Polinomios

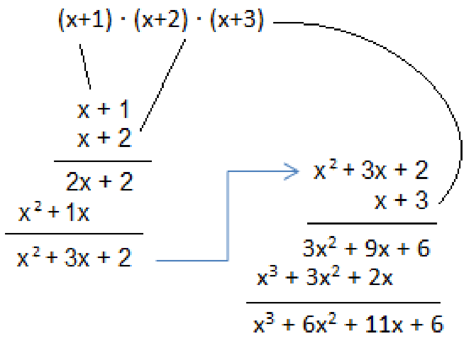
- *Sumar y restar*: se suman/restan los coeficientes (numericos de delante) de los terminos semejantes y si no tiene, se pone un 1. Ejemplos:
  - $2x - 5x + 7x + x = 5x$ $\qquad$ $2x^2y - 3x^2y + 5x^2y = 4x^2y$
- *Multiplicar*: Se multiplican los coeficientes y se suman los exponentes: ejemplo: $2x^2 \cdot 4x^3 = 8x^5$

Forma de mostrar un polinomio:

- Forma polinómica: $P(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ → sumando o restando términos
- Forma factorizada: $P(x) = (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3)$ → multiplicándose por parejas

Para pasar de forma factorizada a polinómica:

Multiplicando los factores: $(x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3)$:



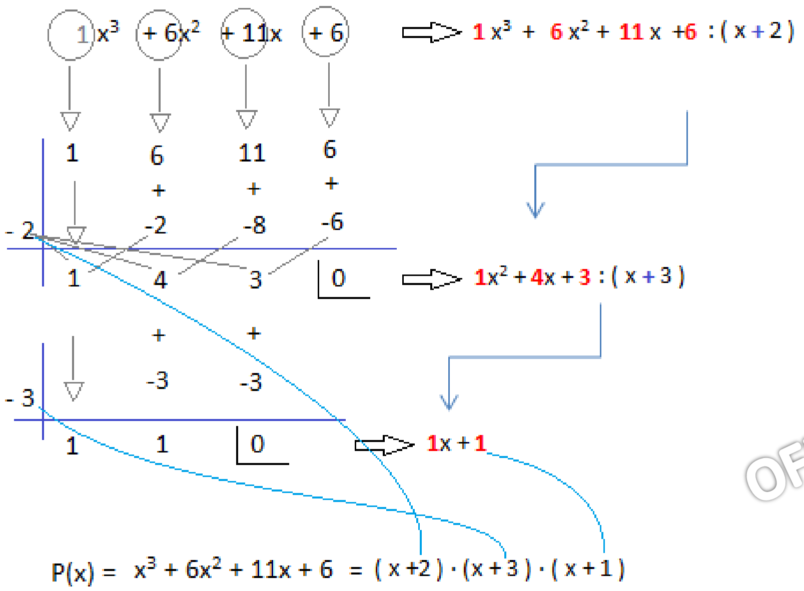
Obtenemos: $\boxed{P(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6}$

Para pasar de forma polinómica a factorizada:

1º: Intentar sacar algún factor común o ver si es el resultado de una expresión notable.

2º: Ir ***dividiendo*** por ***x ± algo*** utilizando la regla de *Ruffini*

Ir probando ese ***algo*** para que la división sea exacta, es decir, el resto sea 0. Para ello sabemos que tiene que ser múltiplo del último número.



Sacar factor común: Es otra manera sencilla de factorizar. Si vemos algo común en cada término, se quita y se pone fuera del apréntesis multiplicando. *Ejemplos*:

- $2x^2 + 5x$ → $2x \cdot \cancel{x} + 5 \cdot \cancel{x}$ → $x \cdot (2x + 5)$
- $3x^2 + 6x$ → $\cancel{3x} \cdot \cancel{x} + 2 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{x}$ → $3x \cdot (x + 2)$
- $4x^4 + 2x^2$ → $\cancel{2} \cdot 2 \cdot \cancel{x^2} \cdot x^2 + \cancel{2} \cdot \cancel{x^2} \cdot 1$ → $2x^2\,(2x^2+1)$

Simplificar fracciones algebraicas:

