Límits – Resum i exercicis - Continuïtat

- **Indeterminaciones**: ∞ / ∞ ; $\infty - \infty$; $0/0$; 1^{∞} ; $0 \cdot \infty$
- **Fuerza de las funciones**: $a^x \;>>\; x^n \;>>\; \sqrt[m]{x} \;>>\; \log_b x$

a) Límites cuando x →∞

- Solución directa: Nos quedamos con el término de mayor grado y despreciamos a los de menor potencia

$$Ejemplo: \lim_{x\to\infty} -x^2 + \cancel{4x} + \cancel{1} = \lim_{x\to\infty} -x^2 = -\infty$$

- **Indeterminación tipo** $\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$

a) ***Si es fracción de polinomios***: Regla de grados $\boxed{\frac{\infty}{\infty}}\; \frac{P(x)}{Q(x)} \Rightarrow \frac{a\cdot x^n + b\,x + \ldots}{b\cdot x^d + c\,x + \ldots} \Rightarrow \begin{cases} \text{Si grad del numerad} > \text{grad del denom.} \Rightarrow \infty \\ \text{Si grad del numerad} < \text{grad del denom.} \Rightarrow 0 \\ \text{Si grad del numerad} = \text{grad del denom.} \Rightarrow a/b \end{cases}$

Ejemplo caso 1: $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - \cancel{2x} - \cancel{5}}{x - \cancel{4}} \Rightarrow \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow$ **Indet.** $\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} 3x = +\infty$

Ejemplo caso 2: $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^3 - 4x + 3} \Rightarrow \ldots \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow$ **Indet.** $\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - \cancel{x} + \cancel{1}}{x^3 - \cancel{4x} + \cancel{3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$

Ejemplo caso 3: $\lim_{x\to\infty} \frac{-3x^2 - 2x + 5}{4x^2 - 4} \ldots \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow$ **Indet.** $\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{-3x^2 - \cancel{2x} + \cancel{5}}{4x^2 - \cancel{4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-3x^2}{4x^2} = -\frac{3}{4}$

b) ***Si es fracción de funciones:*** 1º ganan exponenciales (base>1) 2º Potenciales/raíces 3º Logaritmos 4º Sen/cos

- **Indeterminación tipo** $\boxed{\infty - \infty}$

a) Si hay una **raíz - algo**: Multiplicar y dividir por el conjugado, para utilizar la fórmula: $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+1} - x \Rightarrow \infty - \infty \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \underset{a}{\sqrt{x+1}} - \underset{b}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x+1} - x\right)\left(\sqrt{x+1} + x\right)}{\sqrt{x+1} + x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+1-x^2}{\sqrt{x+1}+x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} -x = -\infty$$

b) Si es del tipo: **fracción – fracción**: Restar las fracciones y volver a hacer el límite. *Ejemplo*: $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x+1} - \frac{3x^2}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2(x-1) - 3x^2(x-1)}{(x+1)\cdot(x-1)}$

- Indeterminación tipo $\boxed{0\cdot\infty}$ Hacer la inversa de un factor que da 0 para convertirla en el tipo: ∞/∞ si es necesario hacer L'Hopital

Ejemplo: $\lim_{x\to 0} x \cdot \ln x = 0 \cdot \infty \rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty} \rightarrow L'Hopital: -\frac{1/x}{1/x^2} = -x = 0$

- **Indeterminación tipo** $\boxed{1^{\infty}}$ Si: $\lim_{x\to\infty} f(x)^{g(x)} = 1^{\infty}$ →Cambiar por: $\boxed{e^{\lim_{x\to\infty} g(x)\cdot[f(x)-1]}}$

Ejemplo:

