido del 10%. Las acciones de la empresa A han aumentado su valor un 10%, y las de B, en un 30%. Si las acciones de la empresa C han perdido un 10% de su valor, ¿qué cantidad se invirtió en cada empresa?

Solució: https://youtu.be/8duRh2_Bzak (profesor10demates)

1.10.7

En una botiga de fruita hem comprat pomes a 0.5 euros cadascuna, alvocats a 1 euro i pinyes a 1.5 euros la peça. En arribar a la caixa ens adonam que portam 70 peces de fruita, el cost total de les quals és de 68 euros. També observam que si les pomes que portam fossin alvocats i els alvocats fossin pomes, la compra ens sortiria 4 euros més barata. Determinau el nombre de peces de cada fruita que hem comprat.

PAU Balears 2021

1.10.8

Un comerciant ven tres tipus de rellotges, A, B i C. Els rellotges de tipus A els ven a 300€; els de tipus B, a 600€, i els de tipus C, a 200€. En un mes determinat va vendre 200 rellotges en total. Si la quantitat dels que va vendre aquest mes de tipus B va ser igual als que va vendre de tipus A i tipus C conjuntament, calculau quants rellotges va vendre de cada tipus si la recaptació d'aquest mes va ser de 89.000€.

PAU Balears 2017

1.10.9

Tres amigas, Sara, Cristina y Jimena, tienen un total de 15000 seguidores en una red social. Si Jimena perdiera el 25% de sus seguidores todavía tendría el triple de seguidores que Sara. Además, la mitad de los seguidores de Sara más la quinta parte de los de Cristina suponen la cuarta parte de los seguidores de Jimena. Calcule cuántos seguidores tiene cada una de las tres amigas.

PAU Madrid 2021

1.10.10

La aerolínea "Air", para cada uno de sus vuelos, ha puesto a la venta 12 plazas de clase Preferente (P), a 250 euros cada una, 36 plazas de Clase Turista (T), a 150 euros cada una, y 72 plazas de Clase Económica (E), a 100 euros cada una. Se sabe que ha vendido el 90% del total de las plazas, recaudando un importe de 13800 euros.

a) Determine el número total de plazas vendidas.

b) Sabiendo que se han vendido el triple de plazas de clase (T) que de clase (P), obtenga el número de billetes vendidos de cada clase y cuánto dinero se ha recaudado de cada clase.

PAU Madrid 2019

1.10.11

En una obra, para transportar la tierra extraída para la construcción de los cimientos de un edificio, se usan tres tipos de camiones diferentes: A, B y C. Los camiones de tipo A tienen una capacidad de 14 toneladas, los de tipo B, 24 toneladas y los de tipo C, de 28 toneladas. Habría que traer un camión más de tipo A para igualar al número de camiones restantes. El 10% de la capacidad de todos los camiones tipo B supone un séptimo de la de los de mayor tonelaje. Hoy, realizando un único viaje cada camión a máxima capacidad, se han extraído de la obra 302 toneladas de tierra.

a) ¿Cuántos camiones hay de de cada clase?

b) ¿Cuánta tierra ha sido transportada hoy por los camiones de cada tipo?

PAU Madrid 2023

1.10.12

Se quiere construir un invernadero para el cultivo de semillas con ambiente controlado de temperatura, humedad y composición del aire. El aire que hay que suministrar debe contener un 78% de nitrógeno, un 21% de oxígeno y un 1% de argón.

a) Si la capacidad del invernadero es 2000 litros, determine cuántos litros de nitrógeno, cuántos de oxígeno y cuántos de argón son necesarios.

b) Para suministrar el aire se dispone de tres mezclas gaseosas A, B y C, cuya composición se expresa en la tabla adjunta.

Mezcla	Nitrógeno	Oxígeno	Argón
A	80%	20%	0%
B	70%	20%	10%
C	60%	40%	0%

Obtenga la cantidad que hay que utilizar de cada mezcla para llenar el invernadero de aire con la composición requerida.

PAU Madrid 2020

1.10.13

Un grupo de estudiantes ha realizado un viaje por tres países (Francia, Alemania y Suiza). En los hoteles cada estudiante ha pagado: 20 euros diarios en Francia, 25 euros diarios en Alemania y 30 euros diarios en Suiza. En comidas cada uno ha gastado: 20 euros diarios en Francia, 15 euros diarios en Alemania y 25 euros diarios en Suiza. Además, el transportista les ha cobrado 8 euros diarios a cada uno. Sabiendo que el gasto total del viaje ha sido 765 euros por persona, que ha durado 15 días y que han estado en Francia el doble de días que en Suiza, obtenga el número de días que han estado en cada uno de los tres países.

PAU Madrid 2018

1.10.14

Una estudiante pidió en la cafetería 3 bocadillos, 2 refrescos y 2 bolsas de patatas y pagó un total de 19 euros. Al mirar la cuenta comprobó que le habían cobrado un bocadillo y una bolsa de patatas de más. Reclamó y le devolvieron 4 euros. Para compensar el error, el vendedor le ofreció llevarse un bocadillo y un refresco por solo 3 euros, lo que suponía un descuento del 40% respecto a sus precios originales. ¿Cuáles eran los respectivos precios sin descuento de un bocadillo, de un refresco y de una bolsa de patatas?

PAU Madrid 2019

1.10.15

En una academia de idiomas se imparten clases de inglés, francés y alemán. Cada alumno está matriculado en un único idioma. El número de alumnos matriculados en inglés representa el 60% del total de alumnos de la academia. Si diez alumnos de francés se hubiesen matriculado en alemán, ambos idiomas tendrían el mismo número de alumnos. Además, la cuarta parte de los alumnos de inglés excede en ocho al doble de la diferencia entre los alumnos matriculados en francés y alemán. Calcule el número de alumnos matriculados en cada idioma.

PAU Madrid 2022

1.10.16

Una tienda online de productos gourmet elabora tres tipos de cafés exclusivos, el Gold Cuvée (a 7.85 euros/kg), el Paradiso (a 13.3 euros/kg) y el Cremissimo (a 24.85 euros/kg). Para ello utiliza solo dos tipos de grano, el Arábica y el Robusta. El Gold Cuvée tiene un 90 % de grano tipo Arábica, el Paradiso un 85 % y el Cremissimo un 80 %. A lo largo de un mes han necesitado utilizar 27.1 kg de grano del tipo Robusta para atender todos los pedidos y han ingresado un total de 3112.5 euros. Sabiendo que se ha vendido doble cantidad de café Cremissimo que de las otras dos especialidades juntas, se pide calcular los kilogramos de grano del tipo Arábica que se han utilizado a lo largo de ese mes.

1.10.17

En una granja es venen pollastres, ànecs i perdius a raó de 9 €/kg, 7,2 €/kg i 15 €/kg, respectivament. En una setmana els ingressos totals van ser de 5 640 €. Sabem que la quantitat de pollastres venuts va superar en 100 kg la d'ànecs i que es va vendre la meitat de perdius que d'ànecs. Quina quantitat de cada tipus de carn que es va vendre?

1.10.18

L'Alba fa col·lecció de vídeos d'esport, música i pel·lícules, i ja en té 20. Els vídeos d'esports i de música junts fan el triple de les pel·lícules. Si comprés un altre vídeo de música, el seu nombre igualaria als d'esports. Quants vídeos té de cada tipus?

1.10.19

Una papereria posa a la venda 50 bolígrafs repartits entre tres tipus: blaus, rojos i negres. El nombre de bolígrafs blaus és 11 vegades la suma de la quantitat de bolígrafs negres més la meitat dels bolígrafs rojos. Ven per 3,75 euros cada bolígraf blau, per 2,25 cada bolígraf roig i per 1,5 cada bolígraf negre. Sabent que li han robat 2 bolígrafs negres i 4 de blaus, i que venent la resta dels bolígrafs ha recaptat 159 euros, quants bolígrafs rojos, blaus i negres tenia la botiga inicialment?

1.11 Mètode de Cramer de resolució de sistemes.

Fórmula del mètode de Cramer.

Donat un sistema de tres equacions i tres incògnites

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$ o expressat de forma matricial: $$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$$

Definim els següents determinants:

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$M_x = \begin{vmatrix} b_q & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad M_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \quad M_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_q \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

El sistema és compatible determinat si i només si $M \neq 0$, i en aquest cas la solució és

$$x = \frac{M_x}{M}, \; y = \frac{M_y}{M}, \; z = \frac{M_z}{M}$$

Si $M = 0$ el sistema és incompatible o compatible indeterminat.

Exercici resolt.

Resol el sistema mitjançant el mètode de **Cramer**: $$\begin{cases} 2x - y + 3z = 9 \\ -x + 2z = 5 \\ 3y - z = 3 \end{cases}$$

Solució:

Passem a forma matricial: $$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -20 \qquad x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{1}{-20}\begin{vmatrix} 9 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \frac{-20}{-20} = 1$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{1}{-20}\begin{vmatrix} 2 & -9 & 3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \frac{-40}{-20} = 2, \; z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{1}{-20}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 9 \\ -1 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \frac{-60}{-20} = 3$$

La solució és x = 1, y = 2 i z = 3.

1.12 Estudi de sistemes mitjançant determinant.

Esquema de l'estudi de sistemes mitjançant determinant.

Un sistema d’equacions quadrat, és a dir, de n files i n columnes, escrit en forma matricial:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{array}\right) = (A \mid b)$$

El sistema serà **Compatible Determinat** si i només si el determinant de la matriu de coeficients no és zero:

$$SCD \Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

Aquesta propietat ens permet una estratègia alternativa al mètode de Gauss per a estudiar un sistema:

$$\nearrow \det(A) \neq 0 \Rightarrow S.C.D$$

$$\searrow \det(A) = 0 \Rightarrow \begin{cases} S.C.I \\ S.I \end{cases} \text{ Hem d’estudiar cada cas per separat}$$

Aquest mètode separa el cas S.C.D dels altres dos, però té l’inconvenient que, si no és S.C.D., no diu si és S.C.I. o S.I. Haurem d’estudiar aquests casos especials amb el mètode de Gauss.

Unicoos: Discutir un sistema - Rouché-Frobenius 02 BACHILLERATO
https://youtu.be/xnRasQjUEf4

1.12.1 Exercici del Youtube

Estudia, amb el mètode del determinant, el següent sistema en funció dels valors del paràmetre a:

$$\left.\begin{array}{l} x+3y+z=a \\ 2x+ay-6z=8 \\ x-3y-5z=4 \end{array}\right\}$$

Solució: https://youtu.be/CL3luxGgXHo (Píldoras matemáticas)

1.12.2 Exercici del Youtube

Estudia, amb el mètode del determinant, el següent sistema en funció dels valors del paràmetre a:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=a \\ ax+y+z=1 \\ x+ay+2z=1 \end{array}\right\}$$

Solució: https://youtu.be/CL3luxGgXHo?t=402 (Píldoras matemáticas)

1.12.3 Exercici del Youtube

Estudia, amb el mètode del determinant, el següent sistema en funció dels valors del paràmetre a:

$$\left.\begin{array}{l} x+ay+z=1 \\ ax+y+(a-1)z=a \\ x+y+z=a+1 \end{array}\right\}$$

Solució: https://youtu.be/CL3luxGgXHo?t=693 (Píldoras matemáticas)

1.12.4 Exercici del Youtube

Estudia, amb el mètode del determinant, el següent sistema en funció dels valors del paràmetre a:

$$\left.\begin{array}{l} x+-my-z=0 \\ mx-4y+(6-2m)z=-8m \\ -x+2y+z=6 \end{array}\right\}$$

Solució: https://youtu.be/oUIXDCH61eg (Píldoras matemáticas)

1.12.5 Exercici del Youtube

Estudia, amb el mètode del determinant, el següent sistema en funció dels valors del paràmetre a:

$$\left.\begin{array}{l} 10x-20y-10z=8a+44 \\ 2x-5y+3z=4a+4 \\ 3x-7y+2z=5a+9 \end{array}\right\}$$

Solució: https://youtu.be/oUIXDCH61eg (Píldoras matemáticas)

1.12.6 Exercici del Youtube

Estudia, amb el mètode del determinant, el següent sistema en funció dels valors del paràmetre a:

$$\left.\begin{array}{l} x+m\,y=1 \\ -2x-(m+1)y+z=-1 \\ x+(2m-1)y+(m+2)z=2+2m \end{array}\right\}$$

Solució: https://youtu.be/oUIXDCH61eg?t=586 (Píldoras matemáticas)

1.12.7

Discutiu els següents sistemes d'equacions en funció del paràmetre.

a) $\begin{cases} 2x+\lambda y+\lambda z=1-\lambda \\ x+y+(\lambda-1)z=-2\lambda \\ (\lambda-1)x+y+z=\lambda-1 \end{cases}$ Resol el sistema per al cas $\lambda=1$

b) $\begin{cases} x+2y+(m+3)z=3 \\ x+y+(4+m-m^2)z=3 \\ 2x+4y+3(m+2)z=8 \end{cases}$ Resol el sistema per a m=-2

c) $\begin{cases} 2x+4y=4k \\ -k^3x+k^2y+k\,z=0 \\ x+k\,y=k^2 \end{cases}$ Resol el sistema per a $k=1$

d) $\begin{cases} x+y+mz=m+2 \\ 2x+(m+1)y+(m+1)z=-m \\ (m+2)x+3y+(2m+1)z=3m+4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x+k\,y+k^2z=1 \\ x+k\,y-k\,z=k^2 \\ -x+k\,y-k^2z=k^2 \end{cases}$

1.12.8

Estudia el següent sistema mitjançant el determinant de la matriu de coeficients. Resol el sistema quan sigui compatible indeterminat:

$$\left.\begin{array}{l} 2x-ky+z=1 \\ 2x+3y+z=k+3 \\ kx+ky+(k+1)z=-1 \end{array}\right\}$$

1.12.9

Sigui el sistema d'equacions lineals $\begin{cases} 2x+y=1+z \\ m\,y+z=2-x \\ m\,z+3=3x+y \end{cases}$, en què m és un nombre real.

a) Discutiu el sistema segons els valors del paràmetre m.
b) Resoleu el sistema, si té solució, per al cas m = 1.

PAU CAT TEC SET 2023 2.3 (Solució: PAUTEC pàg. 820)

1.12.10

Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real a:

$$\begin{cases} ax+2y+3z=2 \\ 2x+ay+z=a \\ x+y+4z=1 \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre a.
b) Resoleu, si és possible, el sistema per al cas a = 2.

PAU CAT TEC JUNY 2022 2.2 (Solució: PAUTEC pàg. 730)

1.12.11

Considereu el sistema d'equacions següent:

$$\left.\begin{array}{l} x+2y-a\,z=-3 \\ 2x+(a-5)y+z=4a+2 \\ 4x+(a-1)y-3z=4 \end{array}\right\}$$

a) Calculeu els valors del paràmetre a perquè el sistema no sigui compatible determinat.
b) Hi ha algun valor de a per al qual x=1, y= –3, z= –1 sigui l'única solució del sistema?

PAU CAT TEC JUNY 2011 1.4

1.12.12

Considereu el sistema d'equacions següent:

$$\left.\begin{array}{r} x+5y+z+a=0 \\ (a-2)z+x+2y-1=0 \\ (a-1)y+(1-a)x+z+a+2=0 \end{array}\right\}$$

a) Expliqueu, raonadament, si es tracta d'un sistema lineal homogeni.
b) Construïu-ne la matriu de coeficients i la matriu ampliada.
c) Trobeu els valors del paràmetre a per als quals el sistema no és compatible determinat, i estudieu el caràcter del sistema en cada un d'aquests casos.
d) Resoleu-lo solament quan el conjunt de les seves solucions és una recta de IR^3.

PAU CAT TEC SET 2009 1.6 (Problema)

1.12.13

Discutiu el sistema d'equacions lineals següent en funció dels valors del paràmetre m.

$$\begin{cases} x+y+(m-1)z=1 \\ x+(m-1)y+z=m-1 \\ (m-1)x+y+z=m+2 \end{cases}$$

PAU CAT TEC JUNY 2008 2.3

1.12.14

Discutiu el sistema d'equacions següent segons els valors del paràmetre λ

$$\begin{cases} \lambda x+y+z=1 \\ 4x+\lambda y+2z=\lambda \\ 8x+4y+2\lambda z=2\lambda \end{cases}$$

PAU COU

1.12.15

Discutiu el sistema d'equacions següent, segons els valors del paràmetre λ:

$$\begin{cases} \lambda x+y+4z=1 \\ -x-\lambda y+2z=\lambda \\ x-2\lambda y+14z=8 \end{cases}$$

PAU COU

1.12.16

Discutiu el sistema d'equacions següent, segons els valors del paràmetre λ:

$$\begin{cases} 2x+3\lambda y+z=\lambda \\ 4x+6y+2\lambda z=2\lambda \\ 6\lambda x+9y+3\lambda z=3\lambda \end{cases}$$

PAU COU

1.12.17

Discutiu el sistema d'equacions següent segons els valors del paràmetre λ:

$$\begin{cases} x+y+\lambda z=2 \\ \lambda x+\lambda y+9z=2\lambda \\ (\lambda/3)x+y+3z=2\lambda/3 \end{cases}$$

PAU CAT COU

1.12.18

a) Estudia, en funció del paràmetre m, el sistema d'equacions

$$\begin{cases} (m-1)\,x+y+z=3 \\ m\,x+(m-1)\,y+3\,z=2m-1 \\ x+2\,y+(m-2)\,z=4 \end{cases}$$

b) Resol el sistema per al cas SCI.

1.12.19

Sigui el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real λ:

$$\begin{cases} x+2\lambda y+(2+\lambda)z=0 \\ (2+\lambda)x+y+2\lambda z=3 \\ 2\lambda x+(2+\lambda)y+z=-3 \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre λ.
b) Per al cas λ = –1, resoleu el sistema, interpreteu-lo geomètricament i identifiqueu-ne la solució.

PAU CAT TEC JUNY 2023 #4 (Solució: PAUTEC, pàg. 792)

1.12.20 Exercici del Youtube

$$\begin{cases} 3x+y+az=a-2 \\ ax-y+z=a-2 \\ x+2y+z=0 \end{cases}$$

Solució: https://www.youtube.com/watch?v=TbGlLoXXCDc (Píldoras matemáticas)

1.12.21 Exercici del Youtube

a) $\begin{cases} x+3y+z=a \\ 2x+ay-6z=8 \\ x-3y-5z=4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y+z=a \\ ax+y+z=1 \\ x+ay+2z=1 \end{cases}$

Solució: https://www.youtube.com/watch?v=CL3luxGgXHo (Píldoras matemáticas)

1.12.22 Exercici del Youtube

a) $\begin{cases} x-my-z=0 \\ mx-4y+(6-2m)z=-8m \\ -x+2y+z=6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+my=1 \\ -2x-(m+1)y+z=-1 \\ x+(2m-1)y+(m+2)z=2+2m \end{cases}$

Solució: https://www.youtube.com/watch?v=oUIXDCH61eg (Píldoras matemáticas)

1.12.23

Estudia el sistema en funció del paràmetre m:

$$\begin{cases} x+y+(m+1)z=2 \\ x+(m-1)y+2z=1 \\ 2x+my+z=-1 \end{cases}$$

1.12.24

Estudia el sistema en funció del paràmetre a:

$$\begin{cases} x+(a^2-1)y+az=1 \\ (a^2-1)y+(a-1)z=0 \\ x+a^2z=0 \end{cases}$$

1.12.25

a) Estudia el següent sistema en funció dels valors del paràmetre k:

$$\begin{cases} x+ky+k^2z=1 \\ x+ky-kz=k^2 \\ -x+ky-k^2z=k^2 \end{cases}$$

b) Resol el sistema anterior per a $k=-1$.

1.12.26

Considereu el sistema d'equacions lineals

$$\left.\begin{array}{l} x-y+kz=0 \\ x+ky+z=3 \\ 2x+(k-1)y+2z=2 \end{array}\right\}$$

en què k és un paràmetre real.

a) Discutiu el sistema en funció del valor de k.

b) Resoleu el sistema per a k = 0 i per a k = 1.

PAU TEC JUNY 2023 5.2 (Sol. PAUTEC pàg. 845)

1.12.27

Considereu el sistema d'equacions següent:

$$\left.\begin{array}{l} 4x+2y-z=4 \\ x-y+kz=3 \\ 3x+3y=1 \end{array}\right\}$$

on k és un paràmetre real.

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre k, i resoleu-lo per a k = 0.

b) Resoleu el sistema per a k = –1.

c) Per a k = –1, modifiqueu la tercera equació de manera que el sistema esdevingui incompatible. Justifiqueu la resposta.

PAU CAT TEC JUNY 2024 1.2 (Solució: PAUTEC pàg. 902)

1.12.28

Considereu el sistema d'equacions següent, on m és un paràmetre real:

$$\left.\begin{array}{l} x-3y+mz=-2 \\ x+my+2z=3 \\ x+y+2z=m \end{array}\right\}$$

a) Discutiu el sistema segons el valor del paràmetre m.

b) Trobeu la solució del sistema per a m = 0.

c) Per a m = 2, doneu una solució (x, y, z) del sistema que, a més a més, compleixi x = 5y.

PAU CAT TEC SET 2024 #3.2 (Sol. PAUTEC pàg 927)

1.13 Problemes PAU amb sistemes 2×2.

1.13.1

Considereu el sistema d'equacions

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y - 1 = 0 \\ -x - y + 2 = 0 \end{array}\right\}$$

Justifiqueu si les afirmacions següents són certes:

a) Aquest sistema d'equacions representa dues rectes paral·leles perquè totes dues tenen pendent −1.

b) Aquest sistema és compatible determinat i la solució és x = 1, y = 1.

PAU CAT CCSS JUNY 2018 5.4

1.13.2

Considereu el sistema d'equacions lineals

$$\left\{\begin{array}{r} mx - y = m \\ 3x + (m-4)y = m+2 \end{array}\right., \text{ per a } m \in IR.$$

a) Discutiu el sistema d'equacions per als diferents valors del paràmetre m.

b) Resoleu el sistema en aquells casos en què el sistema sigui compatible.

PAU CAT TEC SET 2014 5.3

1.13.3

Si un venedor d'articles de luxe fa un descompte del 20% sobre el preu de venda d'un article, guanya 1.848€ sobre el preu de cost; si fa un descompte del 50%, perd 420€.

a) Calculeu el preu de cost i el preu de venda de l'article.

b) Quin percentatge aplica sobre el preu de cost per calcular el preu de venda?

PAU CAT CCSS SET 2014 5.1

1.13.4

Considereu la recta r, d'equació $x + 2y = 4$.

a) Escriviu l'equació d'una recta r′ que passi per l'origen de coordenades i que formi amb r un sistema d'equacions incompatible. Justifiqueu quina serà la posició relativa de les dues rectes.

b) Considereu una altra recta, que anomenarem s, que forma amb r un sistema de dues equacions amb dues incògnites que és compatible indeterminat. Justifiqueu quina és la posició relativa de les rectes r i s.

PAU CAT CCSS JUNY 2010 1.6

1.13.5

Donat el sistema $\left\{\begin{array}{l} x + py = p \\ px + y = p \end{array}\right.$

a) Discutiu-ne el caràcter en funció del paràmetre p.

b) Resoleu-lo quan p= 2.

PAU CAT TEC JUNY 2009 3.3

1.13.6

Considereu el sistema d'equacions següent:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ px+2y=-2 \end{array}\right\}$$

a) Discutiu el sistema segons els valors del paràmetre p.
b) Resoleu-lo per a p=5.

PAU CAT CCSS JUNY 2009 3.4

1.13.7

a) Discutiu el sistema següent segons els valors del paràmetre a:

$$\left.\begin{array}{l} x+(a+1)y=1 \\ ax+2y=-2 \end{array}\right\}$$

b) Resoleu-lo per al valor de a que el fa indeterminat.

PAU CAT CCSS JUNY 2007 2.1

1.13.8

Considereu el sistema següent en funció del paràmetre real a:

$$\left\{\begin{array}{l} x-ay=1 \\ ax+y=3 \end{array}\right.$$

a) Discutiu-lo en funció del paràmetre a.
b) Resoleu els casos compatibles.

PAU CAT TEC JUNY 2005 1.1

1.13.9

El preu d'un bitllet d'una línia d'autobusos és la suma d'una quantitat fixa i una altra proporcional al nombre de quilòmetres del recorregut. S'han pagat 18€ per un bitllet a una població que és a 500 km i 33€ per un altre a una ciutat que és a 1000 km. Quant haurem de pagar per un bitllet a una població que és a 250 km?

PAU CAT CCSS JUNY 2005 1.1

1.13.10

Tenim dues caixes de llibres A i B. Si passem 12 llibres de la caixa A a la B, totes dues caixes tindran la mateixa quantitat de llibres. Si passem 12 llibres de la B a la A, la caixa A tindrà el triple de llibres que la caixa B. Quants llibres conté cada caixa?

PAU CAT CCSS SET 2004 5.3

1.13.11

Una empresa de lloguer de cotxes ens ofereix la possibilitat d'escollir entre dues tarifes:

A: 20 € per dia més 0,2 € per quilòmetre recorregut
B: 40 € per dia

a) Per a cadascuna de les dues tarifes, expresseu el cost del lloguer en funció del nombre t de dies de durada del viatge i del quilometratge x.
b) Si s'han de fer 1000 km en 8 dies, a quina tarifa convé acollir-se? I si el viatge de 1000 km ha de durar 12 dies?
c) Si hem de fer 1000 km, per a quina durada del viatge el cost és el mateix amb les dues tarifes? Expliqueu quina tarifa ens interessa escollir en funció del nombre de dies que duri el viatge.

PAU CAT CCSS SET 2004 5.6

1.13.12

Tenim un litre de llimonada que conté un 25% d'aigua i un 75% de suc de llimona. Si hi afegim un quart de litre d'aigua obtenim llimonada més aigualida. Calculeu el percentatge d'aigua i de suc de llimona de la llimonada més aigualida.

PAU CAT CCSS JUNY 2004 4.1

1.13.13

Discutiu i, si escau, resoleu el sistema següent segons els valors del paràmetre a:

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + y = a \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$$

PAU CAT CCSS JUNY 2004 4.2

1.13.14

Un venedor té un salari mensual que està determinat per un sou fix més un cert percentatge sobre el volum de vendes que ha fet durant el mes. Si ven per valor de 2000€, el seu salari és de 1200€ i, si ven per valor de 2500€, el salari és de 1300€. Trobeu el percentatge que guanya sobre el total de vendes i el sou fix.

