

Polinomis 3 - 4 ESO

Valor numèric: és el resultat de substituir les lletres o variables per nombres.

Exemple

- Calcula el valor numèric per a $x = 1$ del polinomi: $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 2$

$$P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 2 \xrightarrow{x=1} P(1) = 2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 2 = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 - 2 = \boxed{-3}$$

- Calcula el valor numèric del polinomi: $P(x, y) = 2x^2y - 8xy - 9$.

a) Per a $x = -1$ i $y = 2$.

$$P(x, y) = 2x^2y - 8xy - 9 \xrightarrow{x=-1, y=2} P(-1, 2) = 2 \cdot (-1)^2 \cdot 2 - 8 \cdot (-1) \cdot 2 - 9 = \\ = 2 \cdot 1 \cdot 2 + 8 \cdot 1 \cdot 2 - 9 = 11$$

b) Per a $x = 0$ i $y = 1$.

$$P(x, y) = 2x^2y - 8xy - 9 \xrightarrow{x=0, y=1} P(0, 1) = 2 \cdot 0^2 \cdot 1 - 8 \cdot 0 \cdot 1 - 9 = \boxed{-9}$$

Operacions amb polinomis

- **Sumar o restar:** agrupem els monomis del mateix grau i en sumem (o en restem) els coeficients.
- **Multipliar:** dos polinomis, multipliquem cada monomi d'un dels polinomis per tots els monomis de l'altre

Exercicis:

a) Calcula: a) $(x^3 + x + 1) \cdot 2x$ b) $(2x^3 + x + 1) \cdot (2x^2 - x)$

Sol:	$\begin{array}{r} \text{a)} \quad x^3 + x + 1 \\ \quad \times 2x \\ \hline 2x^4 + 2x^2 + 2x \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{b)} \quad \quad \quad 2x^3 + x + 1 \\ \quad \quad \quad \times 2x^2 - x \\ \hline \quad \quad - 2x^4 \quad \quad - x^2 - x \\ 4x^5 \quad \quad + 2x^3 + 2x^2 \\ \hline 4x^5 - 2x^4 + 2x^3 + x^2 - x \end{array}$
------	--	--

b) Suma, resta i multiplica: $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x + 1$ i $Q(x) = -x^3 + x^2$

Sol: *Suma* $x^3 - 2x^2 + 4x + 1$ *Resta* $3x^3 - 4x^2 + 4x + 1$ *Multipliació:* $-2x^6 + 5x^5 - 7x^4 + 3x^3 + x^2$

Divisió de polinomis

Exercici: Divideix $P(x) = 4x^3 + 2x^2 - 4x + 3$ entre $Q(x) = 2x^2 - x + 1$

Solució:

$$\begin{array}{r} 4x^3 + 2x^2 - 4x + 3 \quad \overline{) 2x^2 - x + 1} \\ -4x^3 + 2x^2 - 2x \quad \underline{} \\ 4x^2 - 6x + 3 \\ -4x^2 + 6x - 2 \quad \underline{} \\ -4x + 1 \end{array}$$

2x + 2 Quocient
← Residu

Per comprovar: $4x^3 + 2x^2 - 4x + 3 = (2x^2 - x + 1) \cdot (2x + 2) + (-4x + 1)$

Exercici: Divideix $(x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2) : (x^2 - x)$

Sol: cociente: $x^2 - 3x + 1$, resto: $x + 2$

Factor comú: Extreure factor comú consisteix a transformar una expressió de suma o resta en producte.

Exercicis:

- 1) $x^3 - x^2 + 2x = x \cdot x^2 - x \cdot x + 2 \cdot x = x \cdot (x^2 - x + 2)$
- 2) $6x^3 + 2x^2 = 2x^2 \cdot (3x + 1)$
- 3) $24x^3 + 72x^2 - 6x \rightarrow \text{mcd: } 6 \rightarrow 6x \cdot (4x^2 + 12x - 1)$
- 4) $-18y^2x^3 - 12yx^2 + 24yx \rightarrow \text{mcd: } 6 \rightarrow 6yx \cdot (-3yx^2 - 2x + 4)$