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{3x-5}{3x-2}\right]^{2x^2} \Rightarrow \left[\frac{\infty}{\infty}\right]^{\infty} \Rightarrow 1^{\infty}\text{ Indet.} \Rightarrow e^{\lim_{x\to\infty} 2x^2\left[\frac{3x-5}{3x-2} - 1\right]} = e^{\lim_{x\to\infty} 2x^2\left[\frac{3x-5-3x+2}{3x-2}\right]} = e^{\lim_{x\to\infty}\left[\frac{-6x^2}{3x-2}\right]} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

b) Límites cuando x → nº

- Solución directa: Sustituimos directamente. *Ejemplo*: $\lim_{x\to 2} x^2 = 2^2 = \mathbf{4}$

- **Indeterminación del tipo:** $\boxed{\frac{0}{0}} \Rightarrow \begin{cases} \text{Método a) Descomponer en factores y simplificar} \\ \text{Método b) Aplicar regla L'Hôpital derivando Num y Den} \end{cases}$

a) Si es racional: $\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 6x + 12}{x^2 + 3x - 10} = \frac{0}{0} \Rightarrow$ **Indet.** $\Rightarrow \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x^2-6)}{\cancel{(x-2)}(x+5)} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-6}{x+5} = \frac{-2}{7}$

b) Si es irracional: $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5} - 3}{x^2 - 2x} = \frac{0}{0} \Rightarrow$ **Indet.** $\Rightarrow \lim_{x\to 2} \frac{\left(\sqrt{x^2+5}-3\right)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}{(x^2-2x)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)}{x\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

c) Límites laterales

- ***Caso fracción (algo/0)***: Para ver la tendencia de las asíntotas verticales: $\lim_{x\to 2^+} \frac{x}{x-2} = -\infty \downarrow$; $\lim_{x\to 2^-} \frac{x}{x-2} = +\infty \uparrow$
- ***Caso funciones a trozos***: Comprobar si son iguales los límites laterales en los puntos de unión:

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & x < -1 \\ x^2+1 & -1 \le x \le 4 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to -1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to -1^-} (x+3) = 2 \\ \lim_{x\to -1^+} (x^2+1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{Luego } \lim_{x\to -1} f(x) = 2$$

Full d'exercicis

1. $\lim\limits_{x\to\infty} 5x^3+7x$ (∞)

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} -\dfrac{1}{x^2}$ (0)

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3-5}{-x^2-4}$ (-∞)

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^3-2}{\sqrt{x}-3}$ (∞)

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-2x}{4x^2-4}$ (1/4)

6. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\dfrac{x+3}{x-2}}$ (1)

7. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^5+2x-6}}{x^3-4x+2}$ (0)

8. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+3x}-x$ (3/2)

9. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}$ (0)

10. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^7-x^2+1}{2x^7+x^3+300}$ (1/2)

11. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{5x}{x-3}$ (-10)

12. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$ (2)

13. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ (1/2)

14 $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x$ (0)

15 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4-16}{x^3-8}$: (2)

16 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^4-16}{x^3-8}$ (8/3)

17 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1}$ (1)

18 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{x^2-2x+3}\right)$ (2)

19 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+1)(x+2)}{(x+3)(x+4)}$ (18)

20 $\lim\limits_{x\to 81} \dfrac{x-81}{\sqrt{x}-9}$ (18)

21 $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(x+1)^{100}}{(2x+50)^{100}}$ ($1/2^{100}$)

22 $\lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{\cos x}{1+sen\ x}$ = (0)

23 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$ (4)

24 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x^2}{2-\sqrt{x^2+3}}$ (8)

25 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-x^2-4x+4}{(x-1)^3}$ (-∞)

26 $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ (+∞)

27 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+2}{x-1}-\dfrac{x-3}{x^2-3x+2}$ ∄

27 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3-4}{x}-\dfrac{6x^4}{3x^2-7}$ (-14/3)

28 Continuidad en 0 y en 1

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x\le 0 \\ x^2+1 & \text{si} \quad 0<x\le 1 \\ 2x+1 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