PAU CAT CCSS JUNY 2004 1.1

1.13.15

Considereu un sistema de dues equacions lineals amb dues incògnites i amb coeficients reals. És possible que el sistema tingui exactament dues solucions? I exactament tres solucions? Justifiqueu les respostes.

PAU CAT CCSS SET 2003 3.4

1.13.16

En començar l'any 2001, el nombre de refugiats sota l'empara de l'ACNUR (organisme de l'ONU) era de 12,10 milions.
a) Durant l'any 2000 el nombre de refugiats va augmentar un 4%. Quants n'hi havia en començar l'any 2000?
b) Durant l'any 2001 el nombre de refugiats va augmentar un 10%. Quants n'hi havia al final del 2001?
c) Suposant que a partir del 2002 hi haurà una disminució del 10% anual, quin any hi arribarà a haver menys d'un milió de refugiats?

PAU CAT CCSS SET 2002 1.4

1.13.17

A les rebaixes d'estiu una botiga anuncia que tots els articles estan rebaixats un 20%.
a) Si un article rebaixat ens ha costat 40 €, quant costava abans de les rebaixes?
b) Acabades les rebaixes, el botiguer pensa que, apujant el preu de tots els productes un 20%, tornarà al preu d'abans de les rebaixes. Creieu que és així? Quina variació percentual es produeix disminuint el 20% el preu original i després augmentant un 20% el preu rebaixat?
c) Quin ha de ser l'augment de preu que hauria d'aplicar als productes rebaixats per tornar al preu d'abans de les rebaixes?

PAU CAT CCSS JUNY 2002 3.3

1.13.18

¿Com ha de ser un sistema de tres equacions lineals amb dues incògnites perquè representi tres rectes que tenen exactament un punt comú a totes tres? Poseu un exemple i digueu, en l'exemple, quin és el punt en què es tallen les tres rectes.

PAU CAT CCSS SET 2001 4.4

1.13.19

Compreu dos productes i us costen 22.000 pessetes. La setmana següent feu la mateixa compra i, com que el primer article està rebaixat un 10% i el segon un 20% respecte a la setmana anterior, només us costa 18.600 pessetes. Quant us costarà la mateixa compra si en una altra ocasió els preus estan rebaixats un 10% i un 20%, respectivament, en relació amb els preus de la segona setmana?

PAU CAT CCSS SET 2000 2.5

1.13.20

Calculeu el valor de a que fa que el següent sistema d'equacions lineals sigui incompatible:

$$\begin{cases} 2x + ay = -a + 5 \\ ax + 8y = 2 \end{cases}$$

PAU CAT CCSS JUNY 2000 1.3

1.13.21

Una persona ha comprat dos productes en unes rebaixes. La suma de preus dels dos productes abans de rebaixar era de 5.000 pessetes. Al primer li han aplicat una rebaixa d'un 10% i al segon una rebaixa del 20%. Si la persona ha pagat 4.300 pessetes per tots dos, digueu quant valia cada un dels dos productes abans de les rebaixes.

PAU CAT CCSS SET 1999 5.3

1.13.22

Considereu el sistema d'equacions lineals

$$\left.\begin{aligned} ax - y &= 2 - a \\ 2x - (a+1)y &= 2 \end{aligned}\right\}$$

on a és un paràmetre. Per a quins valors de a el sistema és compatible i determinat? Per a quins valors és compatible i indeterminat? Per a quins valors és incompatible?

PAU CAT CCSS JUNY 1999 1.1

1.13.23

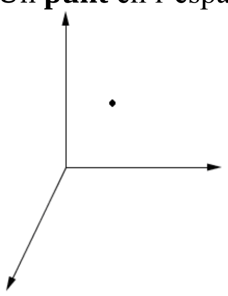
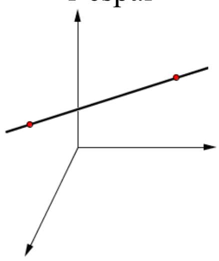
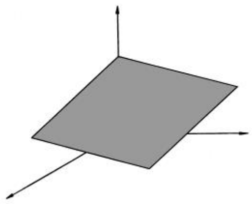
Si un milió de votants de l'esquerra haguessin votat la dreta, totes dues coalicions haurien obtingut el mateix nombre de vots. Però si, contràriament, un milió de votants de la dreta haguessin votat l'esquerra, aquesta hauria obtingut el triple de vots que aquella. Quants vots ha obtingut cada coalició?

PAU CAT CCSS SET 1998 2.2

1.14 El conjunt de solucions d’un sistema lineal.

Els conjunts de solucions d'un sistema 3x3 s’ampliarà amb la seva interpretació geomètrica com a posició relativa de tres plans en l'espai.
Vegeu els apartats 6.4 i 6.5 del Llibre de geometria lineal.

Observa els següents quatre exemples de sistemes lineals :

$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 13 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & 4 & 19 \end{array}\right)$	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 2 & 12 \\ 3 & 3 & 3 & 18 \end{array}\right)$	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \end{array}\right)$ 0 files buides després de la triangularització	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ 1 fila buida després de la triangularització	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ 2 files buides després de la triangularització	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ 3 files buides després de la triangularització
Conjunt solució: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$ SCD amb 0 graus de llibertat Un **punt** en l’espai  Dimensió = 0	Conjunt solució: $\begin{cases} x = -2\lambda + 7 \\ y = \lambda - 1 \\ z = \lambda \end{cases}$ SCI amb un grau de llibertat Una **recta** en l’espai  Dimensió = 1	Conjunt solució: $\begin{cases} x = -\gamma - \lambda + 6 \\ y = \gamma \\ z = \lambda \end{cases}$ SCI amb 2 graus de llibertat Un **pla** en l’espai  Dimensió = 2	Conjunt solució: $\begin{cases} x = \mu \\ y = \gamma \\ z = \lambda \end{cases}$ SCI amb 3 graus de llibertat **Tot l’espai** Dimensió = 3

Idea clau molt importat:

Dimensió del conjunt solució = Nombre de files no buides després de fer triangularització

1.15 Notes històriques.

L’estudi dels sistemes d’equacions lineals fou iniciat per Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Ja el 1693 Leibniz considera un sistema de tres equacions lineals amb dues incògnites, elimina les incògnites i obté un determinant (la resultant del sistema).

La solució de sistemes d’equacions lineals utilitzant el que avui anomenem determinants fou ideada per Colin Maclaurin (1698-1746) el 1729. Gabriel Cramer (1704-1752) primer, i després el 1764 Étienne Bézout (1730-1783), van demostrar que un sistema homogeni quadrat té solució no trivial si i només si el determinant del sistema s’anul·la. També durant aquest segle Jean-Baptiste le Rond d’Alembert (1717-1783) demostra que la solució general d’un sistema s’obté sumant una solució particular a les solucions del sistema homogeni associat.

L’existència i nombre de solucions foren temes discutits per Henry J.S. Smitch (1826-1883) el 1861 en termes dels rangs de la matriu del sistema i de la matriu ampliada. La major part de resultats en aquest sentit es deuen a Leopold Kronecker (1823-1891) i a Arthur Cayley (1821-1895) i apareixen ja el 1867 en el llibre de Charles L. Dodgson (Lewis Caroll (1832-1898), l’autor d’*Alícia al país de les meravelles*) *An elementary theory of determinants*.

2 Matrius. Operacions amb matrius.

2.1 Matrius. Operacions amb matrius.

Definició. Matriu.

Una matriu és un conjunt de nombres organitzats en files i columnes, i delimitats per claudàtors. Per exemple, aquestes són dues matrius:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -7 \\ -5 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 6 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

La primera té 3 files i 3 columnes, i es diu que la seva dimensió és 3×3, mentre que la segona té 2 files i 4 columnes, és a dir, la seva dimensió és 2×4. En general, una matriu *A* de dimensió n×m, és a dir, de n files i m columnes s'escriu de la següent manera:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Pot observar-se com cada element de la matriu es descriu amb dos subíndexs, el primer referit a la fila, i el segon, a la columna. Així, a_{25} indicaria l'element de la fila 2, columna 5 de la matriu *A*. La diagonal d'una matriu està formada per aquells elements els subíndexs dels quals són iguals, és a dir, la diagonal és a_{11}, $a_{22}, a_{33} \ldots$

Matrius notables. Algunes matrius destacables són:

Matriu fila. És una matriu amb una única fila, és a dir, de dimensió $1\times n$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Matriu columna. És una matriu amb una única columna, és a dir, de dimensió $n\times 1$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Matriu quadrada: És la matriu que té el mateix nombre de files que de columnes, és a dir, de dimensió $n\times n$.

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -5 & 9 \\ -1 & 3 & -7 \\ -3 & 6 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 8 & 5 & -4 & 9 \\ 4 & -6 & 4 & -7 \\ -5 & 7 & 0 & -5 \\ 9 & -3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriu diagonal: és la matriu quadrada els elements de la qual són 0 excepte els de la diagonal.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriu identitat: matriu diagonal en què tots els elements de la diagonal són 1. La matriu identitat de dimensió $n\times n$ s'indica amb I_{n}.

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Transposició de matrius.

La matriu transposada d'una matriu *A*, denominada A^T, és la matriu que resulta de canviar files per columnes en la matriu *A*. Per exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 7 & -4 \\ 8 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \\ 5 & -1 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 3 & 5 \\ 7 & -3 & 0 & -1 \\ -4 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Pot observar-se que, per exemple, la primera fila de *A* coincideix amb la primera columna de A^T, la segona fila de A amb la segona columna de A, i així amb totes.

Propietats de la matriu transposada.

a) La transposada de la matriu transposada és la matriu original:

$$\left(A^T\right)^T = A$$

b) La transposada de la suma de dues matrius és la suma de transposades :

$$\left(A + B\right)^T = A^T + B^T$$

c) La transposada del producte d'un nombre per una matriu és el producte del nombre per la transposada de la matriu:

$$(kA)^T = kA^T$$

d) La transposada del producte de dues matrius es el producte de transposades, <u>intercanviant l'ordre</u>:

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

2.2 Suma i resta de matrius.

Suma de matrius.

La suma de dues matrius és una altra matriu, i cadascun dels seus elements és igual a la suma dels elements de les dues matrius anteriors amb els mateixos subíndexs. Evidentment, la suma solament pot realitzar-se entre matrius de la mateixa dimensió, i el seu resultat també tindrà idèntica dimensió. Per exemple, donades aquestes matrius:

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -6\\ 8 & 4 & 7\\ 3 & -9 & -3\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}8 & -5 & 3\\ -7 & 4 & 6\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix}3 & -2 & 8\\ -4 & 5 & 0\end{pmatrix}$$

La sumes A+C i B+C no poden realitzar-se perquè són matrius de diferent dimensió. En canvi, sí que és possible sumar A+B, d'aquesta manera:

$$A+B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -6\\ 8 & 4 & 7\\ 3 & -9 & -3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8 & -5 & 3\\ -7 & 4 & 6\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+8 & 1+(-5) & -6+3\\ 8+(-7) & 4+4 & 7+6\\ 3+2 & -9+0 & -3+1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}6 & -4 & 3\\ 1 & 8 & 13\\ 5 & -9 & -2\end{pmatrix}$$

Resta de matrius.

La resta entre matrius es realitza de manera similar, tenint en compte que en lloc de sumar els elements de les matrius, es resten.

$$\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ -2 & 4 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 3 & -3\\ 5 & -2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-1 & -1-3 & 0-(-3)\\ -2-5 & 4-(-2) & 1-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -4 & 3\\ -7 & 6 & -3\end{pmatrix}$$

Propietats de la suma de matrius

a) Associativa: $A+(B+C)=(A+B)+C$

b) Commutativa: $A+B=B+A$

c) Existència de matriu nul·la o element neutre. La matriu **nul·la** (o matriu "zero") de n files i m columnes és la matriu d'aquesta dimensió tots els elements de la qual són zeros.

$$0_{3\times 2}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Donada qualsevol matriu de dimensions $n\times m$, es verifica

$$A+0_{n\times m}=0_{n\times m}+A=A$$

d) Existència de matriu oposada. $A+(-A)=0$
Donada qualsevol matriu A, la seva matriu oposada és la que obtenim en canviar tots els elements de signe:

Exemple:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow -A=\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Es verifica que la suma d'una matriu A i la seva oposada –A és la matriu nul·la.

2.2.1

Donades $A=\begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix} -4 & 2 & -5 & 3 \\ 1 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, calcula $A+B$

2.2.2

Calcula $A+B$ on $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \\ -4 & -4 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

2.2.3

Calcula $A-B$ on $A=\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 2 & -3 \\ -3 & -4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 2 & -4 \\ 2 & -4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

2.2.4

Calcula $A-B$ on $A=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

2.3 Multiplicació d'una matriu per un nombre.

Per a realitzar el producte d'un nombre per una matriu només cal multiplicar cada element d'aquesta matriu pel nombre. Per exemple, seguint amb la mateixa matriu A, si la multipliquem per 3, aquest és el resultat:

$$3A = 3\begin{pmatrix} -2 & 1 & -6 \\ 8 & 4 & 7 \\ 3 & -9 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot(-2) & 3\cdot 1 & 3\cdot(-6) \\ 3\cdot 8 & 3\cdot 4 & 3\cdot 7 \\ 3\cdot 3 & 3\cdot(-9) & 3\cdot(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 & -18 \\ 24 & 12 & 21 \\ 9 & -27 & -9 \end{pmatrix}$$

Propietats del producte d'un nombre per una matriu.

a) $1A = A$

b) $0A = 0$

c) Distributiva (I): $k(A+B) = kA + kB$

d) Distributiva (II): $(a+b)A = aA + bA$

2.3.1

Calcula 3A, on $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

2.3.2

Calcula $-2A$, on $A = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

2.4 Multiplicació de matrius.

Se multiplica cada fila de la matriu de l'esquerra per cada columna de la matriu de la dreta.

No sempre dues matrius són multiplicables: El nombre de columnes de la matriu esquerra ha de coincidir amb el nombre de files de la matriu dreta.

La matriu resultant tindrà tantes files com la matriu esquerra, i tantes columnes com la matriu dreta. Observa detingudament el següent exemple:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 9 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 5+1\cdot 3+3\cdot 1 & 2\cdot 0+1\cdot 9+3\cdot 6 \\ 4\cdot 5+0\cdot 3+(-1)\cdot 1 & 4\cdot 0+0\cdot 9+(-1)\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 27 \\ 19 & -6 \end{pmatrix}$$

Propietats del producte de matrius.

El producte de matrius té les següents propietats:

a) Associativa: $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$

b) Distributiva: $A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$, $(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$

En general, **el producte de matrius no és commutatiu**: $A\times B \neq B\times A$.
Per exemple:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ però } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Existència d'element neutre. Matrius invertibles.
L'element neutre del producte de matrius quadrades és **la matriu identitat**, I_n

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{per exemple: } I_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si A és una matriu quadrada n×n, $A \times I_n = I_n \times A = A$.

Existeixen matrius quadrades que tenen element invers, també es diu que la matriu A és invertible. La matriu inversa d'una matriu quadrada de dimensió n×n A, s'indica A^{-1}, i compleix:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

Algunes propietats que funcionaven amb nombres no funcionaran ara amb matrius.
Per exemple: De $A\cdot B = 0$ no se segueix necessàriament que $A = 0$ o $B = 0$
Vegeu l'apartat 2.9

2.4.1

Calcula $A\cdot B$

a) $A=\begin{pmatrix}-5 & 1\\ 1 & 0\\ 3 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 2 & -5\\ -4 & 0 & -1\end{pmatrix}$ b) $A=\begin{pmatrix}-5 & 0 & 5\\ 1 & -4 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & 5\\ 5 & -4\end{pmatrix}$

c) $A=\begin{pmatrix}2 & 4 & -3\\ 3 & -2 & 2\\ 1 & -5 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & -1 & 3\\ 3 & -1 & -5\\ -3 & 1 & -2\end{pmatrix}$

d) $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & -4 & -3\\ -2 & -3 & 1 & 3\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -3 & -1\\ 2 & 1\\ 3 & 0\end{pmatrix}$

2.4.2

Calcula $A\cdot B$ i $B\cdot A$ i comprova que el producte de matrius no és commutatiu: $A\cdot B\neq B\cdot A$

$$A=\begin{pmatrix}3 & -4\\ 2 & -4\end{pmatrix} ,\ B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix}$$

2.4.3

Donades les matrius

$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ $D=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}$

$E=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ $F=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Efectua, si és possible, les operacions següents:

a) $A\cdot B$ b) $A\cdot B^T$ c) $A\cdot C$ d) $A\cdot D$ e) $A\cdot D^T$

f) $B\cdot E$ g) $D\cdot B$ h) $D^T\cdot F$

2.4.4

Calcula $A\cdot B+C$, on $A=\begin{pmatrix}-2 & -4\\ 1 & 2\\ -3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 0 & -1\\ -3 & -2\end{pmatrix}$

2.4.5

Calcula $A \cdot B - C$, on $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -2 & 0 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$

2.4.6

Indiqueu TOTS els productes de dues matrius diferents que es poden fer amb les matrius següents:

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad E=\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$$

PAU CAT CCSS SET 2006 4.4

2.4.7

Siguin les matrius

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ i } C=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Trobeu la matriu X = A · (B – C).

PAU CAT CCSS SET 2005 3.2

2.4.8 Exercici del Youtube

Suma i producte de matrius.

a) Determina $A+B$, $A-B$ i $3A$, on $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Determina $C \cdot D$, on $C=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ i $D=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Solució: https://youtu.be/Ix6bhr92T2w (Xavi Mates)

2.4.9 Exercici del Youtube (en anglès)

Multiplicació d'una matriu per una constant. Multiplicació de matrius.

a) Calcula $3A$, on $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}$.

b) Calcula AB, on $A=\begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & 9 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

Solució: https://youtu.be/T1h71v-u3SQ (mathbff)

Fora de programa: "Matemàtiques i Literatura. Oulipo".

Dentro del proyecto **Oulipo** encontramos Meccano o el Análisis Matricial del Lenguaje, donde Queneau utiliza las reglas del producto de matrices para generar textos.

Queneau explica en primer lugar como se realiza el producto de dos matrices, y lo ejemplifica después con:

$$\begin{pmatrix} \text{el} & \text{ha} & \text{al} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \text{gato} \\ \text{comido} \\ \text{ratón} \end{pmatrix} = \text{el} \times \text{gato} + \text{ha} \times \text{comido} + \text{al} \times \text{ratón}$$

es decir, **El gato ha comido al ratón.**

Así, usando la misma técnica matemática, el producto siguiente:

$$\begin{pmatrix} \text{el} & \text{ha} & \text{el} \\ \text{un} & \text{ha} & \text{el} \\ \text{el} & \text{había} & \text{un} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \text{gato} & \text{ratón} & \text{león} \\ \text{comido} & \text{devorado} & \text{degustado} \\ \text{pez} & \text{queso} & \text{turista} \end{pmatrix}$$

proporciona el “texto-producto”:

El gato ha comido el pez;
el ratón ha devorado el queso;
el león ha degustado el turista.

Un gato ha comido el pez;
Un ratón ha devorado el queso;
Un león ha degustado el turista.

El gato había comido un pez;
El ratón había devorado un queso;
El león había degustado un turista.

O aún da otro ejemplo más complicado:

$$\begin{pmatrix} \text{El} & 1 & \text{de} & \text{la} & \text{se} & \text{al} & \text{de} & \text{la} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \text{sol} & \text{sherpa} & \text{socorrista} & \text{sicario} \\ \text{negro} & \text{tibetano} & \text{fornido} & \text{enamorado} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \text{melancolía} & \text{expedición} & \text{playa} & \text{marquesa} \\ \text{levantaba} & \text{aferraba} & \text{bañaba} & \text{escondía} \\ \text{final} & \text{pico} & \text{borde} & \text{lado} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \text{autopista} & \text{montaña} & \text{costa} & \text{almena} \end{pmatrix}$$

que se transforma en:

El sol negro de la melancolía se levantaba al final de la autopista.
El sherpa tibetano de la expedición se aferraba al pico de la montaña.
El socorrista fornido de la playa se bañaba al borde de la costa.
El sicario enamorado de la marquesa se escondía al lado de la almena.

¿Te atreves a generar tus propios textos usando esta técnica? ¡Se ahorra tinta!

Nota: Las matrices originales están en francés. La traducción del tercer ejemplo ha sido bastante “libre” para generar un texto correcto… al menos gramaticalmente.

Fuente: https://ztfnews.wordpress.com/2010/09/02/meccano-o-el-analisis-matricial-del-lenguaje/ , **Autora:** M. Macho

2.5 Potència de matrius. Matrius cícliques.

Potència de matrius.

Per poder calcular la potència d'una matriu ha de ser quadrada, i definim la potència de matrius de la mateixa manera que la potència de nombres, com a producte repetit:

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n\ vegades}$$

2.5.1

Calcula A^2, on $A = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

2.5.2

Calcula A^2, on $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

2.5.3

Calcula A^2, on $A = \begin{pmatrix} -7 & 7 & 0 \\ -8 & 7 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Observa que la potència d'una matriu no és la matriu de potències:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1^2 & 8^2 \\ 1^2 & 0^2 \end{pmatrix}$$

Definició. Matrius cícliques.

Si estudiem el comportament d'una cadena de potències d'un nombre real:

$$n \to n^2 \to n^3 \to n^4 \to \ldots$$

Si $|n| > 1$ la successió tendeix a l'infinit i si $|n| < 1$ la successió tendeix a zero. Si $n = 1$ la successió és estable i sempre val 1, però amb el nombre –1 es produeix un fenomen de repetició, un cicle:

$$(-1) \to (-1)^2 = 1 \to (-1)^3 = -1 \to (-1)^4 = 1 \to \ldots$$

Aquest mateix fenomen de repetició succeeix amb algunes matrius, anomenades **cícliques**.

Volem estudiar el comportament d'una cadena de potències d'una matriu:

$$A \to A^2 \to A^3 \to A^4 \to \ldots$$

Veurem que amb algunes matrius també es produeix el mateix fenomen.

2.5.4

Donada la matriu $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, calcula M^{147}.

2.5.5

Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcula A^{257}.

2.5.6

Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, en què a és un paràmetre real.

a) Si anomenem I la matriu identitat d'ordre 2, trobeu el valor de a per al qual $A^2 = I$.
b) Per a a = –1, calculeu A^2, A^3 i A^4. Feu servir els càlculs anteriors per a deduir el valor de A^{-1} i de A^{23}.

PAU CAT CCSS SET 2023 2.5 (Solució: PAUCCSS pàg. 659)

2.5.7

Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$.

a) Comproveu que $A^3 - I = 0$, en què I és la matriu identitat d'ordre 2.
b) Calculeu A^{11} utilitzant la informació de l'apartat a.

PAU CAT CCSS SET 2017 2.5

2.5.8

Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculeu A^2, A^3 i A^4.
b) Calculeu A^{201} i A^{344}.

PAU CAT CCSS JUNY 2013 3.3

2.5.9

Considerem les matrius $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Justifiqueu si és possible efectuar A·B o B·A. En cas afirmatiu, calculeu-ho.
b) Calculeu B^2 i B^3.

PAU CAT CCSS JUNY 2012 3.2

2.5.10

Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calculeu A^2 i A^3.
b) Deduïu el valor de A^{101}.

Nota: Treballeu amb radicals; no utilitzeu la representació decimal dels elements de la matriu.

PAU CAT TEC SET 2011 2.4

2.5.11

Siguin $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Comproveu que la inversa de A és A^2.
b) Comproveu també que $A^{518}=B$.

PAU CAT TEC JUNY 2009 4.2

2.5.12

Considereu les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Trobeu la matriu M, quadrada d'ordre 2, tal que $M \cdot A=B$.
b) Comproveu que $M^2=I_2$ (matriu identitat d'ordre 2) i deduïu l'expressió de M^n.

PAU CAT TEC JUNY 2008 2.2

2.5.13

Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculeu A^2 i A^3.
b) Determineu, raonadament, el valor de A^{60124}.

PAU CAT TEC SET 2008 4.2

2.5.14

Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & q \end{pmatrix}$. Trobeu els valors de p i q que fan que es verifiqui $A^2=A$. En aquest cas, raoneu sense calcular què val A^{10}.

PAU CAT TEC SET 2007 3.3

2.5.15

Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculeu A^{55}.

PAU CAT CCSS JUNY 2005 1.2

2.5.16 Exercici del Youtube

Determina A^{131}, on $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

Solució: https://youtu.be/xXMhznrZIes (Mates con Andrés)

2.5.16 Exercici del Youtube

Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, calcula A^{19}, A^{20}, A^{21}.

Solució: https://youtu.be/CFc2k5Ftu8M (profesor10demates)

2.5.17 Exercici del Youtube

Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcula A^{257}.

Solució: https://youtu.be/pnEPfXVAblk (alfonsoeducador)

Potències de matrius que segueixen una pauta.

Algunes matrius no són cícliques, però les seves potències successives segueixen una pauta que podem determinar. Observa el següent exemple:

Exercici resolt.

Calcula A^{17}, on $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Solució:

$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

Observem que no és una matriu cíclica, però segueix la següent pauta:

Si n és parell: $A^n = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -n & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ Si n és senar: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & -1 \end{pmatrix}$

Per tant, $A^{17} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 17 & -1 \end{pmatrix}$

Si som rigorosos, no és suficient "veure" com es comporta la matriu A^n, cal demostrar que, efectivament, això passa sempre. En aquest tipus de problema s'aplica un mètode de demostració anomenat "**demostració per inducció**".

2.5.18

Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Trobeu l’expressió general de A^n. Demostreu que la inversa de A^n és

$$\begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Trobeu la matriu X que satisfà l’equació matricial $A^{10} X – A^{20} = A$.

PAU CAT CCSS JUNY 2021 2.5 (Solució: PAUCCSS pàg. 531)

2.5.19

Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}$, en què a és un nombre real.

a) Calculeu A^2, A^3 i A^4.
b) Deduïu quant valdrà la matriu A^{100}.

PAU CAT CCSS JUNY 2021 5.6 (Solució: PAUCCSS pàg. 540)

2.5.20

Considereu la matriu $A=\begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$ on a i b són nombres reals.

a) Calculeu el valor de a i b per tal que $A^2=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Segons els valors obtinguts en l'apartat anterior, calculeu A^3 i A^4.
c) Si n és un nombre natural qualsevol, doneu l'expressió de A^n en funció de n.

