TEORÍA que hay que saber...

Vectores

- **Vector**: Flecha con origen en un punto y extremo en otro punto: $\overrightarrow{AB} = B - A$
- **Coordenadas del vector**: Sus componentes: $\overrightarrow{AB} = (b_x - a_x\,,\ b_y - a_y)$
- **Módulo**: longitud del vector: $\overrightarrow{AB} = \sqrt{(bx - ax)^2 + (\,by - ay)^2}$

Propietats/operacions:

- *Suma* de dos vectores: da otro vector: $\vec{u} + \vec{v} = (\,u_x + v_x \;,\; u_y + v_y)$
- *Diferencia* entre dos puntos $(A - B)$: nos da las componentes de un vector: $\vec{u} = (\,B_x - A_x \;,\; B_y - A_y)$
- *Suma* de un vector más un punto: nos da otro punto: $A = B + \vec{u}$
- *Producto* de un escalar por un vector: da otro vector dependiente: $5 \cdot \vec{u} = (5 \cdot u_x\,,\ 5 \cdot u_y)$
- Vector *unitario*: Aquel cuyo módulo es la unidad: $|\vec{u}| = \sqrt{{u_x}^2 + {u_y}^2} = 1$
- Dos vectores forman una base *ortogonal* si son no nulos y perpendiculares entre sí.
- Dos vectores forman una base *ortonormal* si son unitarios y perpendiculares entre sí.
- *Producto escalar*: $\vec{u} \cdot \vec{v} = (\,u_x \cdot v_x \;+\; u_y \cdot v_y)$; $\boldsymbol{\vec{u} \cdot \vec{v} = |u| \cdot |v| \cdot \cos\alpha}$

Geometría: *ecuaciones de la recta*

Ecuación vectorial.

$$\boxed{(x,y) = (x_0, y_0) + (v_x, v_y)t}$$

Ecuación paramétrica.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} x = x_0 + v_x t \\ y = y_0 + v_y t \end{array}\right\}}$$

Ecuación continua.

$$\boxed{\frac{x - x_0}{v_x} = \frac{y - y_0}{v_y}}$$

Ecuación punto pendiente.

$$y - y_0 = \frac{v_y}{v_x}(x - x_0)$$

$$\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$$

Ecuación explícita.

$$\boxed{y = mx + n}$$

Pendiente de una recta:

$$\boxed{m = -\frac{a}{b} = \frac{v_y}{v_x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}$$

Ecuación implícita:

$$\boxed{ax + by + c = 0}$$

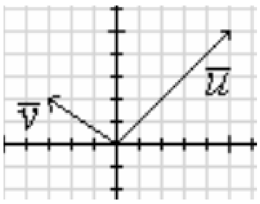
- Distancia entre 2 puntos: Es el modulo del vector : $d = \sqrt{(x1 - x2)^2 + (y1 - y2)^2}$
- Distancia de un punto *P(x,y)* a una recta *r*: $d(Pr) = \frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$
- Punto medio (*M*) entre dos puntos *A B*: $M = (\frac{Ax+Bx}{2}\ ,\frac{Ay+By}{2})$

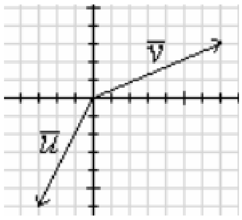
POSICIONS RELATIVES DE DUES RECTES

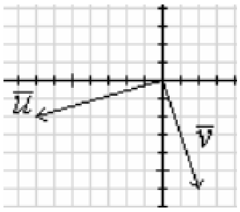
POSICIONS	VECTORS DIRECTORS	PENDENTS	EQUACIÓ GENERAL
Paral·leles (igual direcció i sense punts comuns)	Proporcionals $\frac{\vec{v_2}}{\vec{v_1}} = \frac{\vec{u_2}}{\vec{u_1}}$	Iguals $m = m'$	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$
Coincidents (igual direcció i tots els punts comuns)	Proporcionals $\frac{\vec{v_2}}{\vec{v_1}} = \frac{\vec{u_2}}{\vec{u_1}}$	Iguals $m = m'$	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$
Secants (diferent direcció i un punt en comú)	No proporcionals $\frac{\vec{v_2}}{\vec{v_1}} \neq \frac{\vec{u_2}}{\vec{u_1}}$	Diferents $m \neq m'$	$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$