29 Hallar a y b para que sea continua

$$f(x)=\begin{cases} x^2-b & \text{si} \quad x\le 0 \\ ax+b & \text{si} \quad 0<x\le 2 \\ x^2+b & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

Solucions (1/2)

1. $\lim_{x\to\infty} 5x^3+7x \Rightarrow \lim_{x\to\infty} 5x^3+\cancel{7x} = \lim_{x\to\infty} 5x^3 = \lim_{x\to\infty} 5\cdot\infty = \infty$

2. $\lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{x^2} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{\infty} = 0$

3. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-5}{-x^2-4} \Rightarrow \ldots\frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{x^3-5}{-x^2-4} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{-1} = -\infty$

4. $\lim_{x\to\infty} \frac{4x^3-2}{\sqrt{x}-3} \Rightarrow \ldots\frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{4x^3-2}{\sqrt{x}-3} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^3 \text{ grado } 3}{\sqrt{x} \text{ grado } 1/2} = \infty$

5. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2x}{4x^2-4} \Rightarrow \ldots\frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2x}{4x^2-4} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{4x^2} = \frac{1}{4}$

6. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x+3}{x-2}} \Rightarrow \ldots\frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x+3}{x-2}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x}{x}} = 1$

7. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^5}+2x-6}{x^3-4x+2} \Rightarrow \ldots\frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^5}+2x-6}{x^3-4x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^5} \text{ grado } 5/2}{x^3 \text{ grado } 3} = 0$

8. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+3x}-x \Rightarrow \ldots\ \infty-\infty$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+3x}-x = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+3x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+3x}+x\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+3x}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{x+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$$

9. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+2}-\sqrt{x-2} \Rightarrow \ldots\ \infty-\infty$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+2}-\sqrt{x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}\right)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x+2}\right)^2-\left(\sqrt{x-2}\right)^2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+2-x+2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}} = \frac{4}{\infty} = 0$$

10. $$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^7-x^2+1}{x^7}}{\frac{2x^7+x^3+300}{x^7}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{1}{x^5}+\frac{1}{x^7}}{2+\frac{1}{x^4}+\frac{300}{x^7}} = \frac{1+0+0}{2+0+0} = \frac{1}{2}$$

11. $\lim_{x\to2} \frac{5x}{x-3} \Rightarrow \lim_{x\to2} \frac{5x}{x-3} = \frac{10}{-1} = -10$

12. $\lim_{x\to1} \frac{x^2-1}{x-1} \Rightarrow \lim_{x\to1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to1} x+1 = 2$

13. $\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \Rightarrow \lim_{x\to1} \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)}{(x-1)}\cdot\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)} = \lim_{x\to1} \frac{(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)} = \lim_{x\to1} \frac{1}{\left(\sqrt{x}+1\right)} = \frac{1}{2}$

Solucions (2/2)

14 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+1}{x^2+1}$ **R:** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+1}{x^2+1}=\dfrac{1^3+1}{1^2+1}=\dfrac{2}{2}=1$

15 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^4-16}{x^3-8}=\dfrac{-16}{-8}=2$

16 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^4-16}{x^3-8}$

Método factorización:

$$x^n-y^m=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-1}y+x^{n-2}y^2+x^{n-3}y^3+\cdots+y^{n-1}x+y^{n-1})$$

$$\lim_{x\to2}\frac{x^4-16}{x^3-8}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x^3+2x^2+4x+8)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=$$

$$\lim_{x\to2}\frac{(x^3+2x^2+4x+8)}{(x^2+2x+4)}=\frac{(2^3+2(2^2)+4(2)+8)}{(x^2+2(2)+4)}=\frac{32}{12}=\frac{8}{3}$$

Método L´Hôpital:

$$\frac{\frac{d}{dx}(x^4-16)}{\frac{d}{dx}(x^3-8)}=\frac{4x^3}{3x^2}\qquad \lim_{x\to2}\frac{x^4-16}{x^3-8}=\lim_{x\to2}\frac{4x^3}{3x^2}=\frac{4(8)}{3(4)}=\frac{8}{3}$$