PAU CAT TEC JUNY 2008 5.2

2.5.21

Donades les matrius $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) trobeu una matriu X tal que A · X = B;
b) calculeu B^{100}. Raoneu la resposta.

PAU CAT TEC SET 2004 5.3

2.5.22

Donada la matriu

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

es demana determinar, de forma raonada, la matriu A^n.

2.5.23

Sigui k un nombre natural. Definim la matriu $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula A^k.

2.5.24 Exercici del Youtube

Donada la matriu

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determina A^{2018} i A^n.

Solució: https://youtu.be/DQTXFcvpfQw (profesor10demates)

2.5.25

Donada la matriu $M=\begin{pmatrix} -1/2 & 3/4 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$, determina M^{31}.

2.6 Equacions matricials petites.

Una equació matricial és una equació on intervenen matrius.
Si les matrius són petites (normalment 2×2) es poden resoldre amb una matriu incògnita simbòlica, és a dir, amb una matriu "de lletres":

$$X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Exercici resolt.

Resol l'equació $AX+B=C$, on $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -29 & -10 \end{pmatrix}$

Solució:

Sigui $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$AX+B=C \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -29 & -10 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2a+2c & 2b+2d \\ 4a-3c & 4b-3d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -29 & -10 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2a+2c-1 & 2b+2d+0 \\ 4a-3c+2 & 4b-3d-4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -29 & -10 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+2c-1=1 \\ 2b+2d+0=4 \\ 4a-3c+2=-29 \\ 4b-3d-4=-10 \end{cases}$$

Resolem el sistema $2x2$ de la primera i tercera equació:

$$\begin{cases} 2a+2c-1=1 \\ 4a-3c+2=-29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a+4c-2=2 \\ 4a-3c+2=-29 \end{cases} \Rightarrow 7c-4=31 \Rightarrow 7c=35 \Rightarrow c=\frac{35}{7}=5$$

$$2a+2\cdot 5-1=1 \Rightarrow 2a=1+1-10=-8 \Rightarrow a=\frac{-8}{2}=-4$$

Resolem el sistema $2x2$ de la segona i quarta equació:

$$\begin{cases} 2b+2d+0=4 \\ 4b-3d-4=-10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4b+4d+0=8 \\ 4b-3d-4=-10 \end{cases} \Rightarrow 7d+4=18 \Rightarrow 7d=14 \Rightarrow d=\frac{14}{7}=2$$

$$2b+2\cdot 2+0=4 \Rightarrow 2b+4=4 \Rightarrow 2b=4-4=0 \Rightarrow b=0$$

Per tant, $X=\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

2.6.1 Exercici del Youtube

Resol la següent equació matricial $AX = B$, on $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 5\end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix}10 & 4\\ 23 & 11\end{pmatrix}$

Solució: https://youtu.be/kuiYUYtjU18 (MathBechy)

2.6.2

Considereu les matrius $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ i $C=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 0 & 7\end{pmatrix}$.

a) Raoneu que la matriu B és invertible i després calculeu B^{-1}.
b) Calculeu la matriu X que satisfà la igualtat A + B · X = C · A.

PAU CAT TEC JUNY 2021 5.1 (Solució: PAUTEC pàg. 661)

2.6.3

Resol l'equació $AX + B = C$, on

$$A=\begin{pmatrix}5 & -1\\ 1 & -2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-5 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}10 & -23\\ 12 & -12\end{pmatrix}$$

2.6.4

Considereu les matrius $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

a) Comprova que es compleix que $A^{-1} = A^2$.
b) Resoleu l'equació matricial $A \cdot X + B = I$ en què I és la matriu identitat d'ordre 2.

PAU CAT TEC JUNY 2015 2.5

2.6.5

Considerem la matriu $A=\begin{pmatrix}x & -2\\ 5 & -x\end{pmatrix}$. Estudieu per a quins valors de A la matriu inversa de la matriu A coincideix amb la seva oposada, és a dir, $A^{-1} = -A$.

PAU CAT TEC SET 2020 4.1

2.6.6

Responeu a les qüestions següents:

a) Calculeu la matriu de la forma $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ que satisfà $A^2 – A = I$, en què I és la matriu identitat, $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

~~b) Calculeu A^{-1} i comproveu que el resultat es correspon amb el que obteniu de deduir la matriu A^{-1} a partir de la igualtat $A^2 – A = I$.~~

PAU CAT TEC JUNY 2015 2.5

2.6.7

Considereu la matriu $A=\begin{pmatrix} a-1 & 1 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix}$. Sigui I la matriu identitat d'ordre 2.

a) Trobeu el valor del paràmetre a perquè es compleixi que $A^2 - 2A = I$
~~b) Calculeu la matriu inversa de la matriu A quan a = – 2.~~

PAU CAT TEC JUNY 2013 3.2

2.6.8

Si tenim la matriu invertible A i l'equació matricial X·A+B=C:
a) Aïlleu la matriu X.

b) Trobeu la matriu X quan $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ i $C=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

PAU CAT TEC JUNY 2011 1.2

2.6.9 Exercici del Youtube

Sigui $A=\begin{pmatrix} x & -2 \\ 1 & y \end{pmatrix}$. Trobeu els valors de les variables x i y perquè es compleixi que $A^2=A$.

Solució: https://youtu.be/wj-r4isFDN4 (Mates con Andrés)

2.6.10

Sigui $A=\begin{pmatrix} x & 3 \\ -2 & y \end{pmatrix}$. Trobeu els valors de les variables x i y perquè es compleixi que $A^2=A$.

PAU CAT TEC JUNY 2010 1.6

2.6.11

Considereu la matriu $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & -b \end{pmatrix}$. Calculeu el valor dels paràmetres a i b

perquè $A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

PAU CAT TEC SET 2009 1.1

2.6.12

Considereu les matrius $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Trobeu una matriu X que compleixi A · X + A = B.

PAU CAT TEC JUNY 2004 1.3

2.6.13

Determineu una matriu quadrada X que verifiqui $AX + XA = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ on $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. ~~Després analitzeu si la matriu X és invertible, i en aquest cas calculeu la seva matriu inversa~~.

Solució: $X = \begin{pmatrix} 3/2 & -1 \\ -1/4 & 2 \end{pmatrix}$ PAU ZARAGOZA SET 2004

2.6.14

a) Siguin les matrius $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Calculeu la matriu X per a la qual es verifica l'equació matricial $XA^2 = B$.
b) Trobeu la matriu A^{17}. Raoneu el procediment.

PAU CCSS EUSKADI JUNY 2014

2.6.15

a) Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ i l'equació $2A^2 + xA - yI = 0$, on I és la matriu identitat d'ordre 2 i 0 és la matriu nul·la del mateix ordre. Calculeu els valors de x i y per als quals es verifica l'equació.
b) Trobeu la matriu X pera a la que es verifica la següent equació matricial: $A + 2X = 3A^T$, on A^T és la matriu transposada de la matriu A.

PAU CCSS EUSKADI JUNY 2013

2.6.16

Siguin $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ i O la matriu nul·la 2x2. Es demana:
a) Trobeu totes les matrius X tals que AX=B.
b) Trobeu totes les matrius Y tals que YB=O.

PAU ZARAGOZA SET 1996

2.6.17

Resoleu les qüestions següents:

a) Considereu la matriu $M=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculeu els valors de a i b per tal que es verifiqui la igualtat $M^2 + a\cdot M + b\cdot I = 0$, en què I és la matriu identitat $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $0=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ és la matriu nul·la.

b) Considereu la matriu $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Trobeu totes les matrius B que commuten amb la matriu A, és a dir, que compleixen que A·B = B·A.

PAU CAT CCSS JUNY 2019 1.2 (Solució: PAUCCSS pàg. 430)

2.6.18

Siguin les matrius $A=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & -a \end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix} b & c \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calculeu les matrius A+B i A·B.
b) Determineu els valors de a, b i c que compleixen que A+B = A·B.

PAU CAT CCSS JUNY 2015 2.4

2.6.19

Siguin les matrius $A=\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ i $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, determineu x per tal que es verifiqui l'equació $A^2-6A+5I=0$, on 0 és la matriu en què tots els elements són 0.

PAU CAT CCSS JUNY 2014 3.4

2.6.20

Siguin les matrius $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix} -2 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Resoleu l'equació matricial X+2A=X·A, on X és la matriu incògnita.
b) Hi ha cap matriu Y que verifiqui Y·A=B? I que verifiqui A·Y=B? Justifiqueu les respostes.

PAU CAT CCSS SET 2013 1.4

2.6.21

Siguin les matrius $A=\begin{pmatrix} 2 & a \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ b & -1 \end{pmatrix}$.

a) Determineu el valor dels paràmetres a i b que fa que A·B=B·A.
b) Determineu el valor de a per al qual es verifica $A^2 = 2A$.

PAU CAT CCSS JUNY 2013 4.2

2.6.22

Considerem les matrius $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ i $C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.

a) Trobeu una matriu X que compleixi que A·B+X=C.
b) Calculeu C^3.

PAU CAT CCSS SET 2012 4.6

2.6.23

Considereu la matriu $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

a) Una matriu B, la primera fila de la qual és (1, 0), té dues columnes i compleix que $A\cdot B=\begin{pmatrix}5 & -2\\ 3 & -5\end{pmatrix}$. Completeu-la.

b) Feu els càlculs pertinents per a comprovar que $(A\cdot B)^t=B^t\cdot A^t$.

PAU CAT CCSS JUNY 2011 1.4

2.6.24

Considereu les matrius següents:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -4 & -2\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 5 & -4\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

a) Determineu la matriu X perquè $X+BC=A^2$.
b) Calculeu les matrius C^6 i C^7.

PAU CAT CCSS SET 2010 2.5

2.6.25

Donades les matrius $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{pmatrix}$, esbrineu si existeix una matriu C que compleixi B•C = A , i si s'escau, calculeu-la.

PAU CAT CCSS JUNY 2006 1.2

2.6.26

Determina la matriu X que verifica $AX=BC$, on:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}\ ,\ B=\begin{pmatrix}4 & 20\\ 16 & 5\end{pmatrix}\ ,\ C=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$$

2.6.27 Problem-solving.

Donada la matriu $A=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ a & b\end{pmatrix}$, determina a,b tals que $A^3=A$.

Font: "Enjoy Solving Mathematics" en Facebook.

2.6.28

Sigui $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}$

a) Calcula A^{-1}.

b) Resol l'equació $A\cdot\left[\begin{pmatrix}5\\ -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}21\\ 24\end{pmatrix}$

2.6.29

Determina el valor de k per al què la matriu $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & k\end{pmatrix}$ satisfà l'equació $A^2+2A=I$.

2.6.30

Determina totes les matrius $A=\begin{pmatrix}a & a\\ 0 & b\end{pmatrix}$, diferents de $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ que satisfan $A^2=A$.

2.6.31

Donades les matrius $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix}1 & 5\\ a & b\end{pmatrix}$, trobeu els valors dels paràmetres a i b per als què les matrius commutin : $A\cdot B=B\cdot A$

2.6.32

Considereu les matrius $P=\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ a & 2 & 3\end{pmatrix}$ i $A=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, en què a és un paràmetre real.

a) Trobeu per a quins valors de a és invertible la matriu obtinguda del resultat del producte P·A.

b) Si a = 2, trobeu la matriu X que satisfà l'equació matricial P·A + X = I, en què I denota la matriu identitat d'ordre 2.

PAU CAT CCSS JUNY 2022 2.5 (Solució: PAUCCSS pàg. 587)

2.6.33 Exercici del Youtube

Resol la següent equació matricial $XA-B=C$, on $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}$

Solució: https://youtu.be/vRyzYnuSxUg (maStemátikas)

2.6.34

a) Determina per a quins valors d'a es compleix $A^2 - I = 2A$, on

$$A = \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix} \text{ i } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Determina els valors d'a per als què la matriu A té inversa.

2.6.35

Donades les matrius

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix} \text{ i } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Determina el valor d'x per al què $B^2 = A$.

PAU Canarias Juny 2019

2.6.36

Considereu la família S de matrius de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, en què a, b ∈ ℝ.

a) Calculeu $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$.

b) Trobeu totes les matrius de la família S, és a dir, de la forma $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, que verifiquin la igualtat $A^2 = I$, en què I és la matriu identitat d'ordre 2.

PAU TEC JUNY 2023 5.5 (Sol. PAUTEC pàg. 849)

2.6.37

Calculeu la matriu X que verifica A · X · B = C, sabent que

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}$$

PAU CCSS JUNY 2022 5.3 (Sol. PAUCCSS pàg. 607)

2.6.38

Considereu les matrius $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, en què a i b són dos paràmetres reals.

a) Trobeu els valors dels paràmetres a i b per als quals es compleix que $A^2 - 2A = B$.

b) Si a=1 i b=1, resoleu l'equació matricial 2A = A·X + B.

PAU CCSS JUNY 2023 5.5 (Sol. PAUCCSS pàg. 680)

2.6.39

Resol l'equació matricial $AX + XA = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, on $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Aragó Set 2004

2.6.40

Determine para qué valores de a y b la matriz $A = \begin{pmatrix} 6 & a \\ 4 & b \end{pmatrix}$ es nilpotente, es decir, $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.6.41

Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix}$, detemineu els valors de m per als què $A^2 = 2A + I$, on I és la matriu identitat $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

País Vasco 2012

2.6.42

Determine para qué valores de a y b la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ es idempotente, es decir, $A^2 = A$.

2.6.43

Determineu els valors de k per als què la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$ compleixi $A^2 + 2A = I$

Madrid 2002

2.6.44

Determina totes les matrius $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$ que satisfan l'equació matricial $X^2 = 2X$.

2.6.45

Determina els valors de a i b per als què l'equació $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 2 \end{pmatrix}$ verifiqui $A^2 = 2I$.

2.6.46

Determina els valors de a per als què la matriu $A = \begin{pmatrix} 3 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$ verifica l'equació $A^2 = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

2.6.47

Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$, determina els valors de a per als què A^2 sigui la matriu identitat.

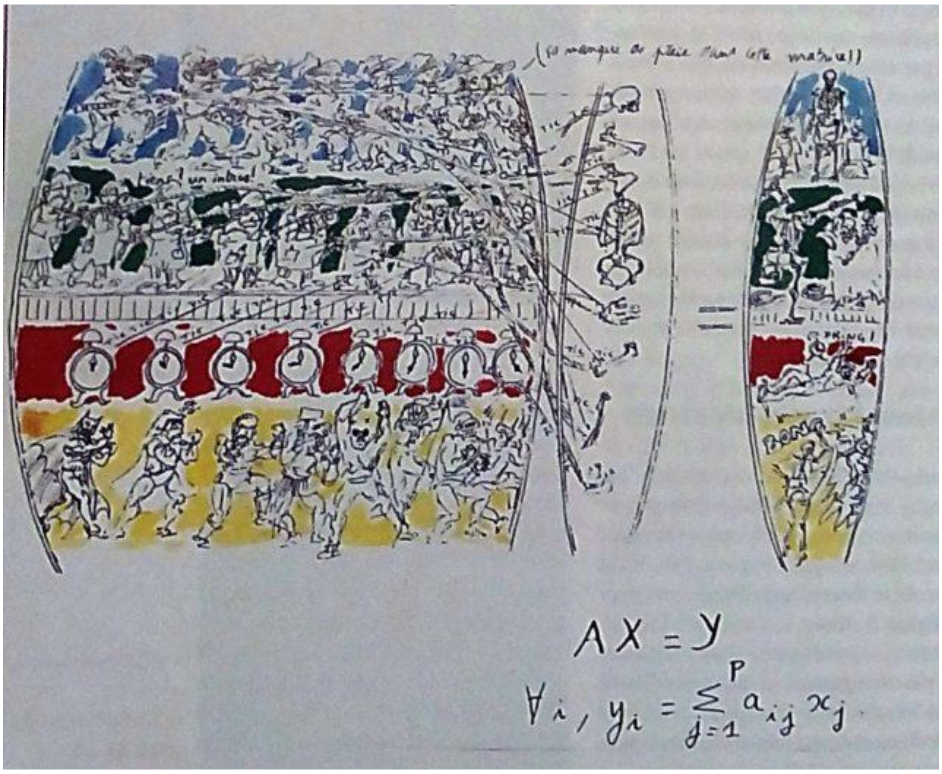
2.6.48

Determina totes les matrius de la forma $A = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$ que verifiquin $A^2 = 4A$.

2.6.49

Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & k+1 \end{pmatrix}$, determina el valor de $k \in IR$ per al què es verifica $A^2 = 3I$.

El racó artístic.



"**La matriu rusa, multiplicació d'una matriu per una matriu columna**", de l'artista franc-rus Paul Kichilov

2.7 Sistemes d'equacions matricials.

Exemple resolt.

Resoleu el següent sistema d'equacions matricials:

$$\begin{cases} X+3Y=\begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -4 & 12 \end{pmatrix} \\ 2X-Y=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Solució:

Aquests problemes es resolen amb el mètode de reducció o per substitució.

Multipliquem la segona equació per 3…

$$2X-Y=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \to 3\cdot(2X-Y)=3\cdot\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \to$$

$$3\cdot 2X-3\cdot Y=\begin{pmatrix} 3\cdot 3 & 3\cdot 4 \\ 3\cdot 6 & 3\cdot 3 \end{pmatrix} \to 6X-3Y=\begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 18 & 9 \end{pmatrix}$$

…de forma que al sumar totes dues equacions *marxa* la Y:

$$\begin{cases} X+3Y=\begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -4 & 12 \end{pmatrix} \\ 2X-Y=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X+3Y=\begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -4 & 12 \end{pmatrix} \\ 6X-3Y=\begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 18 & 9 \end{pmatrix} \end{cases} \overset{F_1+F_2}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow 7X=\begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 18 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 21 \\ 14 & 21 \end{pmatrix}$$

Ara només queda aïllar la X passat el 7 a l'altra costat:

$$7X=\begin{pmatrix} 7 & 21 \\ 14 & 21 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \frac{1}{7}7X=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 7 & 21 \\ 14 & 21 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 7 & 21 \\ 14 & 21 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7/7 & 21/7 \\ 14/7 & 21/7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

La Y la podem obtenir de la segona equació:

$$2X-Y=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow Y=2X-\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

2.7.1

Resoleu el següent sistema d'equacions matricials:

$$\begin{cases} 2X+3Y=\begin{pmatrix} 8 & -3 & 4 \\ 7 & -1 & 12 \end{pmatrix} \\ X-2Y=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -7 & 3 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

PAU TEC CANARIAS 2019 #2

2.7.2

Resoleu el següent sistema d'equacions matricials:

$$\begin{cases} 2A-5B=\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\ 3A-B=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

2.7.3

Resoleu les preguntes següents:
a) Trobeu les matrius A i B que compleixen que

$$A-2B=\begin{pmatrix} 1 & 13 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad 2A+3B=\begin{pmatrix} 2 & -9 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

b) Determineu el valor de a, b, c i d perquè es verifiqui que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & c \\ 2 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b & -5 \\ d & -7 \end{pmatrix}.$$

PAU CAT CCSS SET 2018 3.5 (Solució. PAUCCSS pàg. 425)

2.7.4

Trobeu les matrius A i B sabent que $A-2B=\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ i $2A+3B=\begin{pmatrix} 7 & 15 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$

PAU CAT CCSS SET 2016 5.5

2.7.5 Exercici del Youtube

Donades les matrius $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, resol el sistema

$$\begin{cases} X-2Y=A \\ 2X-Y=B \end{cases}$$

https://youtu.be/ljZ3p_QEG3A (Unicoos)

2.7.6 Exercici del Youtube

Resol el següent sistema matricial:

$$\begin{cases} 2A+3B=\begin{pmatrix} 8 & -3 & 4 \\ 7 & -1 & 12 \end{pmatrix} \\ A-2B=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -7 & 3 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Solució: https://youtu.be/B-FeYk3MiUo (profesor10demates)

2.7.7

Trobeu les matrius X , Y tals que $\begin{cases} X+\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}Y=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ X+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}Y=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$

2.7.8

Resoleu les següents qüestions:

a) Calculeu les matrius X i Y si sabem que

$$X+Y=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ i } 2X-Y=\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -7 & -3 \end{pmatrix}$$

b) Obteniu la inversa de la matriu $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

c) Obteniu la matriu X tal que $XA=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$.

PAU València JUNY 2013 #A.1 (Sol. València pàg. 88)

2.7.9

a) Resol el següent sistema matricial:

$$\begin{cases} 2X-Y=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \\ X+2Y=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

b) Determina les inverses X^{-1} i Y^{-1}, en el cas que hi existeixin.

2.7.10 Exemple resolt. Sistema matricial amb multiplicació de matrius.

Resol el següent sistema matricial:

$$\begin{cases} X - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \\ X + \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Apliquem el mètode de substitució: Aïllem la X de la primera equació i la substituïm en la segona:

$$X - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \to X = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} Y$$

$$\begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \right] Y = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Determinem la inversa de la matriu de l'esquerra:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2a - c = 1 \\ -2b - d = 0 \\ 5a + 3c = 0 \\ 5b + 3d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -1 \\ c = 5 \\ d = 2 \end{cases}$$

$$Y = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$$

2.7.11

a) Resol el següent sistema matricial:

$$\begin{cases} 2X - Y = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \\ X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

b) Determina les inverses X^{-1} i Y^{-1}, en el cas que hi existeixin.

2.7.12

Resol el sistema $\begin{cases} 2X + Y = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} \\ X - 3Y = \begin{pmatrix} -5 & -9 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$

2.7.13

Resol el sistema d'equacions matricial següent:

$$\begin{cases} 3X - 2Y = \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \\ 2Y - X = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -5 & 8 \end{pmatrix} \end{cases}$$

2.7.14

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ 15 & -5 \end{pmatrix}$, hallar las matrices X, Y para las cuales se cumple el siguiente sistema matricial:

$$\left.\begin{array}{r} 2X + Y = A \\ -3X + 2Y = B \end{array}\right\}$$

País Vasco 2013

2.7.15

Determineu $A^2 + B^2$ on A i B són les matrius solució del sistema

$$2A + B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

PAU Aragón 2016

2.8 Jugant amb el producte de matrius.

Amb matrius no es compleixen les identitats notables.

a) NO es compleix $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A(A+B) + B(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$$

Però ara no podem suposar que $BA = AB$ (la multiplicació de matrius no és commutativa!), i per tant no podem suposar que $AB + BA = AB + AB = 2AB$.

Anem a veure quan sí es compleix aquesta propietat. Suposem que es compleix:

$A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2 \Rightarrow$	Elimino A^2 a tots dos costats
$AB + BA + B^2 = 2AB + B^2 \Rightarrow$	Elimino B^2 a tots dos costats
$AB + BA = 2AB \Rightarrow$	$2AB = AB + AB$
$AB + BA = AB + AB \Rightarrow$	Elimino AB a tots dos costats
$BA = AB$	

Per tant, la propietat $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ es compleix si i només si $AB = BA$, és a dir, si les matrius commuten.

b) NO es compleix $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$

$$(A+B)(A-B) = A(A-B) + B(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$$

i un cop més, com que no podem suposar que $BA = AB$, no podem cancel·lar els termes del mig: $-AB + BA \neq 0$.

Anem a veure quan sí es compleix aquesta propietat. Suposem que es compleix:

$A^2 - AB + BA - B^2 = A^2 - B^2 \Rightarrow$	Elimino A^2 a tots dos costats
$-AB + BA - B^2 = -B^2 \Rightarrow$	Elimino B^2 a tots dos costats
$-AB + BA = 0 \Rightarrow$	Passo $-AB$ a l'esquerra
$BA = AB$	

Per tant, la propietat $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ es compleix si i només si $AB = BA$, és a dir, si les matrius commuten.

Amb matrius: $\begin{cases} (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \\ (A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2 \\ (A+B)(A-B) = A^2 - B^2 \end{cases} \Leftrightarrow AB = BA$ (només si les matrius commuten!)

c) Amb nombres, $ab = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ o } b = 0$**, i aquesta propietat no passa amb matrius.**

Per exemple:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ i } B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad AB = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.8.1

Considereu les matrius $A=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 5 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ i $C=\begin{pmatrix}1 & -1\\ m & n\end{pmatrix}$, en què m i n són dos nombres reals.

a) Comproveu que es compleix la igualtat $(A - B)\cdot(A + B) = A^2 - B^2$.

b) Determineu m i n de manera que les matrius B i C commutin, és a dir, $B\cdot C = C\cdot B$.

PAU CAT CCSS JUNY 2017 1.3 (Solució: PAUCCSS pàg. 388)

2.8.2

Donades les matrius $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$,

a) Comproveu que es compleix la igualtat $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$.

b) És certa aquesta igualtat per a qualsevol parell de matrius quadrades A i B del mateix ordre? Responeu raonadament utilitzant les propietats generals de les operacions entre matrius, sense utilitzar matrius A i B concretes.

PAU CAT TEC JUNY 2012 3.4

2.8.3

Considereu la igualtat matricial $(A+B)^2=A^2+ 2AB+B^2$.

a) Comproveu si les matrius $A=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}$ compleixen o no la igualtat anterior.

b) En general, donades dues matrius qualssevol A i B quadrades del mateix ordre, expliqueu raonadament si hi ha alguna condició que hagin de complir perquè la igualtat de l'enunciat sigui certa.

PAU CAT TEC JUNY 2010 4.2

2.8.4

Considereu les matrius següents : $A=\begin{pmatrix}2 & -3 & -5\\ -1 & 4 & 5\\ 1 & -3 & -4\end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

a) Comproveu si aquestes dues matrius compleixen $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$.

b) Si P i Q són matrius quadrades qualssevol d'ordre 3, quina condició s'ha de produir perquè es compleixi $(P+Q)^2=P^2+2PQ+Q^2$?

PAU MAT CCSS JUNY 2010 4.5

2.8.5

Considereu les matrius següents: $A=\begin{pmatrix}2 & -3 & -5\\ -1 & 4 & 5\\ 1 & -3 & -4\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

a) Comproveu si aquestes dues matrius compleixen $(A+B)^2 = A^2 +2A\cdot B +B^2$.

b) Si P i Q són matrius quadrades qualssevol d'ordre 3, quina condició s'ha de produir perquè es compleixi $(P+Q)^2 = P^2 +2P\cdot Q +Q^2$?

PAU CAT CCSS JUNY 2010 4.5

2.8.6

Donades les matrius següents: $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}$

a) Calculeu A^2+ 2AB+B^2.
b) Calculeu $(A+B)^2$.