1º. Sacar factor común si es posible antes.
2º. Factorizar numerador y denominador.
3º. Tachar los factores iguales arriba y abajo:

$$\frac{x^3+6x^2+11x+6}{(x+2)^2} = \frac{\cancel{(x+2)}\cdot(x+3)\cdot(x+1)}{\cancel{(x+2)}\cdot(x+2)}$$

Soluciones (o raíces) de una ecuación de 3er grado y superior:

Para resolver ecuaciones de 3er grado y superiores, pasarlas a forma factorizada. Al igualar esta a cero, cada pareja factorial también puede ser cero por lo que se descompone en varias mini-ecuaciones de primer grado.

$$x^3+6x^2+11x+6 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(x+2)\cdot(x+3)\cdot(x+1) = 0$$

$x+1=0 \rightarrow \boxed{x_1 = -1}$

$x+2=0 \rightarrow \boxed{x_2 = -2}$

$x+3=0 \rightarrow \boxed{x_3 = -3}$

Teorema del resto:

En vez de sustituir la x en el polinomio para ver cuanto vale, lo divides por Ruffini por ese numero y el resto es el resutado. Es útli cuando el polinomio tiene potencias altas.

- Valor del polinomio por el método tradicional:

$P(X) = X^4 - 3X^2 + 2 \rightarrow P(3) = 3^4 + 3\cdot3^2 + 2 = \boxed{56}$ ← Valor del polinomo

- Valor del polinomio por el método del teorema del resto:

$P(X) = X^4 - 3X^2 + 2 = 1x^4 + 0\cdot x^3 - 3\cdot X^2 + 0\cdot x + 2$

	1	0	-3	0	2
		+	+	+	+
3		3	9	18	54
P (3) =	1	3	6	18	$\boxed{56}$

← Valor del polinomo

Repaso de expresiones frecuentes (fórmulas notables):

- $(a\pm b)^2 = a^2 \pm 2\cdot a\cdot b + b^2$ → Desarrollo del cuadrado de un binomio
- $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$ → Suma por diferencia de binomios o por su conjugado

Ejemplos:

- $(x+3)^2 =$ $(a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2) = x^2 + 2\cdot x\cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$
- $(x+3)\cdot(x-3) =$ $(a^2 - b^2) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9$
- $(x^2+2x)^2 =$ $(x^4 + 4x + 4x^2)$

Ejercicios: → soluciones 1←

1. Calcula el valor del polinomio: $P(x) = x^4 - 2x^3 + 3x - 6$ para $x=3$ mediante dos métodos:

a) Sustituyendo el valor en el polinomio b) Por el *teorema del resto* de la división

2. Divide aplicando la regla de Ruffini: $P(x) = x^5 - x^3 - 2x^2 - 3x - 5 : (x-2)$

3. Calcula las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a. $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4 = 0$
b. $2x^3 - x^2 - 4 = 0$
c. $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$
d. $x^4 - x^3 - 16x^2 - 20x = 0$

4. Determina las raíces de las siguientes ecuaciones de 3er grado:

a) $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ b) $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$ c) $x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0$
d) $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$ e) $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$ f) $x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = 0$
g) $x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = 0$ h) $x^3 + 3x^2 - 4 = 0$ i) $x^3 + 4x^2 - x - 4 = 0$

5. Determina las raíces de las siguientes ecuaciones de 4º grado:

a) $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$ b) $x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2 = 0$
c) $x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x - 4 = 0$ d) $x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x + 4 = 0$
e) $x^4 + 9x^3 + 30x^2 + 44x + 24 = 0$ f) $x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 20x - 24 = 0$
g) $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$ h) $x^4 - x^3 - 11x^2 + 5x + 30 = 0$
i) $2x^4 + 3x^3 - x = 0$ j) $3x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 8x + 4 = 0$

6. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $P(x) = x^4 - x^3 - x^2 + x$ b) $P(x) = 3x^3 + 3x^2 - 18x$
c) $P(x) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 38x - 24$ d) $P(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$
e) $P(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 3x^2$ f) $P(x) = 2x^3 - 2x^2 - 12x$
g) $P(x) = 3x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 6x + 3$ h) $P(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$
i) $P(x) = x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 6x + 4$ j) $P(x) = 4x^4 - 6x^3 + 2x^2$