17

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{2x-1}-1)(\sqrt{2x-1}+1)}{(x-1)(\sqrt{2x-1}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{2\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{2x-1}+1)}=\frac{2}{\sqrt{1}+1}=1$$

18 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{x^2-2x+3}\right)$ **$=\infty-\infty$**

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{x^2-2x+3}\right)\left(\frac{\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-2x+3}}{\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-2x+3}}\right)=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+3-x^2+2x-3}{\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-2x+3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{x\sqrt{\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}+x\sqrt{\left(1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}+\sqrt{\left(1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}}=\frac{4}{2}=2$$

19

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)(x+2)}{(x+3)(x+4)}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)(x+2)}{(x+3)(x+4)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+2}{x^2+7x+12}$$

20 $\lim\limits_{x\to81}\dfrac{x-81}{\sqrt{x}-9}$

Método 1: como $x-81=(\sqrt{x}-9)(\sqrt{x}+9)$

$$\lim_{x\to81}\frac{x-81}{\sqrt{x}-9}=\lim_{x\to81}\frac{(\sqrt{x}-9)(\sqrt{x}+9)}{\sqrt{x}-9}=\lim_{x\to81}(\sqrt{x}+9)=(\sqrt{81}+9)=9+9=18$$

Método 2: L'Hôpital $\dfrac{\frac{d}{dx}(x-81)}{\frac{d}{dx}(\sqrt{x}-9)}=\dfrac{1}{1/2x^{-\frac{1}{2}}}=2x^{\frac{1}{2}}$

$$\lim_{x\to81}\frac{x-81}{\sqrt{x}-9}=\lim_{x\to81}2\sqrt{x}=2\sqrt{81}=2(9)=18$$

21 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x+1)^{100}}{(2x+50)^{100}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(\frac{x+1}{x}\right)^{100}}{\left(\frac{2x+50}{x}\right)^{100}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{100}}{\left(2+\frac{50}{x}\right)^{100}}=\dfrac{1^{100}}{2^{100}}$

22 $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\cos x}{1+sen\ x}=\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\cos\pi/2}{1+sen\ \pi/2}=\dfrac{0}{2}=0$

23 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x+2)(x-2)}{(x-2)}=\lim\limits_{x\to2}(x+2)=4$

24

$$\lim_{x\to1}\frac{1-x^2}{2-\sqrt{x^2+3}}=\lim_{x\to1}\frac{(1-x^2)(2+\sqrt{x^2+3})}{(2-\sqrt{x^2+3})(2+\sqrt{x^2+3})}=\lim_{x\to1}(2+\sqrt{x^2+3})=4$$

25

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-x^2-4x+4}{(x-1)^3}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2-4)}{(x-1)^3}=\lim_{x\to1}\frac{(x^2-4)}{(x-1)^2}=-\infty$$

26 $\infty - \infty$

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{x+2}{x-1}-\frac{x-3}{x^2-3x+2}\right)=\lim_{x\to1}\frac{x^2-x-1}{(x-1)(x-2)}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2-x-1}{(x-1)(x-2)}=-\infty\\[2mm] \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2-x-1}{(x-1)(x-2)}=+\infty\end{cases}\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ no existe el límite

27

$$f(x)=\begin{cases}x+1 & \text{si} \quad x\le0\\ x^2+1 & \text{si}\quad 0<x\le1\\ 2x+1 & \text{si}\quad x>1\end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to0}f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^-}(x+1)=1\\ \lim\limits_{x\to0^+}(x^2+1)=1\end{cases}\Rightarrow \text{es continua en } x=0.$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to1}f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to1^-}(x^2+1)=2\\ \lim\limits_{x\to1^+}(2x+1)=3\end{cases}\Rightarrow \text{discontinuidad de salto}$$