PAU CAT CCSS JUNY 2008 5.2

2.8.7

Donades les matrius $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & -1\end{pmatrix}$

a) Calculeu A•B i B•A.
b) Comproveu que $(A+B)^2=A^2+B^2$.

PAU CAT TEC JUNY 2006 1.3

2.8.8

Donades les matrius $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, on a i b són nombres reals, trobeu els valors de a i b que fan que les dues matrius commutin, és a dir, que fan que es compleixi A · B = B · A.

PAU CAT TEC JUNY 2005 4.1

2.8.9

Considereu les dues matrius següents:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -3 & -5\\ -1 & 4 & 5\\ 1 & -3 & -4\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

a) Calculeu les matrius A · B i B · A.
b) Siguin C i D dues matrius quadrades del mateix ordre que satisfan C · D = C i D · C = D. Comproveu que les dues matrius, C i D, són idempotents.

Nota: Una matriu quadrada s'anomena *idempotent* si coincideix amb el seu quadrat.

PAU CAT TEC JUNY 2023 1.2 (Solució: PAUTEC, pàg. 789)

2.8.10

Donada la matriu $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & a & 0\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}$, es demana trobar els valors de a de forma que es compleixi la igualtat $A^2+2A+I=0$.

2.9 Notes històriques.

Les matrius van ser descobertes (o inventades, com prefereixis) per el matemàtic britànic **Arthur Cayley** (1821 – 1895)

Les podem veure per primera vegada en una publicació seva del 1857:

10. We have, in particular,

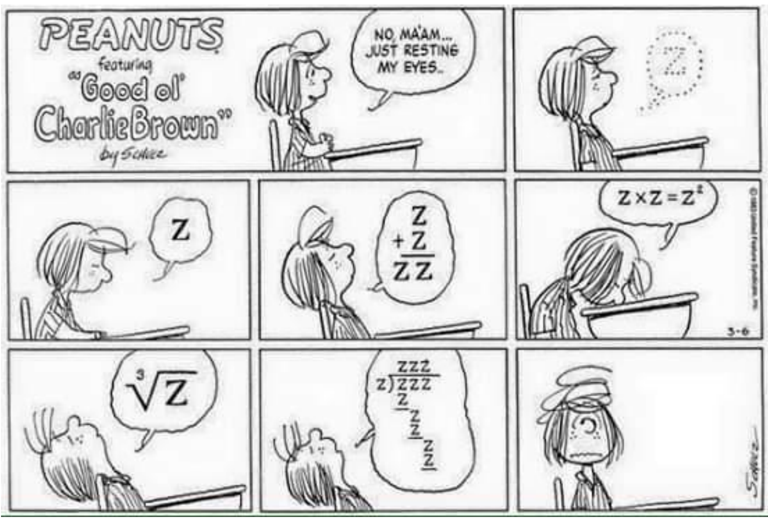
$$m\left(\begin{array}{ccc} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc} m, & 0, & 0 \\ 0, & m, & 0 \\ 0, & 0, & m \end{array}\right),$$

or replacing the matrix on the left-hand side by unity, we may write

$$m=\left(\begin{array}{ccc} m, & 0, & 0 \\ 0, & m, & 0 \\ 0, & 0, & m \end{array}\right),$$

The matrix on the right-hand side is said to be the single quantity m considered as *involving the matrix unity.*

Com a nota curiosa, podem observar que la notació inicial era una mica diferent de l'actual: La primera fila anava entre parèntesis i la resta entre barres verticals.



2.10 Més problemes PAU amb matrius.

2.10.1

Diem que una matriu és màgica si la suma dels elements de cada fila i de cada columna té com a resultat en tots els casos el mateix valor, que s'anomena *constant màgica*.

El Martí ha trobat una manera de crear matrius màgiques triant tres nombres qualssevol i multiplicant-los per les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ i } C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

El Martí proposa als seus amics que cadascú construeixi la seva matriu màgica particular a partir del dia del seu aniversari, del mes del seu aniversari i de la seva edat.

a) Sabent que el Martí va néixer el 10 de març i que té 18 anys, calculeu $10\cdot\mathbf{A} + 3\cdot\mathbf{B} + 18\cdot\mathbf{C}$.

Comproveu que la matriu resultant és màgica i indiqueu quina és la seva constant màgica (el valor comú de la suma de les files i les columnes).

b) El Martí ha calculat la matriu màgica del seu pare, que fa l'aniversari el 8 de setembre, i ha obtingut que la seva constant màgica és 153. Quina edat té el pare del Martí?

PAU CAT CCSS JUNY 2024 1.4 (Solució: PAUCCSS pàg. 732)

2.11 Equacions matricials que es resolen amb sistemes 3×3.

2.11.1

Determina totes les matrius quadrades 2×2 de la forma $X = \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix}$ i que

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} X + X \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 11 & -1 \end{pmatrix}$$

sigui la matriu nul·la.

Aragó Juny 2003

3 Determinants.

3.1 Determinant d'una matriu 2x2.

Fórmula del determinant d'una matriu 2x2.

Donada una matriu $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de dues files i dues columnes, definim el determinant associat a A com

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - c \cdot b$$

Exercici resolt.

Calcula el determinant de la matriu $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

Solució:

$|A| = 2 \cdot 7 - 3 \cdot 4 = 14 - 12 = 2$

3.1.1

Calcula el determinant de les següents matrius:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -7 & -3 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$

3.1.2

Trobeu, si existeix, una matriu A quadrada 2x2 que compleixi les següents condicions:

1) Coincideix amb la seva transposada.

2) Verifiqui l'equació matricial $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

3) El seu determinant val 9.

PAU ZARAGOZA JUNY 2000

3.2 Determinant d'una matriu 3x3.

Fórmula del determinant d'una matriu 2x2.

Donada una matriu de tres files i tres columnes $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, definim el seu determinant amb l'anomenada "Regla de Sarrus":

$$\det \boldsymbol{A} = \left|\begin{array}{ccc} + & + & + \\ a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ - & - & - \end{array}\right| \begin{array}{cc} & \\ a & b \\ d & e \\ g & h \\ & \end{array} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

Exercici resolt.

Calcula el determinant de la matriu $A=\begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Solució:

$$|A| = (-2)\cdot 1\cdot(-1)+2\cdot 3\cdot 2+(-3)\cdot(-1)\cdot(0)-(-3)\cdot 1\cdot 2-(-2)\cdot 3\cdot 0-(2)\cdot(-1)\cdot(-1) =$$
$$= 2+12+0-(-6)-0-2=18$$

3.2.1

Calcula els següents determinants:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ -5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5 \end{pmatrix}$

3.2.2

Resol les següents equacions:

a) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & x+3 \\ 3x+2 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} 0 & -5 & 0 \\ 3x+1 & -1 & 0 \\ 6 & 5 & 2x+3 \end{vmatrix} = 0$

3.2.3

Calcula el determinant $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

PAU ZARAGOZA 2008

3.3 Propietats dels determinants.

Llista de propietats dels determinants.

1. El determinant d'una matriu coincideix amb el de la seva transposada.

$$Det(A) = Det(A^T)$$

2. Si en una matriu intercanviem dues files (o dues columnes), el determinant canvia de signe.

Exemple: $$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 9 \\ -1 & 3 & -4 \\ 0 & 7 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 5,\ A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 9 \\ 0 & 7 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A_2| = -5$$

3. Si en una matriu multipliquem per un mateix nombre tots els elements d'una mateixa fila (o columna), el determinant queda multiplicat per aquest nombre.

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 9 \\ -1 & 3 & -4 \\ 0 & 7 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 5 \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2\cdot 7 & 0\cdot 7 & 9\cdot 7 \\ -1 & 3 & -4 \\ 0 & 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 63 \\ -1 & 3 & -4 \\ 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |A_2| = 7 \cdot 5 = 35$$

4. Si una matriu quadrada té una fila (o una columna) de zeros, el determinant és zero.

5. Si a una fila (o a una columna) d'una matriu hi sumem una combinació lineal de les altres, el determinant no varia.

Conseqüències:
- Si una matriu quadrada té dues files (o dues columnes) iguals, el determinant és zero.
- Si una matriu quadrada té dues files (o dues columnes) proporcionals, el determinant és zero.
- Si una matriu quadrada té una fila (o una columna) que és combinació lineal de les altres, el determinant és zero.

6. Per a qualsevol fila o columna d'un determinant es compleix que:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + b_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

7. El determinant del producte de dues matrius és igual al producte dels determinants.

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

3.3.1

Siguin les matrius $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calculeu A·B i B·A.
b) Justifiqueu que si el producte de dues matrius quadrades no nul·les té per resultat la matriu nul·la, aleshores el determinant de totes dues matrius ha de ser zero.

PAU CAT TEC SET 2019 5.3 (Solució: PAU TEC Pàg. 558)

3.3.2

Siguin A,B i C matrius quadrades d'ordre n.
a) Expliqueu raonadament si és possible que det A≠0, det B≠0 i det (A·B) = 0. Si és possible, poseu-ne un exemple.
b) Si sabem que det A≠0 i que A·B=A·C, expliqueu raonadament si podem assegurar que B=C.

PAU CAT TEC JUNY 2010 5.4

3.3.3

Comprova que el determinant de la matriu

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

és nul sense desenvolupar-lo. Explica el procés que has seguit.

PAU Zaragoza Juny 94

3.3.4

Sigui U una matriu quadrada nxn amb tots els seus elements iguals a 1, sigui I_n la matriu unitat nxn, i sigui a un nombre real. Escriu la matriu aU-aI, i calcula els seu determinant.

PAU Zaragoza Juny 95

3.3.5

Calcula, sense desenvolupar, el determinant de la següent matriu, enumerant les propietats dels determinants que has utilitzat:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

PAU Zaragoza Setembre 95

3.3.6

Sigui A una matriu quadrada d'ordre 3.

a) Si sabem que el determinant de la matriu 2A és |2A| = 8, Quant val el determinant de la matriu A? Escriu la propietat dels determinants que hagis fet servir per a obtenir aquest valor.

b) Calcula per a quins valors de x es compleix |2A| = 8, on A és la matriu

$$A=\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x+1 & 2 & 2 \\ x & 2-x & 1 \end{pmatrix}$$

PAU Extremadura SET 2007

3.3.7

Tenint en compte que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=1$, determina el valor de $\begin{vmatrix} x & 1/4 & 4 \\ y & 0 & 4 \\ z & 1/2 & 12 \end{vmatrix}$

PAU ZARAGOZA MAT2 JUN 2008 1.A.b

3.3.8

Tenint en compte que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}=7$, calcula el valor del següent determinant sense desenvolupar-lo: $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ a+p & b+q & c+r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix}$

PAU ZARAGOZA MAT2 SET 2006 B.1

3.3.9

Calcula el següent determinant, sense fer servir la regla de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & ab \\ ab & a^2 & b^2 \\ ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix}$$

3.3.10

Si sabem que $\begin{vmatrix} x & -3 & 1 \\ y & 0 & 1 \\ z & 7 & 1 \end{vmatrix}=6$, calcula el valor de $\begin{vmatrix} z/2 & z+7 & 3 \\ y/2 & y & 3 \\ x/2 & x-3 & 3 \end{vmatrix}$ i $\begin{vmatrix} x & -3 & 1 & 2 \\ y & 0 & 1 & 2 \\ z & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

3.3.11

Si la matriu $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ té el seu determinant igual a n, troba, fent servir les propietats dels determinants, el valor del determinant de les matrius següents:

$$B=\begin{pmatrix} 6d & 4e & 2f \\ 3g & 2h & i \\ 9a & 6b & 3c \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} d+f & e & f+e \\ a+c & b & c+b \\ g+i & h & i+h \end{pmatrix}$$

3.3.12

Donada la matriu $A=\begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -1 & m & m \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

a) Estudia el rang d'A segons els valors de m.

b) Calcula el determinant de la matriu A^m.

PAU MADRID 2015

3.3.13

Si sabem que el valor del determinant

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

és igual a 1, calcula el valor dels determinants

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 6 & 8 & 6 \end{vmatrix} \qquad \text{b)} \begin{vmatrix} 2+x & 4+x & 6+x \\ 3x-1 & 3y & 3z-1 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix}$$

PAU MADRID 2014

3.3.14

Comproveu, aplicant les propietats dels determinants, la identitat:

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$$

PAU MADRID JUNY 2003 Opció B

3.3.15

Demostra que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$

3.4 Determinant de matrius de dimensió superior.

Mètode del càlcul d'un determinant per adjunts.

Menor complementari d'un element.

Donada una matriu quadrada A d'ordre n, anomenem menor complementari de l'element a_{ij}, i ho escrivim α_{ij}, el determinant d'ordre n-1 que està format per tots els elements de A excepte els que pertanyen a la fila i a la columna j.

Exemple:

$$A=\begin{pmatrix} 6 & 4 & -2 & 7 \\ 1 & 0 & 6 & -3 \\ -5 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 4 & 9 & 6 \end{pmatrix},\ \alpha_{21}=\begin{vmatrix} 4 & -2 & 7 \\ 2 & -1 & -8 \\ 4 & 9 & 6 \end{vmatrix}=506\ ,\ \alpha_{33}=\begin{vmatrix} 6 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix}=76$$

Adjunt d'un element.

Donada una matriu quadrada A d'ordre n, anomenem adjunt de l'element a_{ij}, i ho escrivim A_{ij}, el menor complementari de a_{ij} ,amb el seu signe o amb el signe canviat, segons si $i+j$ és parell o imparell, respectivament:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \qquad A_{ij}=(-1)^{i+j}\alpha_{ij}$$

Exemple:

Amb la matriu A anterior, $A_{32}=-\begin{vmatrix} 6 & -2 & 7 \\ 1 & 6 & -3 \\ 0 & 9 & 6 \end{vmatrix}=-453$

Desenvolupament d'un determinant pels seus adjunts.

El determinant d'una matriu quadrada d'ordre n és igual a la suma dels productes dels elements d'una fila o d'una columna qualsevol pels adjunts corresponents.

Exemple:

Amb la matriu A anterior, desenvolupant per la segona fila:

$|A|=1\cdot A_{21}+0\cdot A_{22}+6\cdot A_{23}+(-3)\cdot A_{24}=$

$$=1\cdot(-1)\begin{vmatrix} 4 & -2 & 7 \\ 2 & -1 & -8 \\ 4 & 9 & 6 \end{vmatrix}+0\cdot\begin{vmatrix} 6 & -2 & 7 \\ -5 & -1 & -8 \\ 0 & 9 & 6 \end{vmatrix}+6\cdot(-1)\begin{vmatrix} 6 & 4 & 7 \\ -5 & 2 & -8 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix}+(-3)\cdot\begin{vmatrix} 6 & 4 & -2 \\ -5 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 9 \end{vmatrix}=$$

$$=1\cdot(-1)\cdot 506+0\cdot 21+6\cdot(-1)\cdot 244+(-3)\cdot 352=-3026$$

3.4.1

Calcula el determinant de les següents matrius:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 3 & 0 \\ 6 & 4 & -4 & -6 \\ 3 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -7 & 3 & 5 & 7 \\ -4 & 0 & -6 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -7 & 4 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 6 & -6 \\ 5 & 3 & 0 & -5 \\ 6 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0 & -7 & 2 & 6 \\ -5 & 0 & 0 & -3 \\ -1 & -2 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \end{pmatrix}$

3.4.2

Calcula el determinant de les següents matrius:

a) $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 & -3 \\ -4 & -3 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & -2 & -2 \\ -3 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 & -2 \\ -1 & 3 & -1 & -4 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 & -3 \\ -1 & -4 & 3 & -1 \\ -4 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

3.4.3

Sabent que $ad - bc = 3$, calcula de forma raonada els determinants de les següents matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & d & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & a \\ 0 & 0 & d & b \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

PAU EUSKADI MAT2 JULIO 2004 A.A

3.5 Nota històrica.

Els determinants apareixen per primer cop en la resolució de sistemes d'equacions lineals el 1772 de la mà d'Alexandre-Théophile Vandermonde (1735-1796) i s'apliquen ja el segle XIX a la teoria de l'eliminació, transformació de coordenades, canvi de variable, etc.

La paraula "determinant" fou introduïda per Carl Friedrich Gauss (1777-1855) en l'estudi de certes formes quadràtiques, però el tractament sistemàtic i gairebé actual és degut a Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) l'any 1815, que prova entre altres propietats la regla de Laplace (demostrada ja per Pierre-Simon de Laplace (1749-1885) el 1825), i a James Joseph Sylvester (1817-1897), que l'aplica a problemes de la teoria d'equacions.

Leopold Kronecker (1823-1891) i Karl Wilhelm Weierstrass (1815-1897) (segons alguns el millor professor que mai no hagi tingut una Universitat) introduïren en llurs cursos a Berlín els determinants com a formes multilineals alternades.

4 Rang d’una matriu.

4.1 Definició, propietats, mètode de Gauss.

Definició. Rang d’una matriu.

El rang d’una matriu es el nombre de files no nul·les després de fer la triangularització de Gauss. El representem per Rang(A).

Observació: Una definició equivalent és: el rang d’una matriu és el nombre de files o columnes linealment independents que té la matriu. Però aquesta definició necessita haver introduït prèviament el concepte de vectors i de dependència lineal.

Propietats del rang.

a) El rang d’una matriu és, com a màxim, el menor del nombre de files o columnes.
b) Si en una matriu intercanviem dues files o dues columnes, el rang no canvia.
c) Si multipliquem o dividim tots els elements d’una fila o d’una columna per un nombre diferent de zero, el rang no canvia.
d) El rang d’una matriu i la seva transposada és el mateix: Rang(A)=Rang(A^T)
e) Podem substituir qualsevol fila o qualsevol columna d’una matriu per una combinació lineal seva amb altres de paral·leles i el rang no canvia.

Càlcul del rang pel mètode de Gauss.

La pròpia definició de rang d’una matriu ens indica el mètode que farem servir per trobar-lo: El rang serà el nombre de files diferents de zero que quedin a la matriu després de triangularitzar-la mitjançant el mètode de Gauss.

Exemple resolt.

Calcula el rang de la matriu $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&4&-1\\4&5&0\\2&3&4\end{pmatrix}$

Solució:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&4&-1\\4&5&0\\2&3&4\end{pmatrix}\overset{\substack{F_2\to F_2-3F_1\\F_3\to F_3-4F_1\\F_4\to F_4-2F_1}}{\Rightarrow}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-2&-10\\0&-3&-12\\0&-1&-2\end{pmatrix}\overset{F_4\leftrightarrow F_2}{\Rightarrow}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-1&-2\\0&-3&-12\\0&-2&-10\end{pmatrix}\overset{\substack{F_3\to F_3-3F_2\\F_4\to F_4-2F_2}}{\Rightarrow}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-1&-2\\0&0&-6\\0&0&-6\end{pmatrix}\overset{F_4\to F_4-F_3}{\Rightarrow}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-1&-2\\0&0&-6\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow Rang\ A=4-1=3$$

4.1.1 Exercici del Youtube

Determina el rang de les següents matrius, mitjançant una triangularització Gauss-Jordan.

$\overline{AB}$

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & -2 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 4 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & -1 \\ 7 & 8 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 & -1 \\ 2 & 11 & -6 & 17 \\ 5 & -1 & 24 & -37 \end{pmatrix}$

Solució: https://youtu.be/RjG6mGw41-8 (Mates con Andrés)

4.1.2 Exercici del Youtube

Cómo calcular el rango de una matriz. Método de Gauss.

https://youtu.be/nV-CxvbQRq8 (lasmatematicas.es)

4.2 Càlcul del rang d'una matriu per determinants.

El rang d'una matriu és l'ordre màxim dels menors de la matriu que no són 0. L'ordre d'una matriu A s'indica rang(A). Per a trobar-lo, s'han de calcular menors d'ordre màxim, per si n'hi hagués algun de diferent de 0; si no és així, es calculen tots els menors d'ordre una unitat menor, per si n'hi hagués algun de diferent de 0. I així successivament. L'ordre del primer menor diferent de 0 serà el rang de la matriu.

Aplicant aquest procediment sempre trobarem el rang de la matriu. Segons la matriu que utilitzem el procediment podria abreujar-se, però això no ho podem garantir sempre. Per tant, encara que de vegades el procés s'allargui una mica, és convenient seguir aquesta guia:

1. Es busca un menor d'ordre 1 no nul.
   - Si no existeix, aleshores el rang(A)=0, i el procediment s'ha acabat.
   - Si existeix, aleshores el rang(A) és com a mínim 1, i continuem amb el pas següent.

2. Es calculen els menors d'ordre 2 que contenen el menor d'ordre 1 anterior.
   - Si tenen determinant 0 o no existeixen, aleshores, el rang(A)=1.
   - Si n'existeix un de diferent de 0, aleshores, el rang(A) és com a mínim 2, i continuem amb el pas següent.

3. Es calculen els menors d'ordre 3 que contenen el menor d'ordre 2 anterior.
   - Si són 0 o no existeixen, aleshores, el rang(A)=2.
   - Si n'existeix un diferent de 0, aleshores, el rang(A) és com a mínim 3, i continuem amb el pas següent.

4. Es va repetint el procés fins que no sigui possible fer menors d'ordre superior.

És evident que el procediment sempre s'aturarà en algun moment, i donarà un valor concret per al rang de la matriu.

4.2.1 Exercici del Youtube

Determina el rang de la següent matriu, mitjançant el mètode dels determinants.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Solució: https://youtu.be/jHP6TdVUT5o (unicoos)

4.2.2 Exercici del Youtube

Determina el rang de la següent matriu, mitjançant el mètode dels determinants.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Solució: https://youtu.be/xklVUv8-cZI (unicoos)

4.2.3 Exercici del Youtube

Determina el rang de les següents matrius, mitjançant el mètode dels determinants.

$$\text{a)}\ A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & -1 & 2\\ 4 & 1 & 5\end{pmatrix} \qquad \text{b)}\ B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 2 & 6 & 1\\ 3 & 9 & 1\end{pmatrix}$$

Solució: https://youtu.be/mGw7BE6nJBA (Mates con Andrés)

Exemple resolt.

Determina el rang de la següent matriu, amb el mètode dels determinants.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 4\\ 1 & 0 & 3 & -1\\ 2 & 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Solució:

Seleccionem el valor 1, que no és 0, de la primera fila/primera columna.

2. Prenem un menor $\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}=0$ que inclou l'1 del menor anterior. Per tant, cal mirar un altre menor que també contingui l'1. Prenem $\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 2\end{vmatrix}=2$, diferent de 0, per tant, el rang és com a mínim 2.

3. Prenem un menor que inclogui el menor anterior $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 2\end{pmatrix}$. Per exemple,

$\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 3\\ 2 & 2 & 1\end{vmatrix}=-2$, per tant, diferent de 0. El rang és com a mínim 3.

4. No hi ha cap menor d'ordre 4, per tant, el rang de la matriu és 3.

Font: https://www.mdx.cat/bitstream/handle/10503/30496/C%2011MatricesDeterminantes.pdf

4.2.4 Exercici del Youtube

Determina el rang de les següents matrius, mitjançant el mètode dels determinants:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 7 & 4 & -1\\ 2 & 11 & -6 & 17\\ 5 & -1 & 24 & -37\end{pmatrix}$$

Solució: https://youtu.be/i9ADhp9Xo3A (Mates con Andrés)

4.3 Rang d'una matriu amb paràmetres.

4.3.1 Exercici del Youtube

Determina el rang de les següents matrius, en funció del paràmetre.

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & a \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix} 1 & -k & 3 & -2 \\ -3 & 6 & -9 & 6 \\ k & -4 & 6 & -4 \end{pmatrix}$

Solució: https://youtu.be/81HgVW-NQOQ (Mates con Andrés)

4.3.2 Exercici del Youtube

Determina el rang de les següents matrius, en funció del paràmetre.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & t & 3 & 2 \\ 1 & 8-3t & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Solució: https://youtu.be/AU-rN96Awgs (Mates con Andrés)

4.3.3

En cada apartat, determineu el rang de la matriu en funció del paràmetre.

a) $A=\begin{pmatrix} k & k & k^2 \\ 1 & -1 & k \\ 2k & -2 & 2 \end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix} 2a & -2 & a^2 \\ -1 & a & -1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$

c) $C=\begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 2a & 0 & 1 \\ 2 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$ d) $D=\begin{pmatrix} m & m-1 & m(m-1) \\ m & 1 & m \\ m & 1 & m-1 \end{pmatrix}$

e) $E=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$

4.3.4

Considereu la matriu $A=\begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ 2a & 5 & 3a \\ 7 & 4a & 9 \end{pmatrix}$, que depèn del paràmetre a.

a) Calculeu el rang de la matriu A per als diferents valors del paràmetre a.

b) Si $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, resoleu l'equació matricial següent: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

PAU CAT TEC SET 2022 3.3 (Solució: PAUTEC pàg 762)

4.3.5

Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} a & -3 & 0 \\ 4 & a-7 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, en què a és un paràmetre real.

a) Estudieu el rang de la matriu A per als diferents valors del paràmetre a.
~~b) Comproveu que per a $a = 4$ la matriu A és invertible i que es verifica que $A^{-1} = A^2$.~~

PAU CAT TEC SET 2020 4.4

4.3.6

Considereu la matriu $M = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a+1 & (a+1)^2 \\ 1 & a-1 & (a-1)^2 \end{pmatrix}$ per a $a \in IR$.

a) Calculeu el rang de la matriu M en funció dels valors del paràmetre a.
b) Discutiu i resoleu el sistema d'equacions lineals

$$M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

segons els valors del paràmetre a.

PAU CAT TEC JUNY 2014 3.1

4.3.7

Determineu el rang de la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix}$ en funció del paràmetre k.

PAU CAT TEC SET 2012 4.1

4.3.8

Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & b \\ b & a^2 \end{pmatrix}$. Trobeu els valors dels paràmetres a i b perquè la matriu tingui rang 1.

PAU CAT TEC JUNY 2009 3.1

4.3.9

Donada la matriu següent dependent d'un paràmetre m:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & m & 2m \\ m & 2 & 2+m \end{pmatrix}$$

Estudieu-ne el rang segons els valors de m.

PAU CAT TEC SET 2007 3.2 (primera part)

4.3.10

Sigui la matriu $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 4 & 1 & -m\\ 0 & m & 3\end{pmatrix}$. Determineu els valors de m per als quals $rang(A)<3$. Pot ser $rang(A)=1$ per a algun valor de m?