Exercicis de vectors

0. Determine gráfica y aritméticamente el vector $\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{u}-\vec{v}$:

a) 

b) 

c) 

1.- Calcula el módulo y el argumento de los siguientes vectores:

$a)\ \vec{v}\ =(\,6,0)\ \ b)\vec{v}\ =\ (0,3)\ \ v\ =\ c)\ \vec{v}\ =(\,1,2)\ \ d)\ \vec{v}\ =\ (3,4)\ e)\ \vec{v}\ =\ (-2{,}1)$

2. Calcula el vector unitario de los siguientes vectores:

$a)\ \vec{v}\ =(\,6,0)\ \ b)\vec{v}\ =\ (0,3)\ \ v\ =\ c)\ \vec{v}\ =(\,1,2)\ \ d)\ \vec{v}\ =\ (3,4)\ e)\ \vec{v}\ =\ (-2{,}1)$

3. Hallar un vector de módulo 10 en la dirección de $\vec{u}\ =(\,4,3)$

4. Partiendo de los siguientes vectores:

$a)\ \vec{u}\ =(\,6,0)\ \ \vec{v}\ =\ (0,3)\ \ v\ =\ \vec{w}\ =(\,1,2)\ \ \vec{r}\ =\ (3,4)\ \ \vec{s}\ =\ (-2{,}1)$

Calcula los siguientes productos escalares: $a)\ \vec{u}\cdot\ \vec{v}\ b)\ \vec{v}\cdot\ \vec{w}\ c)\ \vec{s}\cdot\ \vec{u}\ d)\ \vec{r}\cdot\ \vec{w}\ e)\ \vec{r}\cdot\ \vec{s}$

5. Un vector tiene de módulo 4 y otro vector tiene módulo 5. Si el ángulo formado por los dos vectores es de 60º, calcule el producto escalar de los dos vectores.

6. Comprueba si el ángulo formado por los vectores es de 60º: $\vec{u}\ =(\,\sqrt{3}+1,\sqrt{3}-1)\quad \vec{v}\ =(\,\sqrt{3}-1,\sqrt{3}+1)$

7. Calcula x e y para que los vectores $\vec{u}\ =(\,2,y)\ \ \vec{v}\ =(\,x,1)$ sean ortogonales y además $|\vec{v}|=\sqrt{5}$

8. Dados los vectores: $\vec{u}\ =(\,2,y)\ \ \vec{v}\ =\ (1,-1)$ Determina y para que dichos vectores formen un ángulo de 45º.

9. Sabiendo que $\vec{u}=(\sqrt{3},1)$ forma un ángulo de 60º con un vector $\vec{v}$, de módulo igual al módulo de u , calcular las componentes de $\vec{v}$.

10. Calcular los ángulos y la longitud de los lados del triángulo ABC, sabiendo que las coordenadas de sus vértices son los puntos A(0, 0), B(1, 3) y C(4, 2).

11. Hallar el área de un triángulo de vértices A(1, 3), B(3, 6) y C(7, 2).

12. Calcular los valores de *m* y *n* para que los vectores $\vec{u}\ =\left(-\frac{3}{5},m\right)$ y $\vec{v}\ =\left(n,\frac{5}{9}\right)$
a) Sean unitarios b) Sean ortogonales.

13. Encuentra el punto medio (M) y el punto simétrico (S) entre los puntos A(1,2) y B(3,6)

14. Dados los vectores: $\vec{u}\ =(1{,}4)$ y $\vec{v}\ =(6{,}2)$ Determina el ángulo que forma la bisectriz de estos vectores con el eje OX.

15. Hallar los puntos que, estando situados sobre el segmento AB, A(1, 2) y B(4, –1) dividan a este en dos partes de tal forma que una parte sea el doble que la otra.