28

$$\lim_{x\to0}f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^-}(x^2-b)=-b=f(0)\\ \lim\limits_{x\to0^+}(ax+b)=b\end{cases}\qquad -b=b\Rightarrow b=0.$$

$$\lim_{x\to2}f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to2^-}(ax+b)=2a+b=f(2)\\ \lim\limits_{x\to2^+}(x^2+b)=4+b\end{cases}\qquad 2a+b=4+b\ \Rightarrow a=2$$

Ejercicios solucionados

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x-1}{\sqrt[3]{5x^3+4x-2}}=\frac{\infty}{\infty}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{7x}{x}-\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{\frac{5x^3}{x^3}+\frac{4x}{x^3}-\frac{2}{x^3}}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7-\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{5+\frac{4}{x^2}-\frac{2}{x^3}}}=\frac{7}{\sqrt[3]{5}}$
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^4+x^2+1}}{x^2+1}=\frac{\infty}{\infty}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^4+x^2+1}}{x^2+1}=\frac{\sqrt{4}}{1}=2$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x^2+1)^2-3x^2+3}{x^3-5}=\frac{\infty}{\infty}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x^2+1)^2-3x^2+3}{x^3-5}=\infty$
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\log(x^8-5)}{x^2}=\frac{\infty}{\infty}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\log(x^8-5)}{x^2}=0$
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{18x^2+1}\ \frac{1}{\sqrt{32x^2-3}}\right)$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{18x^2+1}\ \frac{1}{\sqrt{32x^2-3}}\right)=\infty\cdot 0$
6. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\frac{18x^2+1}{32x^2-3}}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\frac{18x^2+1}{32x^2-3}}=\sqrt{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{18x^2+1}{32x^2-3}}=\sqrt{\frac{18}{32}}=\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{3}{4}$
7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^2-1}{x}=\frac{0}{0}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(x+2)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(x+2)=2$
8. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}=\frac{0}{0}$	$\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x+3)(x-3)}{(x-2)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x+3)}{(x-2)}=6$
9. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\frac{0}{0}$	$\lim\limits_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}=$ $=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{(\sqrt{x+1}+2)}=\frac{1}{4}$
10. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+x}\right)=\infty-\infty$	$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+x}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+x}\right)}{\left(\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+x}\right)}=$ $=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+3x-x^2-x}{\left(\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+x}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x}{\left(\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+x}\right)}=\frac{\infty}{\infty}$ $=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\frac{2x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=\frac{2}{2}=1$
11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-1}-\frac{x^2+1}{x-2}\right)$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-1}-\frac{x^2+1}{x-2}\right)=\infty-\infty$ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-2x^2-x^3-x+x^2+1}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x^2-x-+1}{x^2-3x+2}=-1$

Ejercicios con soluciones

1. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^3+2x^2-3x}$ b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-3x+1}{x^2+2}$ c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-4x^2+5x-2}{x^3-x^2-x+1}$ e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x^4}{x^6-x^2}$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}}{x^2+x}$

g) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}$ h) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-5x^3+9x^2-7x+2}{x^4-2x^3+2x^2-1}$

i) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{2-\sqrt{8-x}}$ j) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x+2}-2}$

2. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{1}{x^3-1}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{2+2x-x^2}{x^2-2x}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{1}{x^2-4}\right)^{\frac{1}{x+2}}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3-x}{2+x}\right)^x$ e) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{x}}$ f) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2+x+1}{2+x}\right)^{\frac{1}{x-1}}$

g) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x+x^2)^{\frac{1}{x}}$ h) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x+5)(5x+2)}{-(x-3)^2}$ i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2-\dfrac{x^4+1}{x^2-1}\right)$

j) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{\sqrt{x^2+4}-2}$ k) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+2}-\sqrt{x^2-x}\right)$ l) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}\right)^{\frac{2x+3}{x-2}}$

m) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-x+1}{x^2+2}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$