PAU CAT TEC JUNY 2006 3.4

4.3.11

Determineu el rang de la matriu $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 1 & a^2+a+1 & a\\ -1 & a-4 & a-2\end{pmatrix}$ en funció del valor del paràmetre a.

Indiqueu quan existeix la inversa de la matriu A.

PAU ZARAGOZA JUNY 1996

4.3.12

Trobeu el rang de la matriu $A=\begin{pmatrix}1 & a & 1 & -1\\ 0 & 1 & a-1 & 0\\ 1 & 1 & a & -1\end{pmatrix}$ segons sigui el valor del paràmetre a

PAU ZARAGOZA SETEMBRE 1997

4.3.13

Estudia el rang de la següent matriu en funció del paràmetre m:

$$\begin{pmatrix}m+1 & 1 & 1\\ 1 & m+1 & 1\\ 1 & 1 & m+1\end{pmatrix}$$

4.3.14 Exercici del Youtube

Estudia el rang de la següent matriu en funció del paràmetre k:

$$\begin{pmatrix}k & 1 & -2\\ -1 & -1 & k\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Solució: https://youtu.be/wTcPjOMOkbc (profesor10demates)

Exercici del Youtube

Rang d'una matriu amb paràmetres:

https://youtu.be/coPTA_i-QVQ (Mates con Andrés)

4.4 El Teorema de Rouché-Frobenius.

Donat un sistema de m equacions i n incògnites:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Obtenim la matriu del sistema M i la matriu ampliada M_a:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad M_a = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

El sistema és **Compatible** si i només si rang M = rang M_a. Si no, és un sistema **Incompatible**.

Si el sistema és compatible:

Si rang M = rang M_a= n , el sistema és **Compatible Determinat** (té solució única)

Si rang M = rang M_a< n, el sistema és el sistema és **Compatible Indeterminat**, amb n-k graus de llibertat, o també podem dir que les incògnites es poden expressar en funció de n-k paràmetres.

Teorema de Rouché-Frobenius aplicat als sistemes homogenis.

Recordem que un sistema d'equacions és homogeni quan tots els termes independents són zero:

$$\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 0 \\ 5x + y - 3z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

Un sistema homogeni sempre té com a solució $x = y = z = 0$, per tant sempre serà compatible.
Amb el llenguatge dels rangs: Sempre $rang(A) = rang(A')$ perquè ampliem la matriu de coeficients amb zeros.

Per tant, el teorema Rouché-Frobenius se simplifica:
- $rang(A) = rang(A') = n$ Sistema Compatible determinat (solució $x = y = z = 0$)
- $rang(A) = rang(A') < n$ Sistema Compatible indeterminat.

5 Matriu inversa.

5.1 Definició i propietats.

Definició de matriu inversa.

La matriu inversa d'una matriu quadrada A d'ordre n és una matriu A^{-1} que compleix

$$A \cdot A^{-1} = I_n \qquad A^{-1} \cdot A = I_n$$

on I_n és la matriu identitat d'ordre n.

Les matrius que tenen matriu inversa les anomenem matrius <u>regulars o invertibles</u>, i les que no en tenen, matrius singulars.

Observació.

Com que la multiplicació de matrius no és commutativa, podríem pensar en l'existència de matrius inverses laterals diferents:

Inversa per la dreta: $AB = I$

Inversa per l'esquerra: $CA = I$

Però existeix la següent propietat, que malauradament no podem demostrar amb les eines bàsiques que tenim:

Si A i B són matrius quadrades, $A \cdot B = I \Rightarrow B \cdot A = I$

i per tant, una inversa per la dreta serà també una inversa per l'esquerra, i una inversa per l'esquerra serà també una inversa per la dreta.

Propietats de la matriu inversa.

- La inversa de la matriu inversa és la matriu original.

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$$

- La inversa del producte de dues matrius és el producte de les inverses de les matrius canviant-ne l'ordre.

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

- La inversa de la transposada d'una matriu és igual a la transposada de la matriu inversa.

$$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$$

Caracterització d'una matriu invertible mitjançant determinant:

Una matriu quadrada A serà invertible si y només si $\det(A) \neq 0$

5.1.1

Determina les matrius que siguin invertibles:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

5.1.2

Sigui la matriu $X = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, que depèn dels paràmetres a, b i c.

a) Calculeu les matrius X tals que $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Determineu els valors de a, b i c perquè la matriu inversa de X sigui

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

PAU CAT TEC JUNY 2022 2.5 (Solució: PAUTEC pàg. 737)

5.1.3

Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{pmatrix}$, en què a és un paràmetre real.

a) Trobeu per a quins valors de a la matriu A és invertible.
b) Comproveu que, per al cas a = 3, la matriu A és invertible i resoleu l'equació matricial A X = B – 3I, en què B és la matriu $B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

PAU CAT TEC SET 2021 1.5 (Solució: PAUTEC pàg. 696)

5.1.4

Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, en què α és un paràmetre real.

a) Hi ha algun valor de $\alpha \in IR$ tal que A no tingui inversa per a aquest valor?
b) Calculeu la matriu inversa de A^2 per a α = 0.

PAU CAT TEC SET 2018 3.4

5.1.5

Considereu la matriu $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

a) Si $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ és la matriu identitat d'ordre 3, calculeu per a quins valors de k la matriu A+kI té inversa. Trobeu, si existeix, la matriu inversa de A – 2I.
b) Calculeu la matriu X que satisfà l'equació X • A + A^T = 2 • X, en què A^T és la matriu transposada de la matriu A.

PAU CAT TEC JUNY 2018 5.6

5.1.6

Siguin les matrius $M=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\\ t & 2\end{pmatrix}$ i $N=\begin{pmatrix}-1 & t & 2\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$

a) Calculeu M · N i comproveu que la matriu resultant no és invertible.
b) Trobeu els valors de t per als quals la matriu N · M és invertible.

PAU CAT TEC JUNY 2018 1.2

5.1.7

Siguin les matrius

$$A=\begin{pmatrix}2 & a & 1\\ 1 & b & 4\\ 3 & c & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}5 & b & 8\\ 1 & c & 3\\ 4 & a & 3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & 4 & 7\\ -1 & 5 & 5\\ -b & -a & -2\end{pmatrix}$$

on a, b i c són paràmetres reals. Calculeu el valor d'aquests paràmetres perquè cap de les tres matrius tingui inversa.

PAU CAT TEC SET 2013 1.4

5.1.8

Es consideren les matrius

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & m\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ m & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

on m és un nombre real. Trobeu els valors de m per als què AB és invertible.

PAU CASTILLA Y LEÓN 2003

5.1.9

Donades les matrius $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$, trobeu per a què valors de m la matriu $B+mA$ no té inversa.

PAU CASTILLA Y LEÓN 2002

5.1.10

Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & m \end{pmatrix}$, determineu per a quins valors del paràmetre m existeix A^{-1}.

PAU CASTILLA Y LEÓN 1999

5.1.11

Donada la matriu $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & a+1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, determineu els valors del nombre real a per als què existeix la matriu inversa de P.

5.1.12

Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} c+d & d \\ 2c & c+d \end{pmatrix}$, determina per a quins valors de c i d la matriu té inversa.

PAU CASTILLA Y LEÓN 2006

Criptografía con matrices, el cifrado de Hill
https://culturacientifica.com/2017/01/11/criptografia-matrices-cifrado-hill/

5.2 Determinació d’una matriu inversa 2x2 mitjançant equacions.

Determinació d’una matriu inversa 2x2 mitjançant fórmula.

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Determinació d’una matriu inversa 2x2 mitjançant equacions.

Exercici resolt.

Determineu la matriu inversa de $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Solució: Si volem determinar la matriu inversa d’una matriu “petita”, per exemple 2x2 com aquesta, ho podem fer mitjançant un sistema d’equacions. En general aquest mètode no és acceptable per matrius 3x3.

Per definició, volem una matriu $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal que $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

és a dir,

$$\begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ -a+c & -b+d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

o equivalentment:

$$\begin{cases} a+2c=1 \\ b+2d=0 \\ -a+c=0 \\ -b+d=1 \end{cases}$$

Hem reduït el problema a resoldre un sistema de quatre equacions i quatre incògnites. Ara bé, observem que aquest sistema es pot separar en dos sistemes 2x2 independents:

La primera i la tercera equació formen un sistema per a les incògnites a i c:

$$\begin{cases} a+2c=1 \\ -a+c=0 \end{cases} \quad \text{amb solució } a=\frac{1}{3},\ c=\frac{1}{3}$$

I la segona i quarta equació formen un sistema per a les incògnites b i d:

$$\begin{cases} b+2d=0 \\ -b+d=1 \end{cases} \text{amb solució } b=\frac{-2}{3},\ d=\frac{1}{3}$$

I per tant la matriu inversa és $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

5.2.1

Calcula la matriu inversa de les següents matrius :

a) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

5.2.2

Considereu les matrius M de la forma $M = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, en què a és un nombre real.

a) Determineu a de manera que $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2a \\ -2a & -1 \end{pmatrix}$.

b) Determineu a de manera que $M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, en què M^{-1} representa la matriu inversa de M. És a dir, M • M^{-1} = I, en què I és la matriu identitat d'ordre 2.

PAU CAT CCSS JUNY 2018 1.1 (Solució: PAUCCSS pàg. 409)

5.2.3

Considereu les matrius quadrades d'ordre 2 de la forma $M = \begin{pmatrix} x & -1 \\ y^2+1 & x \end{pmatrix}$, amb x i y nombres reals.

a) Comproveu que la matriu M és sempre invertible, independentment dels valors de x i de y.

b) Per a x = 1 i y = –1, calculeu M^{-1}.

PAU CAT TEC JUNY 2017 1.5

5.2.4

Trobeu totes les matrius de la forma $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ que siguin inverses d'elles mateixes, és a dir, que $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

PAU CAT TEC SET 2015 5.6

5.2.5

Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Una matriu B, la primera fila de la qual és (2, 1), té dues columnes i compleix que $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Completeu-la.

b) Calculeu $(A{\cdot}B)^{-1}$.

PAU CAT CCSS SET 2011 2.5

5.2.6

Considereu les matrius $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 5\\1 & 2\end{pmatrix}$ i $C=\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{pmatrix}$.

a) Calculeu les matrius inverses de A i de B.
b) Determineu una matriu X de manera que A·X·B=C.

PAU CAT CCSS JUNY 2011 4.3

5.2.7

Donades les matrius següents:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 3\end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix}2 & 0\\-1 & 2\end{pmatrix}$$

a) Calculeu A^{-1} i B^{-1}.
b) Determineu X perquè es compleixi l'equació A·X·B= 2C.

PAU CAT CCSS JUNY 2010 5.6

5.2.8

Donada la matriu $B=\begin{pmatrix}2 & 3\\1 & 1\end{pmatrix}$, utilitzeu la matriu inversa B^{-1} per trobar una matriu X tal que $B\cdot X\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 4\\3 & 2\end{pmatrix}$.

PAU CAT TEC SET 1998 3.1

5.2.9 Exercici del Youtube

Determina la matriu inversa de $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$

Solució: https://youtu.be/SPOUNNMJby0 (Aula de estudios JM)

5.2.10 Exercici del Youtube

Determina la matriu inversa de $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\4 & -3\end{pmatrix}$

Solució: https://youtu.be/wfDoPGfo2fE (Equaciona Com Paulo Pereira)

5.2.11 Exercici del Youtube

Determina la matriu inversa de $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}$

Solución: https://youtu.be/AiYmucx5H4w (Liceo Rivas)

5.2.12 Exercici del Youtube

Determina la matriu inversa de $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{pmatrix}$

Solución: https://youtu.be/z1pA_2J-09w (Liceo Rivas)

5.2.13 Exercici del Youtube

Determina els valors de k per als què la matriu $A=\begin{pmatrix}k & 4+k\\ 1 & 1+k\end{pmatrix}$ no té inversa.

Solució: https://youtu.be/nrlZn-FFG4U (NO ENTIENDO NADA)

5.2.14 Exercici del Youtube

a) Determina els valors d'a per als què la matriu $M=\begin{pmatrix}-5 & a\\ 10 & -a-1\end{pmatrix}$ té inversa.

b) Determina la matriu inversa si $a=0$.

Solució: https://youtu.be/bFrTp6MEyL8 (lasmatematicas.es)

5.2.15

Comprova que la matriu $A=\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ és inversible i calcula la seva inversa.

5.2.16

Determina els valors del paràmetre a per als què la matriu $A=\begin{pmatrix}a+1 & 1\\ a-3 & a-3\end{pmatrix}$ té inversa.

CyL 2020

5.2.17

Donada la matriu $A=\begin{pmatrix}n-1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, determina tots els valors de n per als què la matriu A^2 té inversa.

CyL 2021

5.2.18

Considerau les següents matrius:

$$M=\begin{pmatrix}k & 1 & 0\\ 2 & -1 & 3k\end{pmatrix}\ ,\ N=\begin{pmatrix}0 & 2\\ k & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$$

a) Estudiau per a quins valors de k és $M\cdot N$ invertible.
b) Calculau la inversa de $M\cdot N$ per a $k=1$

Balears 2021 (Balears pàg. 653)

5.2.19

Donades les matrius $A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & -1\\ -2 & -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$,
$C=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & -3 & 0\end{pmatrix}$

a) Determina A^{-1}.

b) Aplicant el resultat de l'apartat anterior, resol l'equació matricial $AX+C=B$.

Galicia 2005

5.2.20

a) Determineu els valors del paràmetre a per als què la matriu $A=\begin{pmatrix}a & a\\ -1 & a\end{pmatrix}$ tingui inversa.

b) Trobeu la matriu inversa de A per al cas $a=-2$.

5.2.21

Determina els valors de m per al què la matriu $M=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & m^2+m\end{pmatrix}$ tingui inversa.

5.2.22

Donades les matrius $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & \lambda\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ \lambda & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, determina els valors de λ per als què la matriu AB té inversa.

5.2.23 Exercici del Youtube

Determina els valors de k per als què la matriu $A=\begin{pmatrix}k & 4+k\\ 1 & 1+k\end{pmatrix}$ no té inversa.

https://youtu.be/nrlZn-FFG4U (NO ENTIENDO NADA)

5.2.24 Exercici del Youtube

a) Determina els valors d'a per als què la matriu $M=\begin{pmatrix}-5 & a\\ 10 & -a-1\end{pmatrix}$ té inversa.

b) Determina la matriu inversa si $a=0$.

https://youtu.be/bFrTp6MEyL8 (lasmatematicas.es)

5.3 Determinació d’una matriu inversa 3x3 per adjunts.

Matriu de menors complementaris.

S’anomena menor complementari de l’element a_{ij}, i es designa per M_{ij}, el determinant de la matriu complementària de l’element, és a dir, la matriu que resulta d’eliminar la fila i i la columna j.

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 3 \\ -4 & 4 & 5 & -5 \\ 7 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M_{23} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & \cancel{1} & 5 \\ \cancel{2} & \cancel{6} & \cancel{0} & \cancel{3} \\ -4 & 4 & \cancel{5} & -5 \\ 7 & -2 & \cancel{2} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ -4 & 4 & -5 \\ 7 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

La matriu de menors complementaris és la matriu formada per tots els menors complementaris d’A.

L’adjunt d’un element. Matriu d'adjunts.

S’anomena adjunt de l’element a_{ij}, i es designa per A_{ij}, el menor complementari M_{ij}, precedit pel signe + o - , segons que la suma dels subíndexs doni un nombre parell o senar (a la pràctica el que fem és anar canviant el signe de les posicions *alternes*).

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

La matriu d’adjunts d’A és la matriu formada per tots els adjunts d’A, i es designa per $Adj(A)$.

Determinació de la matriu inversa per determinats.

Una matriu quadrada A té inversa A^{-1} si i només si $\det(A) \neq 0$, i en aquest cas

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} Adj(A)^t$$

on Adj(A) és la matriu d’adjunts d’A.

Exercici resolt.

Determineu la inversa de la matriu: $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Solució:

En primer lloc determinem la matriu M de menors complementaris:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 10 \qquad M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -4 \qquad M_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -6$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -28 \qquad M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 10 \qquad M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 16$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -11 \qquad M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \qquad M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

Canviem de signe les posicions « alternes » per a obtenir la matriu d'Adjunts, i després determinem la seva trasposta:

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 & -6 \\ -28 & 10 & 16 \\ -11 & 4 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow Adj(A) = \begin{pmatrix} 10 & 4 & -6 \\ 28 & 10 & -16 \\ -11 & -4 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$Adj(A)^t = \begin{pmatrix} 10 & 28 & -11 \\ 4 & 10 & -4 \\ -6 & -16 & 6 \end{pmatrix}$$

Per últim calculem el determinant de la matriu inicial A:

$$Det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = -2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{Det(A)} Adj(A)^t = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 10 & 28 & -11 \\ 4 & 10 & -4 \\ -6 & -16 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -14 & 11/2 \\ -2 & -5 & 2 \\ 3 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

5.3.1 Exercici del Youtube

Determina la inversa de la matriu $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Solució: https://youtu.be/Q6rLtXlHqRE (Susi Profe)

5.3.2 Exercici del Youtube

Determina la inversa de la matriu $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

https://youtu.be/jR1vJdyX0Fk (Xavi Mates)

5.3.3 Exercici del Youtube

Determina la inversa de la matriu $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

https://youtu.be/3BpGef99HEs (unicoos)

5.3.4

Determina les inverses de les següents matrius:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

5.3.5

Donada la matriu $A=\begin{pmatrix} -1 & -1 & a \\ -3 & 2 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$, es demana:

a) Trobeu els valors de a per a què la matriu A tingui inversa.
b) Calculeu la matriu inversa A^{-1} en el cas $a=2$.

5.3.6

Sigui la matriu $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix}$

a) Trobeu els valors de m per a què la matriu A tingui inversa.
b) Calculeu la matriu inversa A^{-1} en el cas $m=0$.

5.3.7

Sigui la matriu $A=\begin{pmatrix}0 & a & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 1 & 1 & -a\end{pmatrix}$.

a) Determineu per a quins valors de a existeix A^{-1}.
b) Calculeu A^{-1} per a a = 0.

PAU CAT TEC SET 2015 5.1

5.3.8

Donada la matriu $M=\begin{pmatrix}k+1 & 1 & 1\\ 0 & k-2 & 1\\ 0 & k-2 & -k\end{pmatrix}$:

a) Calculeu els valors del paràmetre k per als quals la matriu M no és invertible.
b) Per a k=0, calculeu M^{-1}.

PAU CAT TEC SET 2011 2.1

5.3.9

Donada la matriu $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & \alpha\\ \alpha & 0 & -1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$

a) Respondre raonadament a la següent pregunta: Existeix algun valor de $\alpha \in IR$ per al qual A no tingui inversa?
b) Calculeu, en cas que sigui possible, la matriu inversa de A^2 per a $\alpha = 0$.

PAU EUSKADI MAT2 JUNY 2011 B1

5.3.10

Donada la matriu

$$M=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & k-1\\ 4 & k & 0\end{pmatrix}$$

a) Determineu els valors de k per als què la matriu M té inversa.
b) Determineu la inversa de la matriu M per al valor $k=2$.

5.4 Determinació de matrius inverses per definició.

Recordem la definició de matriu invertible i matriu inversa:
Una matriu quadrada A és invertible si existeix una altra matriu, a la que anomenem A^{-1}, tal que

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

5.4.1

Demostra que si una matriu és invertible, la seva inversa és única.

5.4.2

a) Demostra que, si A i B són invertibles, també ho és AB, i determina $(AB)^{-1}$.
b) Demostra que, si A, B i C són invertibles, també ho és ABC, i determina $(ABC)^{-1}$.

5.4.3

Demostra que A^{-1} és invertible, i determina $\left(A^{-1}\right)^{-1}$

5.4.4

Demostra que si A^2 és invertible, llavors A també ho és, i determina $\left(A^2\right)^{-1}$.

5.4.5

Donades dues matrius quadrades A i B, demostra que si AB és invertible, llavors A i B també són invertibles, i determina A^{-1}.

5.4.6

Demostra que si A és invertible, i $k \neq 0$, kA és invertible, i determina $(kA)^{-1}$.

5.4.7

Demostra que si A és invertible, A^T és invertible, i determina $\left(A^T\right)^{-1}$.

Exercici resolt.

Donada la matriu $A=\begin{pmatrix}5 & -4 & 2\\ 2 & -1 & 1\\ -4 & 4 & -1\end{pmatrix}$,

a) Comprova que es verifica $2A-A^2=I$

b) Només utilitzant el resultat anterior, determina la inversa A^{-1}.

Solució:

a)

$$2A=2\begin{pmatrix}5 & -4 & 2\\ 2 & -1 & 1\\ -4 & 4 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & -8 & 4\\ 4 & -2 & 2\\ -8 & 8 & -2\end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix}5 & -4 & 2\\ 2 & -1 & 1\\ -4 & 4 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & -4 & 2\\ 2 & -1 & 1\\ -4 & 4 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & -8 & 4\\ 4 & -3 & 2\\ -8 & 8 & -3\end{pmatrix}$$

$2A-A^2=\begin{pmatrix}10 & -8 & 4\\ 4 & -2 & 2\\ -8 & 8 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}9 & -8 & 4\\ 4 & -3 & 2\\ -8 & 8 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, tal i com volíem demostrar.

b)

$2A-A^2=I \Leftrightarrow$ Traiem factor comú A a l'esquerra

$A(2I-A)=I$

Ara recordem la definició de matriu inversa: És aquella matriu que multiplicada per A, dóna la identitat. Per tant , la matriu inversa serà $2I-A$

$$A^{-1}=2I-A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5 & -4 & 2\\ 2 & -1 & 1\\ -4 & 4 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 4 & -2\\ -2 & 3 & -1\\ 4 & -4 & 3\end{pmatrix}$$

Hem pogut trobar A^{-1} sense haver de fer el llarguíssim procediment de menors complementaris, només traient factor comú en la igualtat $2A-A^2=I$ i pensant una mica què vol dir matriu inversa.

5.4.8

Siguin $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ i la matriu identitat d'ordre dos $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Comproveu que $(A-2I)^2 = 3I$.
b) Utilitzant la igualtat de l'apartat anterior, trobeu la matriu inversa de la matriu A en funció de les matrius A i I, i comproveu que coincideix amb la matriu B.
c) Calculeu la matriu X que satisfà la igualtat A · X = B.

PAU CAT TEC SET 2023 2.1 (Solució: PAUTEC pàg. 817)

5.4.9

Considereu les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, en què a és un paràmetre real.

a) Calculeu per a quin valor de a les dues matrius commuten, és a dir, per a quin valor de a es compleix que A·B = B·A. Comproveu que per a aquest valor de a se satisfà que A·B = 2·I, en què I és la matriu identitat d'ordre dos.
b) Per al valor de a trobat a l'apartat anterior, calculeu les matrius inverses de les matrius A i B. Podeu aplicar la relació A·B = 2·I.

PAU CAT CCSS SET 2022 3.5 (Solució: PAUCCSS pàg. 610)

5.4.10

a) Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, resoleu l'equació matricial $A^2X = A - 3I$, en què I és la matriu identitat.
b) Una matriu quadrada M satisfà que $M^3 - 3M^2 + 3M - I = 0$, en què I és la matriu identitat. Justifiqueu que M és invertible i expresseu la inversa de M en funció de les matrius M i I.

PAU CAT TEC JUNY 2021 2.5 (Solució: PAUTEC pàg. 656)

5.4.11

Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$.

a) Trobeu la matriu X que satisfà l'equació AX = I – 3X , en què I és la matriu identitat d'ordre 2.
b) Comproveu que la matriu X és invertible i calculeu-ne la matriu inversa.

PAU CAT TEC JUNY 2020 1.5

5.4.12

Sigui la matriu $M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$, en què a és un paràmetre real.

a) Calculeu per a quins valors del paràmetre a se satisfà la igualtat $M^2 - M - 2I = 0$, en què I és la matriu identitat i 0 és la matriu nul·la, totes dues d'ordre 2.
b) Fent servir la igualtat de l'apartat anterior, trobeu una expressió general per a calcular la matriu inversa de la matriu M i, a continuació, calculeu la inversa de M per al cas $a = \sqrt{2}$.

PAU CAT TEC JUNY 2019 1.5 (Solució: PAUTEC Pàg. 535)

5.4.13

Siguin les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -1 & -4 & 3 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Comproveu que satisfan la igualtat $A^2 - \frac{1}{2} A \cdot B = I$, en què I és la matriu identitat d'ordre 3.
b) Fent servir la igualtat anterior, trobeu la matriu inversa de A: A^{-1}.

PAU CAT TEC SET 2017 2.2

5.4.14

Responeu a les qüestions següents:

a) Trobeu l'única matriu de la forma $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ a & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ que satisfà que $A^2 = A$, i comproveu que A i A – I no són invertibles.
b) Justifiqueu raonadament que si A és una matriu quadrada d'ordre n diferent de la matriu nul·la, 0, i de la matriu identitat, I, i satisfà la igualtat $A^2 = A$, aleshores les matrius A i A – I no són invertibles.

PAU CAT TEC SET 2016 1.5

5.4.15

Responeu a les qüestions següents:

a) Calculeu totes les matrius de la forma $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -2 \end{pmatrix}$ que satisfan la igualtat $A^2 + A = 2I$, en què I és la matriu identitat, .

b) Justifiqueu que si A és una matriu quadrada que compleix la igualtat $A^2 + A = 2I$, aleshores A és invertible, i calculeu l'expressió de A^{-1} en funció de les matrius A i I.

PAU CAT TEC JUNY 2016 3.4

5.4.16

Responeu a les qüestions següents:
a) Demostreu que si A és una matriu quadrada que satisfà la igualtat $A^2=I$, on I és la matriu identitat, aleshores A és invertible i A^{-1} satisfà $(A^{-1})^2=I$.
b) Calculeu l'expressió general de les matrius de la forma $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & 2 \end{pmatrix}$ amb b≠0 que satisfan la igualtat $A^2=I$.

PAU CAT TEC JUNY 2014 3.6

5.4.17

Considereu la matriu $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$.
a) Comproveu que compleix la igualtat $A^2-5A=I_2$, on I_2 és la matriu identitat d'ordre 2.
b) Utilitzeu aquesta igualtat per a calcular la matriu inversa de A.
c) Resoleu l'equació matricial $A\cdot X=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, utilitzant la matriu inversa de A.