Solucions:

0: a) u+v = (2,7) u-v= (8,3) b) u+v = (4,-3) u-v= (-10,-9)

1: a) $|\vec{v}|=6$, $\theta=0°$; b) $|\vec{v}|=3$, $\theta=90°$; c) $|\vec{v}|=\sqrt{5}$, $\theta=63.43°$; d) $|\vec{v}|=5$, $\theta=-53.13°$; e) $|\vec{v}|=\sqrt{5}$, $\theta=206.56'$

2: $a)\ (1{,}0)\ ;\ b(0{,}1)\ ;\ c)\ (\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}});\ d)\ (\frac{3}{5},\frac{-4}{5})\ ;\ e)\ (\frac{-2}{\sqrt{5}},\frac{-1}{\sqrt{5}})$ ***3***: (8,6) ***4***: a) 0; b) 6; c) –12; d) –5; e) –2 ***5***: 10 ***7***: ±2 ; ±4

8: 0 ***9***: v=(0,2) v=$(\sqrt{3},-1)$ ***10***: |AB|=|BC|=√10 , α=90° , |AC|=√20 , α=45° ***11***) 20 ***12***) a) m=±4/5 b) n=25m/27

13) M(2,4) S(7,10) **14**) 57.5° **15**) P = (2, 1); P' = (3, 0)

Exercicis de rectes

1. Hallar la ecuación vectorial, paramétrica y continua de la recta que pasa por los puntos A = (3, 2) y B = (1, –1)
2. Escribir la forma explícita y continua la ecuación de la recta: 2x + 3y = 6
3. Dada la recta r: x + 3y + 2 = 0, en forma implícita, escribirla en forma explícita, continua y vectorial
4. Hallar la ecuación paramétrica de la recta que pasa por los puntos P = (2, 1) y Q = (1, –2)
   ¿Para qué valores del parámetro se obtienen los puntos P y Q y el punto medio de P y Q?
5. a) Halla la pendiente de la recta que pasa por los puntos A(2, 2) y B(0, 4)
   b) Escribe las ecuaciones explícita e implícita de la recta que pasa por los puntos P(1, 4) y Q(2, 3).
6. Halla la pendiente de la recta que pasa por los puntos A(0, 1) y B(3, 4)
7. Halla el vector director y la pendiente de las siguientes rectas: a) y = 3x – 2. b) (x – 1)/2 = (y + 2)/4
8. Encuentra la ecuación de la recta cuyos puntos de intersección con los ejes son A(6, 0) y B(0, –2)
9. ¿Pertenece el punto P(3, 3) a la recta que pasa por los puntos A(1, –1) y B(2, 1)?
10. Determina el valor de *k* para que los puntos A(2, –1), B(1, 4) y C(k, 9) estén alineados.
11. Hallar la ecuación de la recta perpendicular a ***r*** que pasa por el punto ***P*** en los casos:
    a) *r: {x=2-3t ; y=1+t } ; P(3, 1)* b) *r: y=2x-1 ; P(1,2)* c) *r: 2x-3y +2 =0 ; P(0,0)*
12. Hallar la ecuación de la recta que pasa por B(3, 1) y es paralela a la que pasa por los puntos A(2, 0) y C(2, –1)
13. Halla la ecuación de la recta perpendicular al vector $\vec{w}\ (2,1)$ y que corta a *y = x – 2* en el punto de ordenada 3.
14. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto (2, –1) que es paralela a la que pasa por los puntos (2, 0) y (1, 3)
15. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas *2x+3y+1=0* ; *x-y-2=0* y es perpendicular a la recta *3x + 5y =15* .
16. Hallar el valor de *a* y *b* para que las rectas: *r1: ax-y+2 ; r2: bx+6y-9* sean perpendiculares y, además, la segunda pase por el punto P(1, 1).
17. Determina *a* y *b* sabiendo que la recta *2x + by = 0* pasa por el punto (1, 2) y es paralela a la recta *ax-2y+3=0.*
18. Dadas las rectas: *r: 3x+y-3* *s: -2x+ay -8=0* Hallar "*a*" para que formen un ángulo de 45°.
19. Hallar el valor de “a” y de “b” para que las rectas: *r: ax+2y-8=0* *s: 2x+by -3 = 0* se corten en el punto (2, 1).
20. Calcula la distancia entre las rectas paralelas: *r: 3x +4y -15* *s: 3x +4y -40 =0*
21. Encuentra un punto de la recta *r: x+y-2=0* que equidiste de los puntos A(1, 3) y B(1, 1)
22. Las coordenadas del punto medio del segmento AB son (2, 1). Calcula las coordenadas del punto A sabiendo que las coordenadas de B son (1, 2)
23. Se tiene el cuadrilátero ABCD con A(3, 2); B(1, –2); C(–1, –1); D(1, 3). Comprueba que es un paralelogramo y calcula su centro y su área.
24. Un cuadrado de vértice A en el punto (0, 1) y su centro el punto (2, 1). Hallar los otros tres vértices.
25. Calcula el área del triángulo que tiene sus vértices en los puntos A(1, 4), B(3, –2) y C(–1, 0)
26. Determina el vértice D del paralelogramo ABCD, sabiendo que A(1, –2); B(3, –1) y C(0, 3)
27. Dados los puntos: A(1, 3) B(5, 7) C(7, 5) D(3, 1) Calcula los puntos medios de sus lados y comprueba que forman un paralelogramo.
28. Dadas las rectas *r: 2x -3y -3=0* *s: 3x-y-1* *t: {x=3-4t ; y=1+2t}* Calcula el área del triángulo que forman.