Soluciones

1) a) 3/4 b) 5/3 c) 4 d) –1/2 e) –1 f) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ g) 4 h) 0 i) –2/3 j) 2

2) a) .+∞ b) 3/2 c) +∞ d) 1 e) e^6 f) e g) . e h) –15 i) –1 j) 1 k) –1 l) 1 m) e^{-1}

Ejercicios de límites por L'Hôpital:

1º) $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^2+x}}$ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^2+x}\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{2x+1}$ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{2}=+\infty$

2º) $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}}$ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}x^{-½}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{x}}=0$

3º) $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{sen(x)}\right)}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{sen(x)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen(x)-x}{x\cdot sen(x)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(x)-1}{sen(x)+x\cdot\cos(x)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-sen(x)}{2\cdot\cos(x)-x\cdot sen(x)}\right)=0$$

Límites con exponencial.

Indeterminación del tipo 1^{∞} con el número e.

Método 1:

- Se debe parecer a: $\lim\limits_{x\to a}\left(1+\dfrac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e$
- Si la base no empieza con 1 se le suma y resta 1. Si el segundo término de la base no tiene 1 como numerador se pasa al denominador su inverso. Si no coincide con el exponente se multiplica por su inverso.

Ejemplo:

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}}=1^{\infty} \Rightarrow \text{Sumamos y restamos 1} =\lim_{x\to1}\left(1+\frac{2x+1}{x+2}-1\right)^{\frac{1}{x-1}} \text{ común denominador } =\lim_{x\to1}\left(1+\frac{x-1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}}$$

$$\text{inverso}=\lim_{x\to1}\left(1+\frac{1}{\frac{x+2}{x-1}}\right)^{\frac{1}{x-1}} \text{Elevamos al denominador } = \lim_{x\to1}\left(1+\frac{1}{\frac{x+2}{x-1}}\right)^{\frac{x+2}{x-1}\cdot\frac{x-1}{x+2}\cdot\frac{1}{x-1}} = e^{\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{x+2}}=e^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{e}$$

Método 2:

- Cambiar por: $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)^{h(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}h(x)\left(\frac{f(x)}{g(x)}-1\right)}$

Ejemplo:

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}}=1^{\infty} \Rightarrow e^{\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}\right)\left(\frac{2x+1}{x+2}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{x+2}\right)}=e^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{e}$$

Ejercicios de límites exponenciales:

1 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2n^2}{3n+1}\right)^{\frac{3n^2+2}{5n-3}}$ Sol: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2}{3x+1}\right)^{\frac{3x^2+2}{5x-3}}=\infty^{\infty}=\infty$

2 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2n^2}{3n+1}\right)^{\frac{-3n^2+2}{5n-3}}$ Sol: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2}{3x+1}\right)^{\frac{-3x^2+2}{5x-3}}=\infty^{-\infty}=\dfrac{1}{\infty^{\infty}}=\dfrac{1}{\infty}=0$

3 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2n^2}{3n+1}\right)^{\frac{-3n^2+2}{5n^2-3}}$ Sol: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2}{3x+1}\right)^{\frac{-3x^2+2}{5x^2-3}}=\infty^{-\frac{3}{5}}=\dfrac{1}{\sqrt[5]{\infty^3}}=\dfrac{1}{\infty}=0$

4 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2n^2}{3n^3+1}\right)^{\frac{3n^2+2}{5n-3}}$ Sol: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2}{3x^3+1}\right)^{\frac{3x^2+2}{5x-3}}=0^{\infty}=0$

5 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2n^2}{3n^3+1}\right)^{\frac{-3n^2+2}{5n-3}}$ Sol: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2}{3x^3+1}\right)^{\frac{-3x^2+2}{5x-3}}=0^{-\infty}=\dfrac{1}{0^{\infty}}=\dfrac{1}{0}=\infty$