PAU CAT TEC SET 2010 2.4

5.4.18

Donada la matriu $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$,
a) Comproveu que es verifica la igualtat $A^3+I=0$, on I és la matriu identitat i 0 és la matriu nul·la.
b) Justifiqueu que A té inversa i determineu A^{-1}.
c) Calculeu A^{100}.

PAU TEC MADRID SET 2001

5.4.19

Considerem la matriu $A=\begin{pmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{pmatrix}$. Estudieu per a quins valors de x la matriu inversa de la matriu A coincideix amb la seva oposada, és a dir, $A^{-1}=-A$.

PAU CAT CCSS SET 2020 4.1 (Sol: PAUCCSS pàg. 484)

5.4.20

Siguin les matrius $C=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ i $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.
a) Comproveu que $C^3=I_2$, en què I_2 és la matriu identitat d'ordre 2, i deduïu que la matriu C és invertible i que $C^{-1}=C^2$. Calculeu C^{2022}.
b) Resoleu l'equació matricial $C\cdot X=A-2I_2$.

PAU TEC JUNY 2022 5.1 (Sol. PAUTEC pàg. 758)

5.5 Resolució d'equacions matricials mitjançant matriu inversa.

Donada una equació matricial $AX + B = C$ es pot resoldre aïllant la X:

$$AX + B = C \Rightarrow AX = C - B \Rightarrow X = A^{-1}(C - B)$$

Recorda que la multiplicació de matrius no és commutativa, i per tant has de "passar dividint", és a dir, multiplicar per la inversa al costat adequat:

$AX = B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow I \cdot X = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$ (multipliquem a **l'esquerra**)

$XA = B \Rightarrow XAA^{-1} = BA^{-1} \Rightarrow X \cdot I = BA^{-1} \Rightarrow X = BA^{-1}$ (multipliquem a **la dreta**)

Exercici resolt.

Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcula, si existeix, la matriu inversa de A.
b) Resol l'equació matricial $XA = A + 2B$
c) Resol l'equació matricial $AY = A + 2B$

Solució:

a) $DetA = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow$ la matriu A és invertible.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

b) $XA = A + 2B \Leftrightarrow X = (A + 2B) \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -7 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 32 \\ 20 & -67 \end{pmatrix}$

c) $AY = A + 2B \Leftrightarrow Y = A^{-1} \cdot (A + 2B) = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -7 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -59 & 40 \\ 26 & -17 \end{pmatrix}$

5.5.1

Resol les següents equacions, mitjançant la matriu inversa:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 10 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \end{pmatrix}$

5.5.2

Resol l'equació $AX = B$, on $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -7 \\ -4 & 4 & 2 \\ -13 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

5.5.3

Resol l'equació $AX = B$, on $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 4 & -2 & -1 \\ 7 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 11 & 7 & -1 \\ 14 & -3 & 7 \\ 17 & -18 & 16 \end{pmatrix}$

5.5.4

Resol l'equació $AX - B = C$, on $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 5 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ -4 & -5 & -1 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 9 & -4 & -14 \\ 19 & -24 & 1 \\ -5 & 2 & 16 \end{pmatrix}$

5.5.5

Resol l'equació $AX + B = C$, on $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ i

$C = \begin{pmatrix} -17 & 3 & 1 \\ -9 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

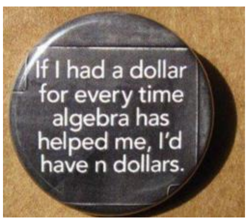
5.5.6

Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{pmatrix}$, en què a és un paràmetre real.

a) Calculeu els valors del paràmetre a per als quals la matriu A és invertible.

b) Per al cas a = 3, resoleu l'equació A·X = B–3I , en què $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

PAU CAT TEC SET 2022 3.5 (Solució: PAUTEC pàg 758)



5.5.7

$$\text{Sigui } A=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ p & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

a) Què significa que la matriu B sigui la matriu inversa de A?
b) Trobeu el valor del paràmetre p perquè la matriu inversa de A i la matriu transposada de A coincideixin.
Nota: No aproximeu les arrels mitjançant valors amb decimals; treballeu amb els radicals.

PAU CAT TEC JUNY 2013 4.3 (Solució: PAUTEC pàg 346)

5.5.8

Considereu l'equació matricial X·A=B, en què

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ a & -3 & a-1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ i } B=\begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 \\ 5 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Per a quins valors del paràmetre a l'equació matricial té una solució única?
b) Trobeu la matriu X que satisfà l'equació matricial quan a=3.

PAU CAT TEC SET 2014 5.6

5.5.9

Considereu el vector $\vec{w}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ i la matriu $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Trobeu tots els vectors $\vec{v}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ que fan que $A\cdot\vec{v}=\vec{w}$.

b) Quina condició han de complir a, b i c per tal que $A\cdot\vec{v}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ no tingui cap vector $\vec{v}$ solució?

PAU CAT TEC JUNY 2004 4.5 (Problema)

5.5.10

Considereu les matrius $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Comproveu que es compleix que $A^{-1}=A^2$.
b) Resoleu l'equació matricial A · X + B = I, en què I és la matriu identitat d'ordre 2.

PAU CAT CCSS JUNY 2020 1.5 (Solució: PAUCCSS pàg. 465)

5.5.11

Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

a) Determineu A^{2007}.

b) Determineu una matriu B tal que $AB = \begin{pmatrix} 11 & 5 & 1 \\ -7 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

5.5.12

Resol l’equació matricial (Amb el mètode de la matriu inversa)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 10 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

5.5.13 Exercici del Youtube

Resol l’equació matricial $AX + I = B - X$, on $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$,

amb el mètode de la matriu invesa (aïllant la X)

Solución: https://youtu.be/zJrx8S1i6Bo (Mates con Andrés)

5.5.14 Exercici del Youtube

Resol l’equació matricial $AX + 2B = C$, on $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ i

$B = \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ 16 & 18 \end{pmatrix}$ amb el mètode de la matriu invesa (aïllant la X)

Solución: https://youtu.be/y_KFYE4iWmY (TodoSobresaliente)

5.6 Resolució de sistemes mitjançant matriu inversa.

Exemple.

Observem el següent sistema de dues equacions i dues incògnites:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 1 \\ 5x + 8y = 1 \end{cases}$$

Aquest sistema es +pot interpretar de forma matricial de la forma $AX = B$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per tant, podem aïllar la matriu columna d'incògnites:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per tant, hem convertit un sistema d'equacions en un problema d'inversió de matrius:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 3c = 1 \\ 2b + 3d = 0 \\ 5a + 8c = 0 \\ 5b + 8d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = -3 \\ c = -5 \\ d = 2 \end{cases} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -3 \end{cases}$$

Formulació general.

Un sistema d'equacions quadrat, és a dir, de n files i n columnes, escrit en forma matricial:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{array} \right) = (A \mid B)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$ Si definim la matriu d'incògnites $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

El sistema d'equacions anterior serà equivalent a l'equació matricial $AX = B$

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

i per tant es pot resoldre calculant la matriu inversa de la matriu de coeficients A^{-1}

$$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Exercici resolt.

Resol el sistema $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ y + z = -2 \\ x + 2z = 4 \end{cases}$ mitjançant el mètode de la matriu inversa.

Solució: Escrivim el sistema en forma d'equació matricial:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ y + z = -2 \\ x + 2z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriu de menors:

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Canviem els signes: → Transposem: → Calculem el determinant: →

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & 6 & 2 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & 6 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8$$

→ Dividim pel determinant: → Multipliquem:

$$A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & 6 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/2 & 1/4 \\ 1/8 & 3/4 & -3/8 \\ -1/8 & 1/4 & 3/8 \end{pmatrix} \qquad x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per tant, la solució és x = 2, y = -3 , z = 1

5.6.1

Donat el següent sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-y+2z=-5 \\ x-z=3 \end{cases}$$

a) Escriu el sistema com a equació matricial.
b) Calcula el determinant i la inversa de la matriu de coeficients.
c) Resol el sistema mitjançant la matriu inversa.

5.6.2

Considerem el següent sistema d'equacions:

$$\begin{cases} ax+y+z=(a-1)(a+2) \\ x+ay+z=(a-1)^2(a+2) \\ x+y+az=(a-1)^3(a+2) \end{cases}$$

a) Comproveu que és compatible per a tot valor d'a.
b) Resoleu el sistema per a $a=-2$
c) Resoleu el sistema per a $a=0$ mitjançant el mètode de la matriu inversa.

PAU TEC MADRID 2000

5.6.3

Considerem el sistema d'equacions

$$\begin{cases} y+z=1 \\ (\lambda-1)x+y+z=\lambda \\ x+(\lambda-1)y-z=0 \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema segons els valors del paràmetre λ.
b) Resoleu el sistema per a $\lambda=0$.
c) Resoleu el sistema per a $\lambda=3$, mitjançant el mètode de la matriu inversa.

PAU TEC MADRID SET 2000

5.6.4

Considerem el sistema d'equacions

$$\begin{cases} a\,x+y+4z=1 \\ -x+a\,y-2z=1 \\ y+z=a \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema segons els valors del paràmetre a.
b) Resoleu el sistema per a $a=1$.
c) Resoleu el sistema per a $a=3$ amb el mètode de la matriu inversa.

PAU TEC MADRID SET 2001

6 Llistes d'exercicis de repàs.

6.1 Repàs general de les utilitats del determinant.

Recorda les tres utilitats del determinant:

1. Una matriu quadrada A té inversa $\Leftrightarrow$ $Det(A) \neq 0$

2. El rang d'una matriu quadrada A és màxim $\Leftrightarrow$ $Det(A) \neq 0$.

3. Un sistema és S.C.D. $\Leftrightarrow$ $Det(A) \neq 0$, on A és la matriu dels coeficients.

6.1.1

Si $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$, resol l'equació $A^2 - A = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$.

6.1.2

Determineu la matriu inversa de $B = \begin{pmatrix} 1 & k & t \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6.1.3

Determina el rang de la matriu $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ -1 & 2\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ en funció del paràmetre $\lambda \in IR$.

6.1.4

Discutiu, en funció del nombre real m, el rang de la matriu:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & m \\ 1+m & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

6.1.5

Trobeu una matriu quadrada X que verifiqui $XA^2 + BA = A^2$, on

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ i } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6.1.6

Determina una matriu A 2x2 simètrica (A coincideix amb la seva trasposta) sabent que:

$$\det(A) = -7 \text{ i } A\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

6.1.7

Considerem la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$.

a) Determineu la matriu $B = A^2 - 2A$.
b) Determineu els valors de λ per als què la matriu B tingui inversa.

6.1.8

Estudia el rang de la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ en funció del paràmetre a.

6.1.9

Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,

a) Trobeu la inversa de $A - BC$.
b) Resol l'equació matricial $AX - BCX = A$.

6.1.10

Estudia els següents sistemes d'equacions, en funció del paràmetre k:

a) $\begin{cases} x + (2k-1)y + 3z = 1 \\ x + ky + 2z = 1 \\ x + ky + (k+3)z = 2k-1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + kz = 1 \\ x + ky + z = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - ky + z = 1 \\ 2x + 3y + z = k+3 \\ kx + ky + (k+1)z = -1 \end{cases}$

6.2 Repàs general per al primer parcial TEC (1).

6.2.1

$$\left.\begin{array}{l}(m+2)x - y - z = 1 \\ -x - y + z = -1 \\ x + m\,y - z = m\end{array}\right\}$$

a) Discutiu el sistema per a als diferents valors de m.
b) Resoleu el sistema per al cas $m = 1$.

6.2.2

$$\left.\begin{array}{l}\lambda\, x + 2y + 6z = 0 \\ 2x + \lambda\, y + 4z = 2 \\ 2x + \lambda\, y + 6z = \lambda - 2\end{array}\right\}$$

a) Discutiu el sistema per a als diferents valors de λ.
b) Resoleu el sistema per al cas $\lambda = 2$.

6.2.3

$$\left.\begin{array}{l}3x + \lambda\, y = 0 \\ x + \lambda\, z = \lambda \\ x + y + 3z = 1\end{array}\right\}$$

a) Discutiu el sistema per a als diferents valors de λ.
b) Resoleu el sistema per al cas $\lambda = 0$.

6.2.4

$$\left.\begin{array}{l}x + \lambda\, y + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \\ \lambda\, x + y + z = 4\end{array}\right\}$$

a) Discutiu el sistema per a als diferents valors de λ.
b) Resoleu el sistema per al cas $\lambda = 1$.

6.3 Repàs general per al primer parcial TEC (2).

6.3.1

Discutiu, en funció del paràmetre k, el sistema d'equacions:

$$\left.\begin{array}{l} y+kz=1+k \\ x+z=3-k \\ kx-ky=1-k \end{array}\right\}$$

6.3.2

Resoleu el sistema anterior per a $k=1$

6.3.3

Donada la matriu $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, calcula A^{50}.

6.3.4

Resol l'equació matricial $AX=B$, on $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

6.3.5

Donades les matrius $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

on λ es qualsevol nombre real

a) Trobeu els valors de λ per als què AB és invertible.
b) Trobeu els valors de λ per als què BA és invertible.

6.4 Repàs general per al primer parcial TEC (3).

6.4.1

Estudia el sistema següent en funció del paràmetre k, i resol quan sigui compatible.

$$\begin{cases} x+y+z=k+3 \\ 2x-y+z=k+1 \\ 3x+k\,y+2z=4 \end{cases}$$

6.4.2

Donades les matrius $A=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -13 & 18 \\ -19 & 44 \end{pmatrix}$, resol l'equació matricial $XA-B=C$.

6.4.3

Considerem la matriu $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Determina, raonadament, A^{87}.

6.4.4

Donada la matriu $M=\begin{pmatrix} 3 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ i la matriu $A=\begin{pmatrix} 6 & -12 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$, determina els valors de a i b tals que $M^2-M=A$.

6.5 Repàs general per al primer parcial TEC (4).

6.5.1

Estudia el sistema següent en funció del paràmetre k, i resol quan sigui compatible.

$$\begin{cases} y+z=2 \\ -2x+y+z=-1 \\ (2-2a)x+(2a-2)z=a-1 \end{cases}$$

6.5.2

Determineu el valor de a per tal que la matriu $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ compleixi $A^2=A$.

6.5.3

Donada la matriu $A=\begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcula A^{557}.

6.5.4

Resol l'equació matricial $AX=B$ on $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$

6.6 Repàs general per al primer parcial TEC (5).

6.6.1

Estudia el sistema següent en funció del paràmetre a, amb el mètode de triangularització de Gauss.

$$\begin{cases} 2x+3y-4z=1 \\ 4x+6y-a\,z=2 \\ x+y-a\,z=10 \end{cases}$$

6.6.2

a) Determineu una matriu quadrada X que verifiqui

$$AX + XA = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \text{ on } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Analitza si la matriu X és invertible, i en cas de què ho sigui, determina la seva inversa.

6.6.3

Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, troba el valor o valors de x de forma que $B^2 = A$.

6.7 Repàs general per al primer parcial CCSS (1).

6.7.1

Una autoescola té obertes 3 sucursals a Reus. El nombre total de matriculats és de 352 alumnes, però els matriculats a la tercera sucursal són tan sols una quarta part dels matriculats a la primera. A més, la diferència entre els matriculats a la primera sucursal i els matriculats a la segona, és inferior en dues unitats al doble dels matriculats a la tercera sucursal. Quants alumnes hi ha matriculats a cada sucursal?

6.7.2

La Joana i la Mercè tenien 20000€ cadascuna per invertir. Cadascuna d'elles fa la mateixa distribució dels seus diners en tres parts P, Q i R, i les porta a una entitat financera. Al cap d'un any, a la Joana li han donat un 4% d'interès per la part P, un 5% per la part Q i un 4% per la part R i a la Mercè li han donat un 5% per la part P, un 6% per la part Q i un 4% per la part R. La Joana ha rebut en total 850 € d'interessos, mentre que la Mercè n'ha rebut 950€. De quants euros constava cadascuna de les parts P, Q i R?

6.7.3

Donades les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \;,\; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \;,\; I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Troba la matriu X tal que $ABX = AB + I$.

6.7.4

Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, calcula $(AB)^{-1}$.

6.7.5

Discuteix i resol, si és possible, el següent sistema d'equacions lineals:

$$\begin{cases} x - y + 2z = -4 \\ 3x - 5y + 7z = -14 \\ x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

6.8 Repàs general per al primer parcial TEC (6).

6.8.1

Determina els valors de α per als què la matriu $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \alpha+1 & -1 & \alpha-2 \\ -1 & \alpha+1 & 2 \end{pmatrix}$

té inversa.

6.8.2

Estudia, mitjançant el mètode del determinant o el mètode de Gauss, el sistema lineal

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = \lambda \\ x + y + \lambda z = \lambda^2 \end{cases}$$

6.8.3

Resoleu l'equació matricial

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

6.8.4

Resol el següent sistema, amb el mètode de "Triangularització de Gauss":

$$\begin{cases} x + y - z = 6 \\ x - y + z = 0 \\ -x - y + z = -6 \end{cases}$$

6.8.5

Determina, raonadament, A^{203}, amb

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

6.9 Repàs general per al primer parcial TEC (7).

6.9.1

Discutiu (amb el mètode del determinant) el següent sistema d'equacions en funció del paràmetre k :

$$\begin{cases} x-y+2z=k \\ -x+y-kz=1 \\ x+ky+(1+k)z=-1 \end{cases}$$

6.9.2

Resol el següent sistema d'equacions amb el mètode de triangularització de Gauss:

$$\begin{cases} x+y-4z=2 \\ 2x-y-z=1 \\ x-2y+3z=-1 \end{cases}$$

6.9.3

Donada la matriu $A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, determina A^{145}.

6.9.4

Demostreu que la matriu $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ té inversa i calculeu A^{-1}.

6.9.5

Determina els valors de λ per als què la matriu $A=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ és invertible.

6.10 Repàs general per al primer parcial CCSS (2).

6.10.1

L'amo d'un bar ha comprat refrescos, cervesa i vi per import de 500 € (sense impostos). El valor del vi és 60 € menys que el dels refrescos i de la cervesa conjuntament. Tenint en compte que els refrescos han de pagar un IVA del 6%, per la cervesa del 12% i pel vi del 30%, la qual cosa fa que la factura total amb impostos siga de 592.4 €, calcular la quantitat invertida en cada tipus de beguda.

6.10.2

Un estudiant va obtindre un 6 en un examen de matemàtiques que constava de 3 preguntes. En la primera a obtindre doble qualificació que en la segona i en la tercera va obtindre la suma de les altres dos. Troba quina qualificació va obtindre en cada pregunta.

6.10.3

Donades les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

troba la matriu X tal que $AX + B = I$

6.10.4

Determina la matriu inversa de $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

6.10.5

Discuteix i resol, si és possible, el següent sistema d'equacions lineal:

$$\begin{cases} x - y + 3z = -4 \\ x + y + z = 2 \\ x + 2y - z = 6 \end{cases}$$

6.11 Repàs general per al primer parcial TEC (8).

6.11.1

Determina el rang de la matriu

$$M = \begin{pmatrix} m & 1 & 2m \\ m & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

en funció dels valors del paràmetre m.

6.11.2

a) Estudi del sistema següent en funció del paràmetre λ

$$\begin{cases} \lambda x + 2y + z = 0 \\ \lambda x - y + 2z = 0 \\ x - \lambda y + 2z = 0 \end{cases}$$

b) Resol el sistema anterior per a $\lambda = 5$.

6.11.3

Donada la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

es demana determinar, de forma raonada, la matriu A^n.

6.11.4

Resol l'equació matricial $XA = B$, on $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

6.11.5

Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$,

a) Demostra que es compleix $A^2 = I - 2A$.

b) Determina la inversa A^{-1}, aplicant la igualtat anterior.

6.12 Repàs general per al primer parcial CCSS (3).

6.12.1

Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, determineu una matriu X tal que

$$A^2 X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6.12.1

Invertim 7400 euros en accions d'una empresa textil, una empresa de gas i una empresa de telefonia. Les accions de la empresa textil aporten un 2% d'interès anual, les de gas un 4% anual i les de l'empresa de telefonia aporten un 5%, generant un benefici total de 278 euros. La inversió en accions de l'empresa de telefonia és de 1000 euros menys que la suma de la inversió en accions de l'empresa textil i les de l'empresa de gas.

a) Planteja un sistema d'equacions per a calcular la quantitat invertida en cada empresa.

b) Calcula la quantitat invertida en cada una.

6.12.3

Resol el següent sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 1 \\ x - 3y + z = 0 \end{cases}$$

6.12.4

Donada la matriu $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, determina, de forma raonada, M^{127}.

6.13 Repàs general per al primer parcial TEC (9).

6.13.1

Resol el següent sistema (escriu les solucions en funció de z de la forma més simple possible):

$$\begin{cases} x+y+z=-1 \\ 2x-y+z=0 \\ -2x+7y+z=-4 \end{cases}$$

6.13.2

Estudia, en funció del valor de a, el següent sistema:

$$\begin{cases} ax-y+z=0 \\ x+y+az=3 \\ -x+y=1 \end{cases}$$

6.13.3

Donada la matriu

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Calcula A^2+2A+I , on I és la matriu identitat 3×3.
b) Determina, <u>de forma raonada i amb el resultat de l'apartat anterior</u>, la matriu inversa de A.

6.13.4

a) Determina la matriu inversa de $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) Resol l'equació $AX=B$, on $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

6.14 Repàs general per al parcial CCSS.

6.14.1

Resol el següent sistema matricial:

$$\begin{cases} 2X - Y = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \\ X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

6.14.2

Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, calcula A^{16}.

6.14.3

Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 4 & 20 \\ 16 & 5 \end{pmatrix}$, resol l'equació matricial $A^2X = B$.

6.14.4

Resol l'equació $XA = B$, on $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$, trobant A^{-1}.

7 Models lineals.

7.1 Matrius de transició.

Una matriu de transició és una matriu que, multiplicada pel vector d'estat A_n en un temps inicial, dóna x en un temps posterior A_{n+1}.

Podem trobar aquestes matrius en probabilitat, anomenades matrius de transició de Markov, que són matrius quadrades que descriuen les probabilitats de passar d'un estat a un altre en un sistema dinàmic.

7.1.1 Exemple resolt.

Una asseguradora de cotxes ofereix dues opcions: Un únic pagament anual o pagar cada mes. S'observa que el 30% dels clients que pagen mensualment continuen pagant mensualment a l'any següent (i per tant un 70% passen a pagar anualment), mentre que el 85% del que paguen anualment continuen pagant anualment a l'any següent (i per tant, un 15% passen a pagar mensualment).

a) Suposem que a l'any 2023 hi ha 200 clients que paguen anualment i 500 clients que paguen mensualment. Quants clients de cada tipus hi haurà l'any 2024? i l'any 2025?

b) Suposem que en un any determinat hi ha 562 clients de pagament anual i 138 clients de pagament mensual. Quants clients de cada tipus hi havia l'any anterior?

Solució.

a)

$$M=\begin{pmatrix}0.85 & 0.70\\ 0.15 & 0.30\end{pmatrix},\quad A_0=\begin{pmatrix}200\\ 500\end{pmatrix},\quad A_1=MA_0=\begin{pmatrix}0.85 & 0.70\\ 0.15 & 0.30\end{pmatrix}\begin{pmatrix}200\\ 500\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}520\\ 180\end{pmatrix}$$

En l'any 204 hi haurà 520 clients de pagament anual i 180 clients de pagament mensual

$$A_2=MA_1=\begin{pmatrix}0.85 & 0.70\\ 0.15 & 0.30\end{pmatrix}\begin{pmatrix}520\\ 180\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}568\\ 132\end{pmatrix}$$

En l'any 204 hi haurà 568 clients de pagament anual i 132 clients de pagament mensual. O també es pot calcular de la següent manera:

$$A_2=M^2A_0=\begin{pmatrix}0.8275 & 0.805\\ 0.1725 & 0.195\end{pmatrix}\begin{pmatrix}200\\ 500\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}568\\ 132\end{pmatrix}$$

b)

$$M=\begin{pmatrix}0.85 & 0.70\\ 0.15 & 0.30\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17/20 & 7/10\\ 3/20 & 3/10\end{pmatrix}\Rightarrow M^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -14/3\\ -1 & 17/3\end{pmatrix}$$

$$M^{-1}\begin{pmatrix}562\\ 138\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -14/3\\ -1 & 17/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}562\\ 138\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}480\\ 220\end{pmatrix}$$

L'any anterior hi havia 480 clients de pagament anual i 220 clients de pagament mensual.

7.1.2

En un bosque crece cierto tipo de árbol cuya madera se utiliza para la fabricación de muebles. Podemos distinguir dos etapas diferenciadas del árbol: una etapa de árbol pequeño y una etapa de árbol maduro, cuando su madera es apta para la industria. Cada año, el 80% de los árboles pequeños se mantienen en ese estado, y el resto de los árboles pequeños maduran. Por otro lado, se talan el 40% de los árboles maduros, y el resto permanece en etapa madura (estos árboles tienen un tiempo de vida muy alto, por lo que, a efectos prácticos, no desaparecen por causas naturales). Para compensar la deforestación, por cada árbol maduro talado se planta un nuevo árbol pequeño.

a) Al comienzo del primer año de tala, en este bosque viven 2000 árboles pequeños y 600 árboles maduros. Sea $\vec{A}_N$ el vector que contiene la información del número de árboles pequeños y maduros en el año N. Escribe $\vec{A}_0$ (es decir, el correspondiente a N=0, el comienzo del primer año) en base a la información del problema. ¿Cómo relacionarías matricialmente $\vec{A}_N$ y $\vec{A}_{N+1}$, es decir, dos años consecutivos? Primero, razona qué operación permite relacionar ambos vectores. Segundo, explica qué dimensiones tiene que tener la matriz M que relaciona ambos vectores. Por último, escribe esta matriz con la información que da el enunciado del problema.

b) Calcula $\vec{A}_3$. Hazlo de dos maneras distintas: primero, calcula $\vec{A}_3$ calculando previamente $\vec{A}_2$ mediante el proceso descrito en el apartado 1. Segundo, calcula $\vec{A}_3$ encontrando primero la matriz que relaciona directamente $\vec{A}_1$ y $\vec{A}_3$. Comprueba que efectivamente dan el mismo resultado para $\vec{A}_3$.

c) Hemos visto que M nos permite encontrar $\vec{A}_{N+1}$ una vez dado $\vec{A}_N$, pero, ¿existe alguna otra matriz que nos permita encontrar $\vec{A}_N$ una vez dado $\vec{A}_{N+1}$? ¿Cuál es esa matriz? Calcúlala.