Solucions:

1) (x, y) = (3, 2) + t·(2, 3); {x = 3 + 2·t; y = 2 + 3·t}; (x – 3)/2 = (y – 2)/3
2) y = (–2/3)x + 2; (x – 3)/3 = y/(–2) **3**) y = (–1/3)x-2/3; (x – 1)/3 = (y + 1)/(–1); (x, y) = (1, –1)+ t·(3, –1)
4) {x = 2 + t; y = 1 + 3·t}; t = 0; t = –1; t = –1/2 **5**) a) m = –1; b) y = –x + 5; x + y – 5 = 0 **6**) m = 1
7) a) v = (1, 3); m = 3; b) v = (2, 4); m = 2 **8**) x – 3y – 6 = 0 **9**) Sí **10**) k=0
11) a) y=3x-8 b) y=-1/2 x + 5/2 c) y=- 3/2 x **12**) y=1 **13**) 2x+y-13=0 **14**) 3x+y-7=0 **15**) P(1,-1) 5x-3y+5=0
16) a=2 b=3 **17**) a=4 n=-1 **18**) a=1 **19**) a = 3; b = –1 **20**) 5 **21**) (0,2) **22**) (3,0) **23**) (1 , ½) A=10
24) (2,3) (4,1) (2,-1) **25**) 5/2 **26**) (-2,2) **27**) (3,5), (6,6), (5,3), (2,2) **28**) A=10

IES JAUME I
Departament de Matemàtiques

VECTORS

gener
1r de BAT

1.- Considereu els punts A:(-3,5), B:(-1,2) i C:(3,4) que determinen un triangle
a) Trobeu l'angle en el vèrtex A
b) Trobeu un punt D de manera que ABCD sigui un paral·lelogram.

2. a) Expresseu en forma polar el vector $\vec{u}$:(3,5).
b) Representeu gràficament el vector donat en forma polar $2_{30°}$, i trobeu-ne les coordenades.

3. a) Trobeu un vector que tingui la mateixa direcció que el vector $\vec{v}$:(4,5) però amb mòdul el triple i sentit contrari.
b) Trobeu un vector amb la mateixa direcció i sentit però de longitud 1.

1.- Donats els punts P(1,2), Q(x,5), R(1-y,3) i S(1+y,2x), trobeu x i y de tal manera que $\vec{PQ}$ i $\vec{RS}$ siguin vectors equivalents.