Dados $P(x) = 4x^5 - 8x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 1$ y $Q(x) = 4x^3 - 4x^2 + 2x$, se pide:

- a) Extraer el máximo factor común de $Q(x)$
- b) $P(x) - 2x \cdot Q(x)$ (Sol: $4x^5 - 16x^4 + 10x^3 - 2x^2 + 1$)
- c) $Q(x) \cdot Q(x)$ (Sol: $16x^6 - 32x^5 + 32x^4 - 16x^3 + 4x^2$)
- d) $P(x) : Q(x)$ (Sol: $C(x) = x^2 - x - 1; R(x) = 2x + 1$)

Igualtats notables

- Quadrat d'una suma: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- Quadrat d'una diferència: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- Suma per diferència: $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

Exemples:

a) $(5x + 3)^2 = (5x)^2 + 2 \cdot 5x \cdot 3 + 3^2 = 25x^2 + 30x + 9$
 $a = 5x \quad b = 3$

b) $(2x - 3y)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$
 $a = 2x \quad b = 3y$

Simplifica aquests productes:

a) $(2x + y) \cdot (2x - y) = (2x)^2 - y^2 = 4x^2 - y^2$
 $a = 2x \quad b = y$

b) $(3x^3 - 5x) \cdot (3x^3 + 5x) = (3x^3)^2 - (5x)^2 = 9x^6 - 25x^2$
 $a = 3x^3 \quad b = 5x$

Desarrollar, aplicando las igualdades notables correspondientes:

- | | | | |
|---------------------|---------------------------------------|---|---|
| a) $(x+2)^2 =$ | h) $(x^3-2)^2 =$ | n) $\left(2a - \frac{3}{2}\right)^2 =$ | r) $\left(2 + \frac{a}{3}\right)\left(-\frac{a}{3} + 2\right) =$ |
| b) $(x-3)^2 =$ | i) $(x^2-1)(x^2+1) =$ | o) $\left(1 + \frac{x}{2}\right)\left(1 - \frac{x}{2}\right) =$ | s) $\left(\frac{3x}{2} - \frac{1}{x}\right)^2 =$ |
| c) $(x+2)(x-2) =$ | j) $(2x^2+3x)^2 =$ | p) $\left(2x + \frac{3}{4}\right)^2 =$ | t) $\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3}\right)\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{3}\right) =$ |
| d) $(3x+2)^2 =$ | k) $(2x^2-3)^2 =$ | q) $\left(\frac{3}{2} - \frac{x}{4}\right)^2 =$ | u) $\left(\frac{3}{2}x + \frac{1}{4}\right)^2 =$ |
| e) $(2x-3)^2 =$ | l) $(-x-3)^2 =$ | | |
| f) $(5x+4)(5x-4) =$ | m) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 =$ | | |
| g) $(x^2+5)^2 =$ | | | |

- (Sol: m) $x^2 + x + \frac{1}{4}$; n) $4a^2 - 6a + \frac{9}{4}$; o) $1 - \frac{x^2}{4}$; p) $4x^2 + 3x + \frac{9}{16}$; q) $\frac{9}{4} - \frac{3x}{4} + \frac{x^2}{16}$; r) $4 - \frac{a^2}{9}$ s) $\frac{9}{4}x^2 - 3 + \frac{1}{x^2}$;
 t) $\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{9}$; u) $\frac{9}{4}x^2 + \frac{3x}{4} + \frac{1}{16}$)

Fraccions algebraiques

Simplificar una expressió algebraica és trobar una altra fracció equivalent dividint el numerador i el denominador entre un factor comú a tots dos.