Queremos analizar la población a largo plazo de especímenes de árbol en cada etapa. Para ello, queremos encontrar la matriz que relaciona el vector $\vec{A}_1$ con el vector $\vec{A}_N$, donde N≥1 es un número arbitrario.

d) Encuentra los autovalores de la matriz M.

e) ¿Es la matriz diagonalizable en este caso? Encuentra los autovalores de la matriz. [2 puntos]

f) Encuentra la descomposición de la matriz $M = SDS^{-1}$. Finalmente, calcula, haciendo uso de esta descomposición, $\lim_{N \to +\infty} \vec{A}_N$. ¿Cuál es la proporción de árboles pequeños respecto a la de árboles maduros a largo plazo?

Nota: Els apartats d, e i f pertanyen a un àmbit universitari i queden fora del context d'aquest llibre.

Fuente: Bachelor Online en Ingeniería en Organización Industrial, Universitat Carlemany.

7.1.3

Un centre cívic ofereix cursos de francès de nivell principiant, intermedi i avançat. Els alumnes inscrits, si ho desitgen, tenen garantida una plaça per al curs següent. És per això que, abans d'acabar el curs, es fan les reserves de plaça per al curs vinent. De l'alumnat de nivell principiant, un 15 % vol repetir el mateix curs, un 50 % vol fer el curs intermedi i un 5 % vol passar directament al curs de nivell avançat. Pel que fa a l'alumnat de nivell intermedi, un 10 % vol repetir el curs i un 60 % vol fer el curs de nivell avançat. Finalment, de l'alumnat de nivell avançat, un 20 % vol repetir el curs. Cap alumne no demana reserva de plaça per a un curs de nivell inferior i la resta d'alumnes no volen continuar al centre el curs vinent. Aquest any hi ha hagut 100 alumnes matriculats de nivell principiant, 90 de nivell intermedi i 60 de nivell avançat.

a) Calculeu el nombre de places que cal reservar de cada nivell per al curs següent mitjançant un producte de matrius.

b) El mateix centre cívic ofereix dos horaris de ioga, un de matí i un de tarda. Per al proper curs, el 50 % dels alumnes que actualment fan ioga al matí volen continuar amb el mateix horari, mentre que un 30 % volen passar a l'horari de tarda. La resta d'alumnes de matí no continuaran. Pel que fa als alumnes que actualment fan ioga a la tarda, un 40 % volen passar a l'horari de matí i un 60 % volen continuar fent l'horari de tarda. Si sabem que per al curs següent cal reservar 49 places per a l'horari de matí i 51 places per a l'horari de tarda, quants alumnes hi ha matriculats actualment en cada horari?

PAU CAT CCSS JUNY 2023 2 (Solució: PAUCCSS pàg. 630)

7.1.4 Exercici resolt pas a pas 🛟

Tres supermercats, A, B i C, es disputen els clients d'una ciutat. Inicialment, cadascun té una quota de mercat igual a la tercera part dels consumidors. Com a conseqüència d'una campanya publicitaria, un mes després es constata que:

- A conserva el 80 % dels seus clients, guanya el 10 % dels de B i el 2 % dels de C.
- B conserva el 70 % dels seus clients, guanya el 14 % dels de A i el 8 % dels de C.
- C conserva el 90% dels seus clients, guanya el 6 % dels de A i el 20 % dels de B.

a) Escriu matricialment els canvis produïts en els percentatges. Quina propietat té la matriu?

b) Utilitza la matriu anterior per calcular la quota de mercat que té cada supermercat després de la campanya.

c) Al mes següent tornen a fer una altra campanya publicitaria i obtenen els mateixos resultats. Calcula la quota de mercat que té cada supermercat després de la segona campanya.

7.1.5

Al realizar un estudio de mercado, los directivos de una empresa llegan a la conclusión de que cuando transcurre cada año el 70 % de sus clientes siguen siendo fieles, el 30 % de sus clientes se pasan a la competencia, el 35 % de los clientes de la competencia se pasan a su empresa, el 65 % de los que no son clientes permanecen en la competencia.

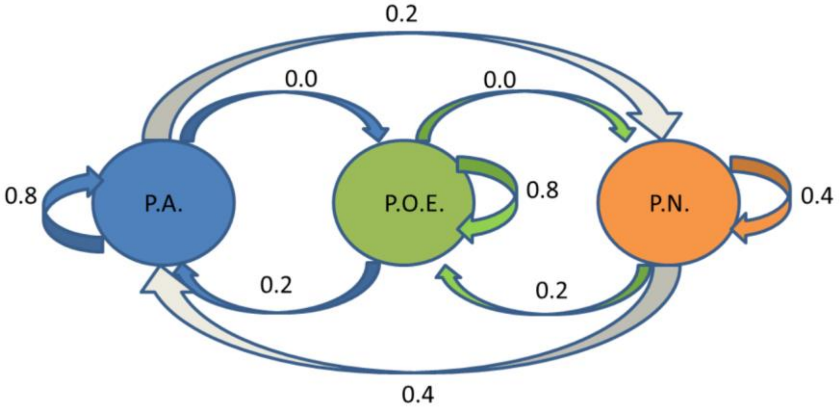
a) Plantear el modelo matricial pertinente.

b) Si la empresa tiene 2125 clientes y la competencia 1030, calcular la cantidad de clientes de la empresa y la competencia un año después.

c) Si a final de año la empresa tiene 2450 clientes y la competencia tiene 2550, ¿Cuántos clientes en la empresa y en la competencia había al inicio del año?

7.1.6 (sense solució)

La tendencia de voto, respecto a los partidos P.N., P.O.E. y P.A., en una Comunidad Autónoma son de gran interés cada 4 años. El diagrama de la figura siguiente representa a la matriz de transición de la tendencia de votos:



a) Modelizar la tendencia de voto de acuerdo con los datos anteriores a través de una matriz.

b) Supongamos que en el año actual se contabilizan 1500000 votos PN, 2100000 votos POE y 800000 votos PA. Determina la distribución de votos en las siguientes elecciones.

7.1.7 (sense solució)

Cierta especie de aves se mueve entre tres asentamientos, A, B, y C, según la siguiente tabla de migraciones anuales:

	Pasan a A	Pasan a B	Pasan a C
Las aves de A	80 %	10 %	10 %
Las aves de B	20 %	70 %	10 %
Las aves de C	30 %	10 %	60 %

a) ¿Qué expresión matricial proporcionará el número de aves en cada asentamiento después de 1 año?

b) Si inicialmente hay, en miles de aves, $A_0 = 2$, $B_0 = 3$ y $C_0 = 6$. Calcular el número de aves en cada asentamiento pasado un año.

c) En general, el esquema marcado por la tabla anterior hace que el número de aves en cada asentamiento cambie de un año a otro ¿Existe alguna configuración inicial de aves que permanezca constante año tras año? Calcular los porcentajes y comprobar el resultado.

7.1.8

Estem realitzant un estudi demografic sobre un cert territori on hi passa un riu. Observem que, cada any, el 8% de la població que viu a la part esquerra (E) del riu es mou a la part dreta (D), i que el 12% de la població que viu a la part dreta es mou a la part esquerra.

a) Representa aquest moviment amb una matriu 2x2.
b) Suposem que les respectives poblacions actuals són de 24500 persones a la part esquerra i 45200 persones a la part dreta. Determina el nombre de persones a cada part del riu després d’un any.
c) Suposem que, al final d’un determinat any, les poblacions respectives són 34638 persones a l’esquerra i 18012 persones a la dreta. Determina el nombre de persones a tots dos costats del riu al principi d’aquest any.

7.2 Funcions lineals.

7.2.1

La matriu següent expressa els preus unitaris, en euros, de quatre articles, A, B, C i D, procedents de les fàbriques f1, f2 i f3:

$$P = \begin{pmatrix} 34 & 40 & 36 \\ 11 & 8 & 12 \\ 23 & 27 & 32 \\ 25 & 21 & 30 \end{pmatrix}$$

Si una comanda és representada per un vector fila $C = \begin{pmatrix} x & y & z & t \end{pmatrix}$, què representa cadascun dels elements del resultat del producte $C \cdot P$? Si volem comprar 25 unitats de A, 30 de B, 60 de C i 75 de D, quina de les fàbriques ens ofereix el millor preu?

PAU CAT TEC JUNY 2005 1.2

7.2.2

Un fabricant d'automòbils produeix els models Record i Astrid. Desa la producció en tres naus. A la primera nau té 150 vehicles del model Record i 120 vehicles del model Astrid. A la segona guarda 80 Record i 140 Astrid. Finalment, a la tercera nau emmagatzema 250 Record i 125 Astrid. A més, el preu dels automòbils Record és de 6.520 €, mentre que cada Astrid val 8.130 €. Tota aquesta informació està recollida en les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 150 & 120 \\ 80 & 140 \\ 250 & 125 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 6.520 \\ 8.130 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Què representa la matriu B • A? Calculeu-la.
b) Què representa la matriu B • A • P? Calculeu-la.

PAU CAT CCSS JUNY 2018 5.5

7.2.3

La taula següent mostra els ingressos, en milers d'euros, d'una botiga que disposa de tres locals, durant els mesos de gener, febrer i març de 2020.

	Gener	*Febrer*	*Març*
Local 1	13,5	13,2	4,2
Local 2	11	12,5	3,8
Local 3	15	14	2,7

Hem recollit la informació anterior en la matriu A, en què cada fila indica un local i cada columna el mes corresponent:

$$A = \begin{pmatrix} 13{,}5 & 13{,}2 & 4{,}2 \\ 11 & 12{,}5 & 3{,}8 \\ 15 & 14 & 2{,}7 \end{pmatrix}$$

a) Considereu els vectors $v = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ i $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Feu les operacions v · A i A · w.
Interpreteu en cada cas el resultat obtingut.
b) La matriu B recull els resultats del trimestre següent, és a dir, els ingressos corresponents als mesos d'abril, maig i juny de 2020:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 2 & 7 & 5 \\ 4 & 11 & x \end{pmatrix}$$

Desconeixem la dada corresponent al mes de juny del local 3, que hem denominat x, però sabem que el rang de la matriu B és 2. Trobeu el valor de x.

PAU CAT CCSS SET 2021 1.1 (Solució: PAUCCSS pàg. 558)

7.2.4

Volem enviar una data codificada. Per a fer-ho, considerem el vector de tres components X = (d m a), en el qual d expressa el dia, m el mes i a l'any. Tot seguit, fem l'operació X·A + B, en què A i B són les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ i } B = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

El resultat d'aquesta operació és el vector codificat que enviem.
a) Si la data que volem enviar és l'1 de gener de 2019, és a dir, si X = (1 1 2019), quin és el vector codificat que enviarem?
b) Si el vector codificat que ens ha arribat és (2036 1 –13), quina és la data sense codificar?

PAU CAT CCSS SET 2019 5.1 (PAUCCSS pàg. 434)

7.2.5 Exercici resolt pas a pas

Una fàbrica produeix dos models d'un producte, A i B, en tres submodels: N, L i S. Del model A produeix : 400 unitats del submodel N, 200 unitats del submodel L i 50 unitats del submodel S. Del model B produeix: 300 unitats del submodel N, 100 unitats del submodel L i 30 unitats del submodel S. El submodel N duu 25 hores de taller i 1 hora d'administració. El submodel L duu 30 hores de taller i 1.2 hores d'administració. El submodel S duu 33 hores de taller i 1.3 hores d'administració.

a) Representar la informació en dues matrius.

b) Trobar una matriu que expressi les hores de taller i d'administració emprades per a cadascun dels models.

7.2.6

Un cinema disposa de dues sales en les quals es projecten dues pel·lícules diferents. La taula següent mostra el nombre de persones que han assistit a la projecció de cada pel·lícula la darrera setmana, agrupades per franges d'edat:

Franja d'edat	*Pel·lícula de la sala 1*	*Pel·lícula de la sala 2*
Menys de 18 anys	122	620
18-65 anys	930	433
Més de 65 anys	384	281

La informació de la taula anterior es registra amb la forma matricial

$$A = \begin{pmatrix} 122 & 620 \\ 930 & 433 \\ 384 & 281 \end{pmatrix}.$$

a) Considerant la matriu $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, calculeu el producte A · B. Expliqueu el significat de la matriu obtinguda.

Sabem que una entrada per a persones de menys de 18 anys costa 5 €, una entrada per a adults d'entre 18 i 65 anys costa 8,5 € i una entrada per a adults de més de 65 anys costa 6,5 €. Trobeu una matriu C = (a b c) de manera que el producte C · A · B doni els ingressos setmanals totals obtinguts per la venda d'entrades, i calculeu els ingressos corresponents a aquesta setmana.

b) Al cap d'uns mesos, el registre setmanal és donat per la matriu

$$D = \begin{pmatrix} 84 & 23 \\ 338 & x \\ 256 & 408 \end{pmatrix},$$

però hi ha un valor que s'ha esborrat, el del nombre de persones entre 18 i 65 anys que han assistit a la segona pel·lícula, i l'hem denotat per x. Calculeu el valor de x sabent que els ingressos totals d'aquella setmana van ser de 12.076 €.

PAU CAT CCSS SET 2024 3.2 (Sol. PAUCCSS pàg 755)

7.2.7

Los alumnos de 2º Bachillerato organizan una venta de pasteles para el viaje de fin de curso. Venden pasteles grandes, que necesitan 2 huevos, 5 terrones de azúcar y 100 g de harina cada uno, y pasteles pequeños, que necesitan 1 huevo, 3 terrones de azúcar y 80 g de harina cada uno.
a) Presente en una matriz M, de dimensión 3×2, las cantidades de los elementos necesarios para la elaboración de los pasteles, en función del número de pasteles grandes y pequeños.
b) Si desean fabricar 20 pasteles grandes y 30 pequeños, determine los elementos necesarios para su elaboración.
c) Calcule los pasteles de cada tipo que se pueden elaborar con 57 huevos, 154 terrones de azúcar y 3540 g de harina.

Andalucía 2012 (Modificado)

7.2.8

Un taller mecànic ha de dedicar diferent nombre d'hores per arreglar els diferents tipus de vehicle, tal i com s'indica en la següent taula:

	Xapa (hores)	Pintura (hores)	Motor (hores)
Utilitari	3	2	5
Berlina	4	3	5
Tot Terreny	6	1	4

A més a més, al taller hi treballen dos operaris conjuntament, A i B, que cobren l'hora de forma diferent en funció de la feina que hi fan:

	€/hora operari A	€/hora operari B
Xapa	16	15
Pintura	10	20
Motor	18	14

a) Determina la matriu que permet calcular el preu de la reparació de cada tipus de vehicle en funció del nombre d'hores que cada operari hi dedica.
b) Suposem que l'operari A hi dedica 2 hores i l'operari B hi dedica 3 hores. Quin serà el preu de la reparació de cada tipus de vehicle?
c) Determina el nombre d'hores dedicades per cada operari a una reparció que hagi costat 1875 € si es tracta d'un utilitari, 2250 € si es tracta d'una berlina, o bé 2052 € si es tracta d'un tot terreny.

7.2.9

Tres trabajadores A, B y C, al concluir un determinado mes, presentan a su empresa la siguiente plantilla de producción, correspondiente a las horas de trabajo, dietas de mantenimiento y kilómetros de desplazamiento que han realizado:

	Horas de trabajo	Dietas	Kilómetros
A	40	10	150
B	60	15	250
C	30	6	100

a) Representa, mediante una matriz X, los euros pagados a cada trabajador A, B y C, en función de las **H**oras de trabajo, número de **D**ietas y **K**ilómetros de desplazamiento realizados.

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} H \\ D \\ K \end{pmatrix}$$

b) Sabiendo que la empresa paga a los tres trabajadores x € por hora trabajada, y € por cada dieta y z € por Km de desplazamiento y que paga ese mes un total de 924€ al trabajador A, 1390 € al B y 646 € al C, calcular cuánto ha pagado a cada trabajador.

Galicia Junio 2004

7.2.10

En la siguiente tabla se indica la audiencia prevista (en miles de espectadores) por tres cadenas de televisión (A, B y C) en una determinada semana y en cada uno de los tres segmentos horarios (Mañana: M ,Tarde: T , Noche: N)

	A	B	C
M	40	60	20
T	60	40	30
N	100	80	90

a) Obtener la matriz que representa la audiencia de las tres cadenas en los tres segmentos horarios. Sabiendo que el beneficio que obtiene cada cadena por espectador es de 3€ por la mañana, 4€ por la tarde y 6€ por la noche, obtener mediante cálculo matricial los beneficios para cada una de las tres cadenas.
b) Sin embargo, como consecuencia de la calidad de los programas emitidos, se produjo en la audiencia prevista (y en todos los segmentos horarios) una reducción del 10% para la cadena A, una reducción del 5% para la B y un aumento del 20% para la C. Obtener la matriz que representa la nueva audiencia de las tres cadenas en los tres segmentos horarios.
b) Sabiendo que el beneficio que obtiene cada cadena por espectador es de 3€ por la mañana, 4€ por la tarde y 6€ por la noche, obtener mediante cálculo matricial los beneficios para cada una de las tres cadenas.

PAU Galicia Septiembre 2003

Solucions.

1.1.1 a) x=10, y=4, z=4 b) x=9, y=-3, z=-1 c) x=-5, y=-2, z=5
d) x=-10, y=-8, z=1 e) x=4, y=2, z=-2 f) x=-3, y=4, z=4
g) x=-1, y=-6, z=-1 h) x=-1, y=5, z=-4

1.1.2 a) $x=3, y=-4, z=2$ b) $x=-2, y=3, z=5$ c) $x=3, y=-2, z=-3$

1.1.3 a) x=2, y=-2, z=0 b) x=7/3, y=2/3, z=-1 c) x=0, y=-3, z=0
d) x=1, y=-1, z=-1 e) x=1, y=-2, z=3

1.1.4 x=-2, y=3, z=1

1.1.5 x=1, y=1, z=-1

1.1.7 Medalla blava: 9 punts, medalla groga: 6 punts, medalla taronja: 4 punts.

1.1.11 a) $x=4, y=2, z=1$ b) $x=-1, y=-2, z=2$ c) $x=1, y=3, z=2$
d) $x=-1, y=1, z=-3$ e) $x=-1, y=-4, z=4$ f) $x=3, y=-4, z=-2$

1.1.12 a) $x=7, y=10, z=-8$ b) $x=5, y=-3, z=4$ c) $x=2, y=-3, z=1$
d) $x=-2, y=3, z=-3$ e) $x=5, y=8, z=2$ f) $x=-5, y=-2, z=-9$

1.2.5 $x=\dfrac{-1-3z}{2},\ y=\dfrac{-13-13z}{4}$, z lliure

1.3.1 a) SCD: $x=1, y=-1, z=-1$ b) SCI: $z=\lambda, y=2\lambda-3, x=5-5\lambda$ c) SI

1.3.2 a) SCD x = -1, y = -1, z = 2 b) SCI $x=2-6z$, $y=5z-1$, z lliure c) S.I

1.6.26 $a=1 \Rightarrow SCI,\ a\neq 1 \Rightarrow SCD$

1.6.27

$$a=1 \Rightarrow \text{S.C.I.}\begin{cases}\text{x lliure}\\ \text{y} = \text{-x}\\ \text{z}=1+2\text{x}\end{cases} \quad a=-1 \Rightarrow \text{S.I.} \quad a\neq -1,1 \Rightarrow \text{S.C.D.}\begin{cases}\text{x}=\dfrac{\text{-1}}{2(\text{a}+1)}\\ \text{y}=\dfrac{\text{a}^2}{2(\text{a}+1)}\\ \text{z}=-\dfrac{a^2-2a-1}{2(a+1)}\end{cases}$$

1.7.9 Natació: 3 km, Ciclisme: 60 km, Cursa: 12 km

1.7.10 Melmelada: 5 €, Aigua mineral: 2 € , Paquet de sal: 2 €

1.8.13 taxi: 50/3 km, ferrocarril: 400/3 km, autobús: 50 km

1.8.18 L'espectacle E_1 costa 12,5 €, l'espectacle E_2 costa 9 € i l'espectacle E_3 és gratuït.

1.8.19 A=1, B=11, C=2.

1.9.16 x = 500 (inf) , y = 600 (oest) , z = 900 (terror)

1.9.17

$$\begin{cases}x+y+z=600\\ 12x+8.4y+7.2z=6384\\ 2(y+z)=x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=400\\ y=120\\ z=80\end{cases}$$

120 còpies amb 30% de descompte.

1.9.18

$$\begin{cases}x+y+z=10.5\\ 9.8x+8.75y+9.5z=10.5\cdot 9.4=98.7\\ z=2(x+y)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=1.5\\ y=2\\ z=7\end{cases}$$

1.9.19

$$\begin{cases} 4x+12y+15z=1600 \\ 12x+5y+15z=1450 \\ x+y+z=135 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=25 \\ y=50 \\ z=60 \end{cases}$$

1.9.20

$$\begin{cases} x+y+z=12000 \\ x=2(y+z) \\ 0.04x+0.05y-0.02z=432.5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=12000 \\ x-2y-2z=0 \\ 4x+5y-2z=43250 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8000 & (A) \\ y=2750 & (B) \\ z=1250 & (C) \end{cases}$$

1.9.21

$$\begin{cases} x+y+z=1650 \\ x-2y-2z=0 \\ 0.95x+0.90y+0.80z=1518 \end{cases} \Rightarrow x=1100,\ y=330,\ z=220$$

1.9.22

$$\begin{cases} x+y+z=57 \\ 800x+1000y+2000z=62000 \\ 832x+1000y+1800z=60760 \end{cases} \Rightarrow x=30,\ y=16,\ z=11$$

1.9.25 A: 11250 €, B: 38750 €, C: 50000 €

1.9.26 El precio del kg de cemento es de 8€/kg. El precio del kg de ladrillos es de 12€/kg. El precio del kg de azulejos es de 40€/kg

1.9.27 El número de televisores que se venden son: 300 televisores de tipo A, 250 televisores de tipo B y 200 televisores de tipo C.

1.9.28 El precio con IVA de un producto A es 3 · 1.04 = 3.12 €,
un producto B vale 10 · 1.10 = 11 € y un producto C vale 92 · 1.21 = 111.32 €.

1.9.29 500, 600 y 900.

1.9.30 b) 2500 € en la empresa textil, 1700 € en la de gas y 3200 € en la compañía de telefonía.
c) El sistema es ahora incompatible.

1.9.31 60 localidades del tipo A, 120 localidades del tipo B, 140 localidades del tipo C

1.9.32 X= 14, Y= 6; Z = 40.

1.9.33 500, 600 y 900.

1.9.34 Hay 50 pantalones tipo A, 15 tipo B y 5 tipo C

1.9.35 Son 380 alumnos de ESO, 525 de Bachillerato y 210 de Ciclos Formativos.

1.9.36 45 millones a proyectos, 44 a funcionamiento y 36 a gastos sociales

1.10.1

$$\begin{cases} 10x+15y+20z=270 \\ 2x+4y+6z=68 \\ 2x+3y+5z=58 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=10 \\ y=6 \\ z=4 \end{cases}$$

1.10.2 Si anomenem x, y, z les quantitats de Ciclons, Ciclops i Cicloides produïdes cada mes, el sistema lineal és

$$\begin{cases} 10x+12y+6z=1560 \\ 2x+2.5y+1.5z=340 \\ 2x+2y+1.5z=320 \end{cases} \Rightarrow x=60,\ y=40,\ z=80$$

1.10.3

$$\begin{cases} \dfrac{x+y+z}{3} = 88 \\ y = \dfrac{x+z}{2} + 9 \\ z = \dfrac{x+y}{2} - 9 \end{cases} \Rightarrow x = 88^\circ F \text{ , } y = 94^\circ F \text{ , } z = 82^\circ F$$

1.10.7 22 pomes, 30 alvocats i 18 pinyes

1.10.8 S'han venut 90 rellotges de tipus A, 100 rellotges de tipus B i 10 rellotges de tipus C

1.10.9 Sara 2000 seguidores, Cristina 5000 seguidores y Jimena 8000 seguidores.

1.10.10 x=10, y=30, z= 68

1.10.11 a) A= 7, B= 5 , C=3 b) 98 Tm, 120 Tm, 84 Tm

10.10.12 a) Se necesita 2000 · 0,78 = 1560 litros de nitrógeno, 2000 · 0,21 = 420 litros de oxígeno y 2000 · 0,01 = 20 litros de argón.

b) Son necesarios 1700 litros de A, 200 litros de B y 100 de C.

1.10.13 x = 6, y = 6, z = 3

1.10.14 3€, 2€, 1€

1.10.15 192, 74 y 54

1.10.16 x = 30 y = 22 z = 104 Los kg de grano tipo Arabica utilizados serán: 0.9x + 0.85y + 0.8z = 0.9 · 30 + 0.85 · 22 + 0.8 · 104 = 128.9 kg

1.10.17 x = 300 kg de pollastres y = 200 kg d'ànecs z = 100 kg de perdius

1.10.18 x = 8 vídeos d'esports, y = 7 vídeos de música i z = 5 vídeos de pel·lícules

1.10.19 $\begin{cases} b+r+n=50 \\ b=11(n+r/2) \\ 3.75(b-4)+2.25r+1.5(n-2)=159 \end{cases} \Rightarrow b=44, n=2, r=4$

1.12.7 a) Si $\lambda \neq -1$ i $\lambda \neq 2$ SCD. Si $\lambda = 2$ SI. Si $\lambda = -1$SCI. $x=0, y=-2, z=2$

b) Si $m=0$ S.I. $x=-2, y=3, z=-1$

c) Si $k \neq 0$ i $k \neq 2$ SCD, en cas contrari SCI. $x=0, y=1, z=-1$

d) Si $m \neq 1,-2$ SCD. Si $m=-2$ SCI, Si $m=-2$ SCI

e) Si $k \neq 0,-1$ SCD. Si $k=0$ SI. Si $k=-1$ SCI.

1.12.8 Si $k \neq -2,-3$ SCD, Si $k=-2$ SCI, $(x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}z, y=0, z=lliure)$,

si $k=-3$ SI

1.12.13 Si $\lambda = 2$, compatible indeterminat amb dos graus de llibertat. Si $\lambda = -4$, incompatible. Per qualsevol altre valor de λ, compatible determinat.

1.12.14 Si $\lambda = 2$, compatible indeterminat amb un grau de llibertat. Si $\lambda = -4/5$, incompatible. Per a qualsevol altre valor de λ, compatible determinat.