2.- Considereu els vectors $\vec{u} = (-3,5)$, $\vec{v} = (4,-9)$ i $\vec{w} = (2,6)$ representeu-los gràficament i trobeu els angles que formen:
a) $\vec{u}$ amb l'eix X 120'96° i l'eix Y 30'96°   b) $\vec{u}$ i $\vec{v}$
c) $\vec{u}$ i $\vec{w}$ d) $\vec{v}$ i $\vec{w}$

3.- Esbrineu sense buscar l'angle si els vectors següents són ortogonals:
a) $\vec{u} = (4,6)$ i $\vec{v} = (-9,6)$ b) $\vec{r} = (0,5)$ i $\vec{s} = (5,1)$
c) $\vec{x} = (-5,5)$ i $\vec{y} = (-1,1)$ d) $\vec{z}$: (5,2) . $\vec{t}$:(-3,7)

Ec de la recta

Exa Eli 25. *Siguin r i s les dues rectes del pla d'equacions: r: $2x - y - 3 = 0$, $s: \frac{x+1}{4} = \frac{y+2}{2}$*
(a) Calcula l'equació explícita de la recta que passa pel punt d'intersecció r-s, i que és perpendicular a la recta $t: 6x + 2y - 1 = 0$ (b) Comprova si els punts A(-2,-2), B(3.-1) i C(6,-2) estan alineats i el perquè de la resposta.
(c) Quina distància hi ha entre el punt P(-2,7) i la recta t?

Exa Eli: 3B – El Joan té un terreny en forma triangular representat per tres línies rectes que el delimiten:
r: $y=x+7$; s: $(x,y)=(-3,1)+k(4,-2)$; t: $5x+4y=1$
(a) Determina quants km de tanca necessitarà si vol tancar el seu terreny. s t r
(b) Determina quina superfície en kilòmetres té el terreny d'en Joan.
(c) L'empresa que posa la tanca, ha avisat en Joan perquè si l'angle que es forma al vèrtex t-s és menor a 25°, pot tenir problemes amb la instal·lació. Comprova si l'angle pot suposar un problema o no.

3C Estudieu les posicions relatives de r y s. Si són paral·leles, troba la distància entre elles. Si són secants, troba el punt d'intersecció i l'angle més petit que formen. r: 2 x-y+3=1 s: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-5}{4}$

Exam Eli de vectors: La FEEC (Federació d'Entitats Excursionistes de Catalunya) organitza una cursa amb 3 punts de control i que forma i que forma un circuit circular que va d'A(-10,5) a B(5,15), de B a C(13,3) i de C a A.

a) Determina la llargada total de la cursa
b) Digues si el circuit forma un triangle rectangle
c) Calcula el punt simètric de A respecte el recorregut BC i indica'n les coordenades.
d) Determina les rectes que van de A a B i de C a A

IES JAUME I

GEOMETRIA

1.- Trobeu de dues formes diferents l'equació del lloc geomètric dels punts del pla que equidisten dels punts A:(1,3) i B:(5,-7).

2.- Trobeu el lloc geomètric dels punts del pla que equidisten de les rectes següents: $3x + 4y - 5 = 0$ i $12x - 5y - 8 = 0$

3.- Trobeu l'equació del lloc geomètric dels punts dels pla tals que la seva distància al punt (3,3) és el doble de la distància al punt (-3,3).

4.- Lloc geomètric dels punts del pla que equidisten dels eixos de coordenades.

5.- Lloc geomètric dels punts del pla la distància dels quals al punt (0,0) val 4.

IES JAUME I
SALOU

EQUACIÓ DE LA RECTA

Matemàtiques 1r BAT

1.- a) Trobeu l'equació vectorial, paramètrica, contínua, implícita i explícita de la recta que passa pel punt P:(2,1) i té la direcció del vector $\vec{v} = (-3,2)$.
b) Trobeu tres punts d'aquesta recta i representeu-la gràficament.
c) Doneu tres exemples de vectors directors d'aquesta recta.

2.- Trobeu tres punts i un vector director de cadascuna de les rectes següents:

a) $(x,y) = (2,-5) + \alpha\,(1,-2)$

b) $\left.\begin{aligned} x &= -3 + 4\beta \\ y &= 7 - \beta \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} x &= 3\,K \\ y &= 5 \end{aligned}\right\}$

d) $y = 3x - 7$

3.- Digueu si els punts A:(1,-3), B:(4,7) o C:(-2,1) pertanyen a la recta r: $y = 2x - 5$ o a la recta r': $2x - 3y + 7 = 0$.