Simplifica aquestes fraccions algebraiques:

a) $\frac{4x^3}{3x} = \frac{4 \cdot \cancel{x} \cdot x^2}{3 \cdot \cancel{x}} = \frac{4x^2}{3}$

b) $\frac{6xy}{3x^2y} = \frac{\cancel{3} \cdot 2 \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{y}}{\cancel{3} \cdot \cancel{x} \cdot x \cdot \cancel{y}} = \frac{2}{x}$

c) $\frac{x^2 - 2x}{2x} = \frac{\cancel{x} \cdot (x - 2)}{2\cancel{x}} = \frac{x - 2}{2}$
Factor comú → x

d) $\frac{4x^2 + 12x + 9}{2x + 3} = \frac{(2x + 3)^2}{2x + 3} = \frac{(2x + 3) \cdot \cancel{(2x + 3)}}{\cancel{2x + 3}} = \frac{2x + 3}{1} = 2x + 3$
Quadrat d'una suma
a = 2x b = 3

e) $\frac{16x^2 - 1}{12x - 3} = \frac{(4x + 1) \cdot \cancel{(4x - 1)}}{3 \cdot \cancel{(4x - 1)}} = \frac{(4x + 1)}{1}$
Suma per diferència
a = 4x b = 1
Factor comú → 3

Equacions de primer grau amb fraccions

a) Resol l'equació $\frac{1}{2}x - 1 = \frac{2}{3} - \frac{7}{6}x$.

$$\frac{1}{2}x - 1 = \frac{2}{3} - \frac{7}{6}x \rightarrow \frac{1}{2}x = \frac{2}{3} - \frac{7}{6}x + 1$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}x + \frac{7}{6}x = \frac{2}{3} + 1 \rightarrow \frac{10}{6}x = \frac{5}{3} \rightarrow$$

$$\rightarrow 10 \cdot x = 10 \rightarrow x = \frac{10}{10} = 1$$

b) Resol $\frac{3x - (x - 2)}{4} = \frac{2x + 1}{3}$

m.c.m. = 12
 $12 \cdot \frac{3x - (x - 2)}{4} = 12 \cdot \frac{2x + 1}{3}$

$3(3x - (x - 2)) = 4(2x + 1)$

$3(3x - x + 2) = 8x + 4$

$9x - 3x + 6 = 8x + 4$

$9x - 3x - 8x = 4 - 6$

$-2x = -2$

$x = \frac{-2}{-2} = 1$

b)

OPERACIONES CON POLINOMIOS

1º Opera:

- | | | |
|---|--------------------------------------|--|
| a) $4x^2 - 3x^2 + x^2$ | b) $7x - 3x + 2x$ | c) $7x^3 - 3x^3 + 4x^3$ |
| d) $7x - 4x + 2x$ | e) $9x^5 - 3x^5 - 2x^5$ | f) $2x - 5x + 9x$ |
| g) $4x^3 - 5x^3 - 2x^3$ | h) $x^4 + 7x^4 - 6x^4$ | i) $2x^2 + x^4 - 5x^4$ |
| j) $3x^3 - 2x^3 - x^3$ | k) $-2x^2 + 5x^2 - 4x^2$ | l) $-x^2 - 2x^2 + 5x^2$ |
| m) $x^4 - \frac{2x^4}{3} + \frac{x^4}{2}$ | n) $2x - \frac{2x}{3} + \frac{x}{2}$ | ñ) $\frac{2x^3}{3} + x^3 - \frac{3x^3}{2}$ |

Sol: a) $2x^2$; b) $6x$; c) $8x^3$; d) $5x$; e) $4x^5$; f) $6x$; g) $-3x^3$; h) $2x^4$; i) $-2x^4$; j) 0 ; $-x^2$; m) $5x^4/6$; n) $11x/6$; ñ) $x^3/6$.

2º Reduce las siguientes expresiones:

- | | |
|---|---|
| a) $2x^2 - 4 + 3x - 3x^2$ | b) $3x - 4x^2 - 4 - 5x + 3x^2$ |
| c) $6x - 3x^3 - 4 - 4x^3 + 4x$ | d) $7 - 3(x^2 - 1) + 2(x - 3) - 4x + x^2$ |
| e) $2x^3 - 3x^3 - 2(x - x^3) + 4x - 2x^3$ | f) $3x^2 - 3 + 4x - 5 + 3x^2$ |

Sol: a) $-x^2 + 3x - 4$; b) $-x^2 - 2x - 4$; c) $-7x^3 + 10x - 4$; d) $-2x^2 - 2x + 4$; e) $-x^3 + 2x$; f) $6x^2 + 4x - 8$.