1.12.15 Si $\lambda = 1$, compatible indeterminat amb dos graus de llibertat. Si $\lambda = -1$, incompatible. Per qualsevol altre valor de λ, és compatible determinat.

1.12.16 Si $\lambda = 3$ compatible indeterminat amb 2 graus de llibertat. Si $\lambda = -3$, compatible indeterminat amb 1 grau de llibertat. Si $\lambda \neq 3$ i $\lambda \neq -3$, compatible determinat.

1.12.17 a) $\det = (m-2)(m+1)(m-4) = 0 \Leftrightarrow m=2, m=-1, m=4$

$m=-1 \Rightarrow SI, m=2 \Rightarrow SI, m=4 \Rightarrow SCI$

b) $\begin{cases} x = 2/5 \\ y = 9/5 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

1.12.23 $m \neq 2,-2 \Rightarrow SCD,\ m = -2 \Rightarrow SI\ ,\ m = 2 \Rightarrow SCI$

1.12.24 $a \neq 1,-1 \Rightarrow SCD,\ a = -1 \Rightarrow SI\ ,\ a = 1 \Rightarrow SI$

1.12.25 a) $Det = 2k^2(k+1) = 0 \Leftrightarrow k = 0, k = -1$

$k \neq 0,-1 \Rightarrow SCD,\ k = 0 \Rightarrow SI\ ,\ k = -1 \Rightarrow SCI$

b) $\begin{cases} x = -z \\ y = -1 \\ z\ lliure \end{cases}$

2.2.1 $A + B = \begin{pmatrix} -6 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

2.2.2 $A + B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -4 & 2 & 6 \\ -6 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

2.2.3 $A - B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ -5 & 0 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

2.2.4 $A - B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

2.3.1 $3A = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 12 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

2.3.2 $-2A = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 8 \\ -2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$

2.4.1

a) $\begin{pmatrix} -19 & -10 & 24 \\ 3 & 2 & -5 \\ 17 & 6 & -13 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 10 & -20 \\ 9 & -28 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 31 & -9 & -8 \\ 3 & 1 & 15 \\ -10 & 4 & 28 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -14 & -3 \\ 22 & 6 \end{pmatrix}$

2.4.2 $A \cdot B = \begin{pmatrix} -7 & -12 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}$, $B \cdot A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 9 & -16 \end{pmatrix}$

2.4.3 a) (-1) b) no es pot realitzar c) No es pot realitzar d) No es pot realitzar

e) $(3 \quad 2)$ f) No es pot realitzar g) $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ h) No es pot realitzar.

2.4.4 $A \cdot B + C = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -1 & 4 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}$

2.4.5 $A \cdot B - C = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 11 & 5 \end{pmatrix}$

2.5.1 $A^2 = \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}$

2.5.2 $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

2.5.3 $A^2 = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -7 \\ -3 & -6 & -10 \\ -4 & 11 & 10 \end{pmatrix}$

2.5.4 1. A^4=I, A^{147}=A^3= -A

2.5.5 A^3=I, A^{257}=A^2

2.5.23 $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ si n és parell $\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ si n és senar

2.5.24 $A^k = \begin{pmatrix} 1 & k & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2.5.25 $M^{31} = M$

2.6.1 $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

2.6.2 $X = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

2.6.12 $X = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, $A^{17} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 17 & -1 \end{pmatrix}$

2.6.26 $X = \begin{pmatrix} 35 & 13 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$

2.6.27 PA/7.1.7

2.6.28 a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

2.6.29 $A^2 + 2A = \begin{pmatrix} 1 & k+2 \\ k+2 & (k+1)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow k = -2$

2.6.30 $A^2 = A \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = a \\ a^2 + ab = a \\ b^2 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0, b = 1 \\ a = 1, b = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2.6.31 $a = 5$, $b = 1$

2.6.34 a)

$$\begin{pmatrix} a^2-2a+2 & 2 \\ 2 & a^2+2a+2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2a & 2 \\ 2 & 2+2a \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a^2-2a+1=2-2a \Rightarrow a=\pm 1 \\ a^2+2a+1=2+2a \Rightarrow a=\pm 1 \end{cases}$$

b) $|A|=-a^2=0 \Leftrightarrow a=0 \Rightarrow$ existeix A^{-1} si i només si $a \neq 0$

2.6.35 x=1

2.6.39 $X=\begin{pmatrix} 3/2 & -1 \\ -1/4 & 2 \end{pmatrix}$

2.6.40 $a=-9,\ b=-6$

2.6.41 m=1, m=-1

2.6.42 $a=0$ o $a=1$; $b=0$ o $b=1$

2.6.43 k = -2

2.6.44 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 2 \end{pmatrix}$

2.6.45 $a=b=-2$

2.6.46 a=1

2.6.47 a=-1

2.6.49 k = -2

2.6.48 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

2.7.1 $X=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

2.7.7 $X=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

2.7.9 a) $X=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) La inversa de X no existeix perquè el seu determinant és zero.

$Y^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

2.7.10 $X=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

2.7.12 $X=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

2.7.13 $X=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

2.7.14 $X=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

2.7.15 $A=\begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -1/3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2.8.10 a=-1

2.11.1 $X=\begin{pmatrix} 2 & 2+2\lambda \\ 11\lambda+12 & \lambda \end{pmatrix}$

3.1.1 a) –7 b) –13 c) –47 d) 22

3.2.1 a) –18 b) –50 c) 79 d) 45

3.2.2 a) x_1=-3 , x_2=-0.667 b) x_1=-1.5 , x_2=-0.333

3.2.3 $Det=(a-b)(a-c)(c-b)$

3.3.3 Si a la primera fila li sumem la resta queda una fila de zeros, i per tant el determinant és zero.

3.3.5 120

3.3.9

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & ab \\ ab & a^2 & b^2 \\ ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix}=a\begin{vmatrix} a & ab & ab \\ b & a^2 & b^2 \\ b & b^2 & a^2 \end{vmatrix}=a^2\begin{vmatrix} 1 & b & b \\ b & a^2 & b^2 \\ b & b^2 & a^2 \end{vmatrix}=a^2\begin{vmatrix} 1 & b & b \\ b & a^2 & b^2 \\ 0 & b^2-a^2 & a^2-b^2 \end{vmatrix}=$$

$$=a^2\begin{vmatrix} 1 & b & b \\ 0 & a^2-b^2 & 0 \\ 0 & b^2-a^2 & a^2-b^2 \end{vmatrix}=a^2(a^2-b^2)=\begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & a^2-b^2 \end{vmatrix}=a^2(a^2-b^2)^2$$

3.3.12 a) $Rang(A)=2$ per a qualsevol m. b) $\left|A^{20}\right|=\left|A\right|^{20}=0^{20}=0$

3.3.13

a) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 6 & 8 & 6 \end{vmatrix}=6\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & y & z \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}=-6\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}=-6$

b)

$$\begin{vmatrix} 2+x & 4+y & 6+z \\ 3x-1 & 3y & 3z-1 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2+x & 4+y & 6+z \\ 3x-1 & 3y & 3z-1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2+x & 4+y & 6+z \\ 3x-1 & 3y & 3z-1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3x-1 & 3y & 3z-1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x-1 & 3y & 3z-1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} 2+x & 4+y & 6+z \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2+x & 4+y & 6+z \\ 3x & 3y & 3z \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x & 3y & 3z \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3x & 3y & 3z \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3x & 3y & 3z \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=-\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}-3\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix}=2$$

3.3.14

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & ab-a^2 & b^2-a^2 \\ 2a & a+b-2a & 2b-2a \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ab-a^2 & b^2-a^2 \\ -a+b & 2b-2a \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a(b-a) & (b-a)(b+a) \\ b-a & 2(b-a) \end{vmatrix} = (b-a)^2 \begin{vmatrix} a & b+a \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (a-b)^2(a-b) = (a-b)^3$$

3.3.15

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} \overset{(3)}{=}$$

$$(b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b-a & c-a \end{vmatrix} \overset{(4)}{=} (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b-a & c+\cancel{a}-b-\cancel{a} \end{vmatrix} \overset{(5)}{=}$$

$$(b-a)(c-a)(c-b)$$

(1) C2-C1, C3-C1
(2) Desenvolupament per adjunts de la primera fila
(3) Treure factor comú en totes dues columnes.
(4) C2-C1
(5) Desenvolupament per adjunts de la primera fila.

3.4.1 a) –186 b) 18 c) 164 d) 230
3.4.2 a) –78 b) 112 c) -490
3.4.3 1. Det(A)=-3 , Det(B)=3, Det(C)=3
4.3.3 a) Si $k \neq 0$ i $k \neq \pm 1$ $Rang(A) = 3$, en cas contrari $Rang(A) = 2$.
b) Si $a \neq \pm 2$ $Rang(B) = 3$, en cas contrari $Rang(B) = 2$
c) Si $a \neq -1, \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ $Rang(C) = 3$, en cas contrari $Rang(C) = 2$
d) Si $m \neq 0,2$ $Rang(D) = 3$. En cas contrari, $Rang(D) = 2$.
e) $a \neq 0,1,-1$ $Rang(E) = 3$. En cas contrari, $Rang(E) = 2$.
4.3.9 Si a-1,1 rang(A)=3, i existeix inversa, Si a=-1, rang(A)=2, Si a=1, rang(A)=1
4.3.12 Si $a \neq 0,1$rang (A)=3, Si a=0 o a=1, rang(A)=2
4.3.13 $Det = m^2(m+3) = 0 \Leftrightarrow m = 0, m = -3$.
$m \neq 0,-3 \Rightarrow Rang = 3$, $m = -3 \Rightarrow Rang = 2$, $m = 0 \Rightarrow Rang = 1$
5.1.1 b, c, e.
5.1.4 1. http://www.toomates.net/Llistes/a2014/gen/pau_mate13sp.pdf
2. m=-2, m=1/2
3. m=1
4. $m \neq 1/2$
5. Sempre en té d'inversa.
6. $|A| = c^2 + d^2$, per tant només en el cas $c = d = 0$ la matriu no tindrà inversa.

5.2.1 1. a) $\begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 4 \end{pmatrix}$

5.2.8 $B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} -6 & 20 \\ 5 & -15 \end{pmatrix}$

5.2.15 $|A| = 1 \neq 0$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

5.2.16 a≠0 y a≠3

5.2.17 $n \neq 1$

5.2.18 a) Existeix la inversa per a qualsevol valor de $k \neq \frac{2}{23}$ i $k \neq 0$.

b) $(M \cdot N)^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/21 \\ 1/3 & 1/21 \end{pmatrix}$

5.2.19 a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 & 0 \\ -11 & -1 & 14 & -2 \end{pmatrix}$

5.2.20 a) $a \neq 0, -1$ b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix}$

5.2.21 Sempre que $m \neq -2$ i $m \neq 1$

5.2.22 $\lambda \neq \frac{1}{2}$ i $\lambda \neq -2$

5.3.4 a) $\begin{pmatrix} 2/5 & -1/5 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ -6/5 & 4/15 & -1/3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1/4 & 1/4 & 0 \\ 11/8 & -7/8 & 2 \\ 7/8 & -3/8 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 5 & -4 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

5.3.5 a) $a \neq \sqrt{\frac{5}{2}}$ b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1/3 & 4/3 \\ 2 & -2/3 & 5/3 \end{pmatrix}$

5.3.6 a) $m \neq 1, 3$ b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 0 \\ -4 & -4/3 & 1 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$

5.3.11 a) Sempre en té d'inversa b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

5.3.11 a) $k \neq 1$ b) $M^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

5.4.1 7. $M^2 \cdot 3I \cdot M^{-1} = 3M \cdot M \cdot M^{-1} = 3M \cdot M \cdot M^{-1} = 3M \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1/3 & 1 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

8. a) $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$, $A^3 = -I$

b) $A^3 + I = 0 \Rightarrow A \cdot A^2 = -I \Rightarrow A \cdot (-A^2) = I \Rightarrow A^{-1} = -A^2$

c) $A^6 = I$, dividint 100 entre 6 el residu és 4, per tant $A^{100} = A^4 = -A$.

5.4.1 Suposem que existeixen dues matrius $AB = BA = I$ i $AC = CA = I$. Llavors $AB = I \Rightarrow B = IB = CAB = CI = C \Rightarrow B = C$

5.4.2 a) $AB\cdot B^{-1}A^{-1}=A(B\cdot B^{-1})A^{-1}=A\cdot I\cdot A^{-1}=A\cdot A^{-1}=I$ i per tant $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

b) De la mateixa forma, $(ABC)^{-1}=C^{-1}\cdot B^{-1}\cdot A^{-1}$

5.4.3

$$(A^{-1})^{-1}=A$$

5.4.4

$$(A^{2})^{-1}=(A^{-1})^{2}$$

5.4.5

$I=AB\cdot(AB)^{-1}=A\cdot B(AB)^{-1}\Rightarrow$ A és invertible, i $A^{-1}=B\cdot(AB)^{-1}$

5.4.6

$$(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$$

5.5.1 a) $x=5$, $y=-3$, b) $x=-1$, $y=2$, c) $x=-2$, $y=-5$

5.5.2 $X=\begin{pmatrix}5&-3&6\\-2&2&1\\-2&0&3\end{pmatrix}$

5.5.3 $X=\begin{pmatrix}1&0&2\\-5&4&0\\0&-5&1\end{pmatrix}$

5.5.4 $X=\begin{pmatrix}3&1&-5\\-4&-5&2\\4&-3&4\end{pmatrix}$

5.5.5 $X=\begin{pmatrix}-3&1&1\\-3&0&0\\-3&2&4\end{pmatrix}$

5.5.10 a) $A^2=I\Rightarrow A^{2007}=A$ b) $B=\begin{pmatrix}1&1&2\\3&1&-1\end{pmatrix}$

5.5.11

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&-3/2\\-5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$$

5.6.1

a) $\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&2\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-5\\3\end{pmatrix}$ b) $Det\,A=6$, $A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1&1&3\\4&-2&0\\1&1&-3\end{pmatrix}$

c) $\begin{cases}x=1\\y=3\\z=-2\end{cases}$

5.6.2 a) $|A|=a^3-3a+2=0\Leftrightarrow a=1, a=-2$.

Si $a\neq 1$ i $a\neq -2$ llavors SCD

Si $a=1$ SCI (sistema homogeni)
Si $a=-2$ SCI (sistema homogeni)

5.6.3 a) $x=y=z=\lambda$

c) $A^{-1}=(1/2)\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$ $x=1, y=-3, z=1$

5.6.3 a) $|A|=\lambda(\lambda-1)=0 \Rightarrow \lambda=0, \lambda=1$.
Si $\lambda\neq 0$ i $\lambda\neq 0$ SCD, Si $\lambda=0$ o $\lambda=1$, SCI.
b) $x=1, y=1-\lambda, z=\lambda$

c) $A^{-1}=(1/6)\begin{pmatrix}-3 & 3 & 0\\ 3 & -1 & 2\\ 3 & 1 & -2\end{pmatrix}$ $x=1, y=0, z=1$

5.6.4 a) $|A|=a^2+2a-3=0 \Leftrightarrow a=1, a=-3$
Si $a\neq 1$ i $a\neq -3$ SCD. Si $a=1$ S.C.D, si $a=-3$ S.I.
b) $x=-3\lambda, y=1-\lambda, z=\lambda$.

c) $A^{-1}=(1/12)\begin{pmatrix}5 & 3 & -14\\ 1 & 3 & 2\\ -1 & -3 & 10\end{pmatrix}$ $x=\frac{-17}{6}, y=\frac{5}{6}, z=\frac{13}{6}$

6.1.1 a = 4.

6.1.2 $B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -k & k^2-t\\ 0 & 1 & -k\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

6.1.3 Si $\lambda\neq 0, 1/2$ el rang és 3. Si $\lambda=0$ o $\lambda=1/2$ el rang és 2.

6.1.4 Si $m\neq -2, 3$ el rang és 3. Si $m=-2$ o $m=3$ el rang és 2.

6.1.5 $A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ i per tant $X=I-BA^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}=-I$

6.1.6 $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$

6.1.7 a) $B=\begin{pmatrix}-2 & 1-\lambda\\ -1+\lambda & -1-2\lambda+\lambda^2\end{pmatrix}$, b) $\lambda\neq 3$ i $\lambda\neq -1$.

6.1.8 Si $a\neq 1/2$ el rang és 3, si $a=1/2$, el rang és 2.

6.1.9 a) $(A-BC)^{-1}=\begin{pmatrix}7 & -1 & -3\\ 5 & -1 & -2\\ -6 & 1 & 3\end{pmatrix}$ b) $X=\begin{pmatrix}11 & -13 & 21\\ 8 & -9 & 16\\ -10 & 12 & -18\end{pmatrix}$

6.1.10 a) Si $k=-1$ SI, si $k=1$ SCI, per a la resta de casos SCD.
b) Si $k=1$ SCI, si $k=-1$ SI, per a la resta de casos SCD.
c) Si $k=-2$ SCI, si $k=-3$ SI, per a la resta de casos SCD.

6.2.1
6.2.2
6.2.3

6.2.4

6.3.1 Si $k=0 \rightarrow$ S.I , si $k=1 \rightarrow$ S.C.I., la resta de casos: S.C.D

6.3.2 $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $A^3 = I$, $A^{50} = A^2$

6.3.4 $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

6.3.5 a) $AB = \begin{pmatrix} 1+2k & 3+2k \\ 1-k & 1 \end{pmatrix}$, $\det(AB) = k^2 + 3k - 2 = 0 \Leftrightarrow k = \begin{cases} -2 \\ 1/2 \end{cases}$

b) $BA = \begin{pmatrix} 4 & -1 & k-3 \\ k & 2k & k^2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$, $\det(BA) = 0$

6.4.1

Si $k=0$, SCI: $\begin{cases} x = -2 + 2y \\ y \ lliure \\ z = 5 - 3y \end{cases}$

Si $k \neq 0$, SCD: $x = -6, y = -2, z = k + 11$

6.4.2 $X = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

6.4.3 $A^{87} = A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

6.4.4 $a = -2, b = 4$, $a = 12, b = -3$

6.5.1 Si $a = 1$, SCI: $\begin{cases} x = 3/2 \\ y = 2 - z \\ y \ lliure \end{cases}$

6.5.2 $a = 0$

6.5.3 $A^{557} = A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

6.5.4 $X = \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

6.6.1

6.6.2

6.6.3 $x = 1$

6.7.1 $x = 200$, $y = 102$, $z = 50$

6.7.2 P=Q=5000€, R=10000€

6.7.3 $X = \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/10 & 7/5 \end{pmatrix}$

6.7.4 $(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 7/3 & -4/3 \\ -4/3 & 5/6 \end{pmatrix}$

6.7.5 $x = -3$, $y = 1$, $z = 0$

6.8.1

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \alpha+1 & -1 & \alpha-2 \\ -1 & \alpha+1 & 2 \end{vmatrix} = 2(\alpha+1)^2 - (\alpha-2) - 2 - 2(\alpha+1) =$$

$$= 2\alpha^2 + 4\alpha + 2 - \alpha + 2 - 2\alpha - 2 = 2\alpha^2 + \alpha = \alpha(2\alpha+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = -1/2 \end{cases}$$

6.8.2 $\lambda = 1 \to$ SCI, $\lambda = -2 \to$ SI, $\lambda \neq 1, -2 \to$ SCD

6.8.3 $X = \begin{pmatrix} -6 & -12 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}$

6.8.4 $x = 3, y = z + 3, z$ *lliure*

6.8.5 $A^3 = I$, $A^{203} = A^{3\cdot 67+2} = A^{3\cdot 67}A^2 = IA^2 = A^2$

6.10.1 x = 120€ refr. y = 160€ cerv. z = 220€ vi

6.10.2 Pregunta 1: 2 punts, Pregunta 2: 1 punt, Pregunta 3: 3 punts.

6.10.3 $X = \begin{pmatrix} 0 & 11 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$

6.10.4 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5/2 \\ -1 & 3/2 \end{pmatrix}$

6.10.5 SCD x = 1, y = 2, z = -1

6.11.1 $\det M = 2m(m-1) = 0 \Leftrightarrow m = 0$, $m = 1$

Si $m \neq 0$, $m \neq 1 \Rightarrow$ Rang M=3, si $m = 0 \Rightarrow$ Rang M=2, si $m = 1 \Rightarrow$ Rang M=2.

6.11.2 a) $\det = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$, $\lambda = 5$, $\lambda = 1$, $\lambda = 5 \Rightarrow SCI$

b) $\left\{ x = \dfrac{-1}{3} z \right.$, $y = \dfrac{1}{3} z$, z *lliure*

6.11.3

$$A^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{si n és parell} \\ \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \text{si n és senar} \end{cases}$$

6.11.4 $X = \begin{pmatrix} -12 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

6.11.5 a) $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$, $I - 2A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

b) $A^2 = I - 2A \Leftrightarrow A^2 + 2A = I \Leftrightarrow A(A + 2I) = I \Rightarrow A^{-1} = A + 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

6.12.1 $X=\begin{pmatrix}3 & -4\\ -2 & 3\end{pmatrix}$

6.12.2 a) $\begin{cases}x+y+z=7400\\ 2x+4y+5z=27800\\ x+y-z=1000\end{cases}$

b) 2500 € empresa textil, 1700 € empresa de gas, 3200€ empresa de telefonia.

6.12.3 SCI $x=\frac{3}{2}-z$, $y=\frac{1}{2}$, z *lliure*

6.12.4 $M^2=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $M^3=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}=-I$, $M^6=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=I$

$127=6\cdot 21+1\Rightarrow M^{127}=M^1=M$

6.13.2 Si $a\neq -1, 2$ SCD, si $a\neq -1$ SI, si $a=2$ SCI.

6.13.3 $A^2+2A+I=0\Rightarrow I=-A^2-2A=A(-A-2I)\Rightarrow A^{-1}=-A-2I$

$A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$

6.13.4 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $\qquad X=\begin{pmatrix}-5 & -6\\ 3 & 4\end{pmatrix}$

6.14.1 $X=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & -2\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

6.14.2 $A^{16}=A$

6.14.3 $X=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 4 & -1\end{pmatrix}$

6.14.4 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$

7.1.2 a) $\vec{A}_0=\begin{pmatrix}2000\\ 600\end{pmatrix}$

$\vec{A}_1=\begin{pmatrix}0.8 & 0.4\\ 0.2 & 0.6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2000\\ 600\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1840\\ 760\end{pmatrix}\rightarrow M=\begin{pmatrix}0.8 & 0.4\\ 0.2 & 0.6\end{pmatrix}$

b) $\vec{A}_2=\begin{pmatrix}0.8 & 0.4\\ 0.2 & 0.6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1840\\ 760\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1776\\ 824\end{pmatrix}$

$\vec{A}_3=\begin{pmatrix}0.8 & 0.4\\ 0.2 & 0.6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1776\\ 824\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1750.4\\ 849.6\end{pmatrix}$

$M=\begin{pmatrix}0.8 & 0.4\\ 0.2 & 0.6\end{pmatrix}\rightarrow M^2=\begin{pmatrix}0.72 & 0.56\\ 0.28 & 0.44\end{pmatrix}$

$\vec{A}_3=M^2\vec{A}_1=\begin{pmatrix}0.72 & 0.56\\ 0.28 & 0.44\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1840\\ 760\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1750.4\\ 849.6\end{pmatrix}$

c) $\vec{A}_N = M^{-1}\vec{A}_N$, $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1.5 & -1 \\ -0.5 & 2 \end{pmatrix}$

d) 1 i 0.4

e) Sí és diagonalitzable. (0.894427, 0.447214) i (-0.707107, 0.707107)

7.1.4 a) $A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.02 \\ 0.14 & 0.7 & 0.08 \\ 0.06 & 0.2 & 0.9 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.02 \\ 0.14 & 0.7 & 0.08 \\ 0.06 & 0.2 & 0.9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.307 \\ 0.307 \\ 0.387 \end{pmatrix}$

c) $A^2\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.02 \\ 0.14 & 0.7 & 0.08 \\ 0.06 & 0.2 & 0.9 \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.284 \\ 0.289 \\ 0.428 \end{pmatrix}$

7.1.5 b) La empresa tiene 1848 clientes y la competencia 1307

c) 2000 clientes en la empresa y 3000 clientes en la competencia.

7.1.8 a) 27964 (E) i 41736 (D) b) 34638 (E) i 18012 (D)

7.2.5 a) $\begin{pmatrix} H_N \\ H_L \\ H_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 1 \\ 30 & 1.2 \\ 33 & 1.3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N \\ A \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} H_A \\ H_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 & 200 & 50 \\ 300 & 100 & 30 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} H_N \\ H_L \\ H_S \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} H_N \\ H_L \\ H_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 1 \\ 30 & 1.2 \\ 33 & 1.3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 400 & 200 & 50 \\ 300 & 100 & 30 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} H_N \\ H_L \\ H_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10300 & 5100 & 1280 \\ 12360 & 6120 & 1536 \\ 13590 & 6730 & 1689 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} H_N \\ H_L \\ H_S \end{pmatrix}$

7.2.7 a) $\begin{pmatrix} H \\ T \\ G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ 100 & 80 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} G \\ P \end{pmatrix}$

b) 70 huevos, 190 terrores de azucar, 4400 gr. de harina.

c) 17 pasteles grandes y 23 pasteles pequeños.

7.2.9 15 euros por cada hora trabajada, 30 euros por dieta y 0,16 euros por Km de desplazamiento

7.2.10 a) $\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & 60 & 100 \\ 60 & 40 & 80 \\ 20 & 30 & 90 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M \\ T \\ N \end{pmatrix}$,

Beneficios: A =960000 €, B=820000 €, C=720000 €

b) $\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & 54 & 90 \\ 57 & 38 & 76 \\ 24 & 36 & 108 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M \\ T \\ N \end{pmatrix}$

Beneficios A y C: 864000 €, Beneficios B : 779000 €


YOU HAVE A QUESTION, CALVIN?
MORE OF A STATEMENT, REALLY.
I JUST WANT TO SAY THAT EDUCATION IS OUR MOST IMPORTANT INVESTMENT IN THE FUTURE, AND IT'S SCANDALOUS HOW LITTLE OUR EDUCATORS ARE PAID!
OK, HANDS UP. WHO ELSE DIDN'T DO THE HOMEWORK FOR TODAY?
ACTUALLY, I'D LIKE TO SEE MORE TEACHERS OUT ON THE STREETS.
9-24