7. Halla el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los polinomios P(x) y Q(x):

a) $P(x) = x^2 + 2x + 1$ y $Q(x) = 3x + 3$ b) $P(x) = x^3 - 2x^2$ y $Q(x) = x^3 - 4x$

8.- Simplifica las fracciones polinómicas:

a) $\frac{x^4 - 10x^2 + 9}{x^2 - 3^2}$ b) $\frac{x^2 - 1}{x^4 - 1}$ c) $\frac{x^4 - 5x^2 - 36}{x^2 - 9}$ d) $\frac{x^2 + 8x + 7}{x^2 + 9x + 14}$ e) $\frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6}$

9. Desarrolla las siguientes expresiones notables:

a) $(x-4)^2$ b) $(x^2-3)^2$ c) $(2-5x)\cdot(2+5x)$

10. Opera las fracciones: a) $\frac{-3x+1}{x+1} - \frac{5x+1}{x^2+x}$ b) $\frac{3}{x^2-1} + \frac{5x}{x+1} - \frac{2x}{x-1}$

→ soluciones 2←

→ Hoja de soluciones 1:

1.- $P(x) = x^4 - 2x^3 + 3x - 6$ → a: $P(2) = 2^4 - 2\cdot 2^3 + 3\cdot 2 - 6 = 81 - 2\cdot 27 + 9 - 6 = 30$

b:

	1	-2	0	3	-6
3		3	3	9	36
	1	1	3	12	30

2.- Divide aplicando la regla de Ruffini: $P(x) = (x^5 - x^3 - 2x^2 - 3x - 5):(x-2)$

	1	0	-1	-2	-3	-5
2		2	4	6	8	10
	1	2	3	4	5	5

→ $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5$ R: 5

3.- Calcula las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a. $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4 = 0$ → R: -2 y 1 → (x+2)(x+2)(x-1)(x-1)
b. $2x^3 - x^2 - 4 = 0$ → R: 2
c. $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$ → R: 2, -3, -1
d. $x^4 - x^3 - 16x^2 - 20x = 0$ → 1º Sacar factor común a la x: → $x \cdot (x^3 - x^2 - 16x - 20) = 0$
2º Hacer el Ruffini de: 1 -1 16 -20 → R: 0, 5, -2, -2

4. Determina las raíces de las siguientes ecuaciones de 3er grado:

a) $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ b) $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$ c) $x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0$
d) $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$ e) $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$ f) $x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = 0$
g) $x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = 0$ h) $x^3 + 3x^2 - 4 = 0$ i) $x^3 + 4x^2 - x - 4 = 0$

Sol: a) x = r1, x = 2; b) x = r1, x = 3; c) x = 1 (doble), x = 3;
d) x = 1 (doble), x = 2; e) x = 1, x = 2 (doble); f) x = –2, x = 2 (doble);
g) x = 2, x = –2 (doble); h) x = –1, x = –2 (doble); i) x = 2, x = –1, x = –4;

5. Determina las raíces de las siguientes ecuaciones de 4º grado:

a) $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$ b) $x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2 = 0$
c) $x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x - 4 = 0$ d) $x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x + 4 = 0$
e) $x^4 + 9x^3 + 30x^2 + 44x + 24 = 0$ f) $x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 20x - 24 = 0$
g) $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$ h) $x^4 - x^3 - 11x^2 + 5x + 30 = 0$
i) $2x^4 + 3x^3 - x = 0$ j) $3x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 8x + 4 = 0$

Sol: a) x = 1 (doble), x = –1 (doble); b) x = –2, x = –1, x = 1 (doble);
c) x = 2 (doble), x = r1; d) x = –1 (doble), x = –2 (doble); e) x = –3, x = –2 (triple);
f) x = –2 (doble), x = 2, x = –3; g) x = r1, x = –3, x = 2; h) x = 3, x = –2, x r 5 ;
i) x = –1 (doble), x = 1/2, x = 0; j) x = 1, x = –1/3, x = r2;

→ Hoja de soluciones 2:

6. Factorice los siguientes polinomios:

a) $P(x)=x^4-x^3-x^2+x$ b) $P(x)=3x^3+3x^2-18x$

c) $P(x)=x^4-2x^3-13x^2+38x-24$ d) $P(x)=x^4-3x^3+3x^2-3x+2$

e) $P(x)=x^5-5x^4+7x^3-3x^2$ f) $P(x)=2x^3-2x^2-12x$

g) $P(x)=3x^4+6x^3+6x^2+6x+3$ h) $P(x)=x^4+x^3-7x^2-x+6$

i) $P(x)=x^4+3x^3+4x^2+6x+4$ j) $P(x)=4x^4-6x^3+2x^2$

Sol: a) $(x-1)^2\cdot(x+1)\cdot x$; b) $(x+3)\cdot(x-2)\cdot 3x$; c) $(x-1)\cdot(x+4)\cdot(x-2)\cdot(x-3)$;
d) $(x^2+1)\cdot(x-2)\cdot(x-1)$; e) $x^2\cdot(x-1)2\cdot(x-3)$; f) $(x+2)\cdot(x-3)\cdot 2x$; g) $3\cdot(x+1)^2\cdot(x^2+1)$;
h) $(x-2)\cdot(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x+3)$; i) $(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x^2+2)$; j) $2x^2\cdot(x-1)\cdot(2x-1)$.

7. Halla el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo en cada caso:

a) $P(x)=x^2+2x+1$ y $Q(x)=3x+3$ b) $P(x)=x^3-2x^2$ y $Q(x)=x^3-4x$

Sol: a) mcm: $3\cdot(x+1)^2$; mcd.:$(x+1)$; b) mcm: $x^2\cdot(x-4)\cdot(x+4)$; mcd:$(x-2)\cdot x$.

8.- Simplificar fracciones polinómicas:

a) $\dfrac{x^4-10x^2+9}{(x^2-3^2)}$

	1	0	-10	0	9
3		3	9	-3	-9
	1	3	-1	-3	0
-1		-1	-2	3	
	1	2	-3	0	
+1		1	3		
	1	3	0		
-3		-3			
	1	0			

$$\frac{(x-3)\cdot(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x+3)}{(x+3)\cdot(x-3)}=(x+1)\cdot(x-1)=x^2-1$$

b) $\dfrac{x^2-1}{x^4-1}=\dfrac{\cancel{(x^2-1)}}{(x^2+1)\cancel{(x^2-1)}}=\dfrac{1}{x^2+1}$

c) $\dfrac{x^4-5x^2-36}{x^2-9}=\dfrac{\cancel{(x+3)}\cancel{(x-3)}(x^2+4)}{\cancel{(x-3)}\cancel{(x-3)}}=\boxed{x^2-4}$ →

	1	0	-5	0	-36
3		3	9	12	36
	1	3	4	12	0
-3		-3	6	-12	
	1	0	4	0	
	⇩ x^2		⇩ + 4		

d) $\dfrac{x^2+8x+7}{x^2+9x+14}=\dfrac{\cancel{(X+7)}\cdot(X+1)}{\cancel{(X+7)}(X+2)}=\dfrac{X+1}{X+2}$

e) $\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}=\dfrac{(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x-2)}{(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x+3)}=\dfrac{(x+1)}{(x+3)}$

9. Desarrolla las siguientes expresiones notables:

a) $(x-4)^2 = (a^2-2\cdot a\cdot b+b^2) = x^2 - 2\cdot x\cdot 4 + 4^2 = x^2-8x+16$

b) $(x^2-3)^2 = (a^2-2\cdot a\cdot b+b^2) = (x^2)^2 - 2\cdot x^2\cdot 3 + 3^3 = x^4-6x^2+9$

c) $(2-5x)\cdot(2+5x) = (a^2-b^2) = 2^2 - (5x)^2 = 4 - 25x^2$

10. Opera las fracciones: a) $\dfrac{-3x+1}{x+1}-\dfrac{5x+1}{x^2+x}=\dfrac{x(-3x+1)-(5x+1)}{x(x+1)}=\dfrac{-3x^2-4x-1}{x(x+1)}$

b) $\dfrac{3}{x^2-1}+\dfrac{5x}{x+1}-\dfrac{2x}{x-1}=\dfrac{3+5x(x-1)-2x(x+1)}{(x+1)\cdot(x-1)}=\dfrac{3x^2-7x+3}{x^2-1}$