3º Halla el polinomio que sumado a $P(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x$ da como resultado:

- | | | | |
|--------------------------|----------------------|---------------|---------------------------|
| a) $2x^3 - 3x^2 - x + 2$ | b) $3x^3 - 3x^2 + 1$ | c) $4x^3 + 1$ | d) $2x^3 - 3x^2 + 5x - 2$ |
|--------------------------|----------------------|---------------|---------------------------|

Sol: a) $-2x^3 - 3x + 2$; b) $-2x^3 - 3x + 2$; c) $-x^3 - 2x + 1$; d) $3x^2 - 2x + 1$; e) $-2x^3 + 3x - 2$.

4º Efectúa y reduce:

- | | | |
|-----------------------------------|--------------------------------|-----------------------------|
| a) $(x^2 - 3x + 1) \cdot (x + 2)$ | b) $(2x^3 - 3x^2 + 2)(2x - 1)$ | c) $(x^2 + x - 2)(x^2 + 1)$ |
|-----------------------------------|--------------------------------|-----------------------------|

Sol: a) $x^3 - x^2 - 5x + 2$; b) $4x^4 - 8x^3 + 3x^2 + 4x - 2$; c) $x^4 + x^3 - x^2 + x - 2$.

5º Efectúa y reduce:

- | | | |
|-----------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| a) $2x^2 \cdot 3x - 2x \cdot x^2$ | b) $3x - 2(7x - 5)$ | c) $x^2(3x - 2) + 3x^3$ |
| d) $7x^2 - 3x(-2x) + 5x^2$ | e) $4x(x - 2) - 3x(x - 1)$ | f) $6x(-3x^2) - 5x^2(-2x)$ |

Sol: a) $4x^3$; b) $-11x + 10$; c) $6x^3 - 2x^2$; d) $18x^2$; e) $x^2 - 5x$; f) $-8x^3$.

6º Opera y reduce las siguientes expresiones:

- | | |
|---|------------------------------------|
| a) $2x^2 - 3x(2x^2 - 3x) + 2(x^2 - 2x)$ | b) $3x(3 - x) + 4(x^2 - 3x)$ |
| c) $x^2 - 3x(-5x) - x(x - 3x)$ | d) $(x^2 - 3x + 2) \cdot (3x - 2)$ |
| e) $(x - 3)(x^2 - 3x + 1)$ | f) $(x - 3) \cdot (-2x + 3)$ |

Sol: a) $-6x^3 + 13x^2 - 4x$; b) $x^2 - 3x$; c) $18x^2$; d) $3x^3 - 11x^2 + 12x - 4$; e) $x^3 - 6x^2 + 10x - 3$; f) $-2x^2 + 9x - 9$.

7º Sean los polinomios:

$$P(x) = 4x^3 - 3x^2 + 1$$

$$Q(x) = 3x^2 - 3x + 2$$

Calcular:

- | | | | |
|------------------|----------------------------------|------------------|----------------------|
| a) $P(x) - Q(x)$ | b) $3 \cdot P(x) + 2 \cdot Q(x)$ | c) $P(x) + Q(x)$ | d) $P(x) \cdot Q(x)$ |
|------------------|----------------------------------|------------------|----------------------|

Sol: a) $P - Q = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 1$; b) $3P + 2Q = 12x^3 - 3x^2 - 6x + 7$;

c) $P + Q = 4x^3 - 3x + 3$; d) $P \cdot Q = 12x^5 - 21x^4 + 17x^3 - 3x^2 - 3x + 2$.

8º Sean los polinomios:

$$P(x) = x^3 - x^2 - 3x + 1 \quad Q(x) = 2x^2 - 2x + 1 \quad R(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x - 1$$

Calcular:

- a) $P(x) + Q(x)$ b) $P(x) - Q(x)$ c) $P(x) + Q(x) + R(x)$
 d) $P(x) - Q(x) + R(x)$ e) $2 \cdot P(x) - 3 \cdot Q(x)$ f) $P(x) \cdot Q(x) - R(x)$
 g) $Q(x) \cdot (2 \cdot P(x) - R(x))$ h) $P(x) + Q(x) - R(x)$ i) $Q(x) \cdot P(x) \cdot R(x)$