4.- Comproveu si algun dels punts A:(-2,1), B:(4,1) o C:(7,-5) són de la recta $(x,y) = (-1,1) + \alpha\,(-3,2)$

5.- Comproveu si A:(-2,8) o B:(3,-1) són de la recta $\left.\begin{aligned} x &= -4 + \alpha \\ y &= 2 + 3\alpha \end{aligned}\right\}$

6.- a) Trobeu l'equació vectorial de la recta que passa per P:(1,2) i Q:(3,-5).
b) Trobeu l'equació implícita de la recta que passa per A:(0,3) i B:(-1,3).
c) Trobeu l'equació cartesiana de la recta que passa per C:(-1,5) i D:(2,5).

7.- Trobeu les equacions de les rectes horitzontal i vertical que passen pel punt P:(3,4).

8.- Expresseu la recta $3x - y + 12 = 0$ en forma paramètrica.

9.- Trobeu el pendent, l'angle que formen amb l'eix X i un vector director de les rectes següents: a) $y = x - 12$ b) $y = 7x + 1$ f) $(x,y) = (3,-2) + K(1,5)$

IES JAUME I
SALOU

ANGLE ENTRE DUES RECTES. PERPENDICULARITAT

1.- Trobeu l'angle que formen les parelles de rectes següents:
a) $y = -x$ $y = 2.5x + 6$
b) $y = 4x + 1$ i $y = 3$
c) $3x - 2y + 5 = 0$ i $3x + 4y + 8 = 0$

2.- Trobeu l'equació de la recta que passa pel punt (1,3) i forma una angle de 45° amb la recta $5x - 2y + 1 = 0$.

3.- Trobeu les equacions de les rectes que passen pel punt (1,-2) i formen una angle de 60° amb la recta $4x - 3y + 2 = 0$.

PROVA DE GEOMETRIA **TERESIANES** **1rBAT**

1. Determina si els vectors $\vec{a} = (1,-3)$ i $\vec{b} = (3,-5)$ formen una base i expressa el vector $\vec{c} = (-7,9)$ com una combinació lineal dels vectors $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

[1,5 punts]

2. Troba els vectors perpendiculars a $\vec{v} = (2,-3)$ i de mòdul $\sqrt{52}$.

[1 punt]

3. Donats els punts $A = (-3,2)$, $B(4,3)$ i $C = (0,4)$, determina:
   a) Equació general de la recta que passa per C i és paral·lela a la recta que passa per A i B.
   b) Calculeu l'àrea del triangle ABC (agafeu de base el costat $\overline{AB}$).
   c) L'equació contínua de l'altura del triangle que passa per C.
   d) L'equació general de la mitjana del triangle que passa per C.

[4,5 punts]

4. Trobeu la distància i angle entre les rectes r: $\frac{x-1}{2} = y+4$ i la recta $y = 3x-1$.

[1 punt]

5. **Troba les rectes paral·leles a** r: $6x-8y+5=0$ que es troben a 5 unitats de distància.

[1 punt]

6. **Determina la projecció ortogonal del punt** $A = (3,-1)$ sobre la recta r: $x+3y-5=0$.

ELISABETH

<u>Rectes exponencials i logaritmes (escolleix 2 entre el 3 següents)</u>

Exercici 6 (2 p)

Trobeu una recta paral·lela i una altre de perpendicular a r: $\begin{cases} x = -3+2t \\ y = 1-3t \end{cases}$ passin pel punt A=(3,-2)

$m_1 \cdot m_2 = -1$

Solució:	Paral·lela: $y = \frac{-3}{2}x + \frac{5}{2}$	Perpendicular: $y = \frac{2}{3}x - 4$

Exercici 6 (2 p) Estudieu les posicions relatives de r i s: Si són paral·leles troba la distància entre elles. Si són secants, troba el punt d'intersecció i l'angle més petit que formen. Si són coincidents no cal fer res més.

r: $\begin{cases} x = 3-2t \\ y = 5+3t \end{cases}$ secants $m_1 \neq m_2$ **s: 2x − 3y + 9 = 0**

$\frac{3}{-2}x + \frac{19}{2} = y$

$\frac{2}{3}x + \frac{9}{3} = y$