6 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2n^2}{3n^2+1}\right)^{\frac{-3n+2}{5n^2-3}}$ Sol: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2}{3x^2+1}\right)^{\frac{-3x+2}{5x^2-3}}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{0}=1$

7 $\lim\limits_{x\to0}\,[1+3x]^{2/x}$ Sol: $\lim\limits_{x\to0}[1+3x]^{2/x}\Rightarrow 1^{\infty}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2}{x}[(1+3x)-1]}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2\cdot3x}{x}}=e^{6}$

Continuidad:

En un punto:

Para que sea continua en un punto debe existir la función en ese punto f(a) y sus límites laterales, que deben ser iguales.

En un intervalo:

Cuando es continua en todos los puntos del intervalo. Según el tipo de funciones:

- *Polinómicas*: Son continuas en todos los intervalos
- *Racionales*: NO son continuas donde se anula el denominador.
- *Radicales par*: NO son continuas si el radicando es negativo
- *Logarítmicas*: NO son continuas si el radicando es negativo o cero.
- *Trigonométricas*: NO es continua la tangente de múltiplos de 90º
- *Por trozos*: Además de ser continua cada una de ellas, limites laterales iguales en el punto de cambio.

Tipos: *Evitable*: Límites laterales existen y son iguales pero no existe la función en eses punto.
De salto finito: Los límites laterales no coinciden.
De salto infinito: uno o los dos límites laterales son infinitos.

Teorema de Bolzano: Si una función es continua en un intervalo y cambia de signo, se que existe un punto de corte en ese intervalo.

Teorema de Weirestrass: toda función continua en un intervalo [a,b] alcanza su máximo y su mínimo absolutos en dicho intervalo.

Continuïtat de funcions definides a trossos

1 La funció f(x) definida de la següent manera: $f(x) = \begin{cases} 2x+2 & si \quad x \leq 0 \\ x^2-3x+2 & si \quad x > 0 \end{cases}$

a) Dibuixeu la gràfica de la funció.

b) Determina els punts de tall de la funció amb els eixos. (-1,0)(0,2)(2,0)(1,0)

c) Estudieu la continuïtat de la funció. *$f(x)^-= f(x)^+=2$ → Continua*

2 Estudi de la continuïtat de $f(x) = \begin{cases} x^3-3x & si \ x < 2 \\ 6-x^2 & si \ x \geq 2 \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to 2-} f(x) = \lim\limits_{x\to 22} f(x) = 2$

3. Determina el valor de ***a*** per perquè la funció sigui contínua. $f(x) = \begin{cases} x^2+ax+1 & x \leq 2 \\ 3x+a & x > 2 \end{cases}$

Sol:

$\lim\limits_{x\to 2-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2-} x^2+ax+1 = 2^2+a\cdot 2+1 = 4+2a+1$ $\lim\limits_{x\to 2+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2+} 3x+a = 3(2)+a$

$f(2) = 2^2+a\cdot 2+1 = 4+2a+1$ → $4+2a+1 = 3(2)+a4+2a+1 = 3(2)+a \Rightarrow 4+2a+1 = 6+a \Rightarrow 4+1-6 = a-2a \Rightarrow -1 = -a \Rightarrow 1 = a$

4. Determina els valors d'a i b per què és contínua la funció $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x < -2 \\ ax^2+bx & -2 \leq x \leq 4 \\ x-4 & x > 4 \end{cases}$

Sol:

$x=-2$: $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} 2x+1 = [2x+1]_{x=-2} = 2(-2)+1 = -3$

$\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} ax^2+bx = [ax^2+bx]_{x=-2} = a(-2)^2+b(-2) = 4a-2b$