Sol: a) $x^3 + x^2 - 5x + 2$; b) $x^3 - 3x^2 - x$; c) $3x^3 - 5x^2 + x + 1$; d) $3x^3 - 9x^2 + 5x - 1$;
 e) $2x^3 - 8x^2 - 1$; f) $2x^5 - 4x^4 - 5x^3 + 13x^2 - 11x + 2$; g) $8x^4 - 32x^3 + 34x^2 - 18x + 3$;
 h) $-x^3 + 7x^2 - 11x + 3$; i) $4x^8 - 20x^7 + 30x^6 + 6x^5 - 66x^4 + 77x^3 - 43x^2 + 11x - 1$.

9º Haz las divisiones siguientes, calculando su cociente y su resto:

- a) $(x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2) : (x^2 - x)$ b) $(x^5 - 4x^3 + 4x^2 + 4x - 3) : (x^2 - 2)$
 c) $(x^5 + 3x^4 - 2x^2 + 5x + 2) : (x^3 - x + 1)$ d) $(x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 3x + 2) : (x^2 - 1)$
 e) $(x^6 - 4x^4 + x^3 + 3x^2 + x) : (x^3 - x)$ f) $(x^4 + 2x^2 - 5) : (x^2 + 3)$

Sol: a) cociente: $x^2 - 3x + 1$, resto: $x + 2$; b) cociente: $x^3 - 2x + 4$, resto: 5;
 c) cociente: $x^2 + 3x + 1$, resto: $3x + 1$; d) cociente: $x^2 + 3x - 2$, resto: 0;
 e) cociente: $x^3 - 3x + 1$, resto: $2x$; f) cociente: $x^2 - 1$, resto: -2 .

10º En una división de polinomios, el divisor es $2x^2 - 3$, el cociente $x + 3$ y el resto $x - 1$. ¿Cuál es el dividendo? **Sol:** $x^3 + 6x^2 - 2x - 10$.

11º Calcula el cociente y el resto en las divisiones siguientes mediante el método de Ruffini

- a) $(x^5 - 2x^4 - 3x^2 + 7x + 1) : (x - 2)$ b) $(x^4 - x^3 - 2x^2 + x - 1) : (x + 1)$
 c) $(2x^3 - 3x^2 + 4x - 3) : (x - 1)$ d) $(x^4 + 3x^3 - x^2 - x + 3) : (x + 3)$
 e) $(-x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 2x + 7) : (x - 3)$ f) $(x^5 + x^4 - 2x^3 + 4x - 3) : (x + 2)$

Sol: a) cociente: $x^4 - 3x + 1$, resto: 3; b) cociente: $x^3 - 2x^2 + 1$, resto: -2 ;
 c) cociente: $2x^2 - x + 3$, resto: 0; d) cociente: $x^3 - x + 2$, resto: -3 ;
 e) cociente: $-x^3 + x^2 - 2$, resto: 1; f) cociente: $x^4 - x^3 + 4$, resto: -11 .

12º Halla el resto de la división utilizando el teorema del resto:

- a) $(x^5 - 2x^3 + x^2 - 1) : (x - 2)$ b) $(x^3 - 3x + 2) : (x - 1)$
 c) $(2x^4 - 3x^2 + x - 1) : (x + 1)$ d) $(-x^4 - 3x^3 - 3) : (x + 2)$
 e) $(x^3 - 2x^2 + x + 3) : (x - 1)$ f) $(2x^4 - 3x^2 - x + 1) : (x - 3)$
 g) $(x^4 - 3x^3 + 2x) : (x - 2)$ h) $(3x^4 - 2x^3 + 3) : (x + 1)$

Sol: a) 19; b) 0; c) -3 ; d) 5; e) 3; f) 133; g) -4 ; h) 8.

13º Halla "a" para que la siguiente división sea exacta:

$$(x^5 - 3x^3 + ax^2 - 4) : (x - 2)$$

Sol: $a = -1$.

14º Halla "a" para que la siguiente división tenga de resto 2:

$$(x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 5x^3 + 4x^2 + ax + 2) : (x - 1)$$

Sol: $a = -1$.