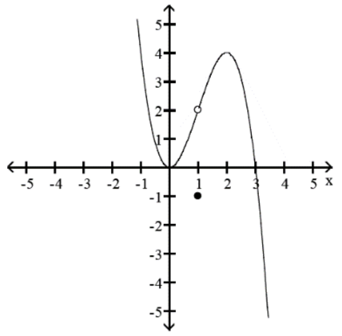
$x=4$: $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^-} ax^2+bx = [ax^2+bx]_{x=4} = a\cdot 4^2+b\cdot 4 = 16a+4b$

$\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} x-4 = [x-4]_{x=4} = 4-4 = 0$ $f(4) = a\cdot 4^2+b\cdot 4 = 16a+4b$

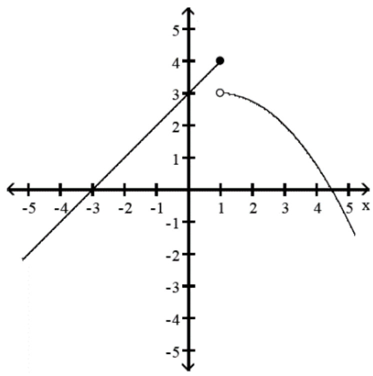
$$\begin{cases} 4a-2b = -3 \\ 16a+4b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boldsymbol{a = \frac{-1}{4}}, \ \boldsymbol{b = 1}$$

Tomates. *Determina los siguientes límites:*

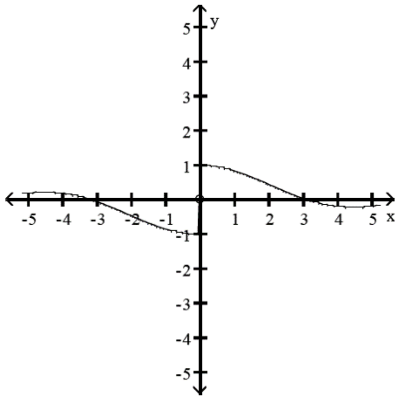
g) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, $f(1)$



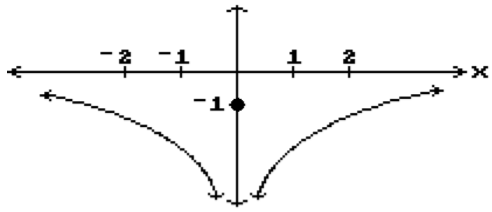
h) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, $f(1)$



i) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$



j) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $f(0)$

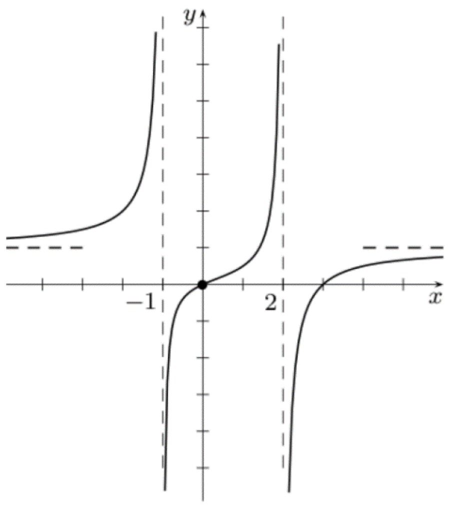


Soluciones: g) 2, 2, 2, -1 h) 4, 3, no def. , 4 i) -1, 1, no def. j) $-\infty$, $-\infty$, -1

---

a) $f(0)$ b) $f(2)$ c) $f(3)$ d) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

e) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ f) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ g) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$



Sol. a) 0 b) No def c) 0 d) No def e) 0 f) $-\infty$ g) 1

---

a) $f(-3/2)$ b) $f(2)$ c) $f(3/2)$ d) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

e) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ f) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ g) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

$$f(t)=\begin{cases} x^2 & x<-2 \\ \dfrac{x+6}{x^2-x} & -1<x<2 \\ 3x-2 & x\geq 2 \end{cases}$$

a) No def. b) 4 c) 10 d) No def. e) 5/2 f) 4 g) No def