Teoría

Leyes de Kepler:

1ª: Ley de las órbitas:

Los planetas giran alrededor del sol formando órbitas elípticas y el Sol en está en un foco.

2ª: Ley de las áreas:

Las áreas barridas son proporcionales a los tiempos empleados.

3ª Ley de los períodos:

Los cuadrados de los periodos son proporcionales a los cubos de los radios: $\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3} = k$

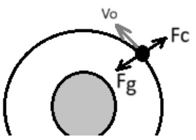
Fórmulas:

$$\vec{F} = G\frac{M \cdot m}{r^2}\vec{u} \xrightarrow{F = g \cdot m} \vec{g} = G\frac{M}{r^2}\vec{u}$$

F = Ep / r ↓   g = V / r ↓

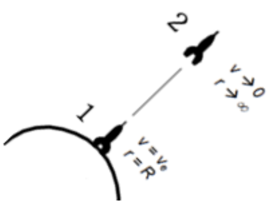
$$E_p = G\frac{M \cdot m}{r} \xrightarrow{E_p = V \cdot m} V = G\frac{M}{r}$$

- *Recordatorio del movimiento circular*: $F_c = m\,a_n$; $a_n = v^2/r$ ó $a_n = \omega^2/r$; $\omega = 2\pi f$ ó $\omega = 2\pi/T$
- ***Fuerza gravitacional*** $\vec{F}_g$ **:** $F = G\frac{Mm}{r^2}$ *Forma vectorial:* $\vec{F} = G\frac{Mm}{r^2}\cdot\vec{u}$; $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}$
- ***Intensidad de campo gravitatorio*** $\vec{g}$**:** $g = G\frac{M}{r^2}$ *vectorial:* $\vec{g} = G\frac{M}{r^2}\cdot\vec{u}$; *terrestre:* $\vec{a} = G\frac{M_T}{(R_T+h)^2}$
- ***Intensidad de campo en función de la altura:*** $\frac{g}{go} = \frac{Rt^2}{r^2} \rightarrow \frac{g}{9{,}81} = \frac{Rt^2}{(Rt+h)^2} \rightarrow g = 9{,}81\frac{Rt^2}{(Rt+h)^2}$
- ***Energía potencial gravitatoria Ep:*** $Ep = -G\frac{Mm}{r}$ *Ep terrestre:* $E_T = -G\frac{M_T m}{(R_T+h)}$
- ***Potencial gravitatorio V:*** $V = -G\frac{M}{r} \leftarrow Ep\ con\ m = 1\,Kg$
- ***Diferencia de potencial:*** $\Delta V = Vb - Va = \frac{Ep_a - Ep_b}{m} = G\cdot M(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b})$
- ***Trabajo $W_{A\text{-}B}$:*** $W = \int_A^B F\cdot dr = -\Delta Ep = -(Ep_B - Ep_A) = -m\cdot\Delta V = -m\cdot(V_B - V_A)$
- ***Velocidad de órbita:*** *Equilibrio de fuerzas:*



$$F_{centr} = F_{grav} = \rightarrow m\cdot a_n = G\frac{mM}{r^2} \rightarrow \cancel{m}\cdot\frac{v_o^2}{r} = G\frac{\cancel{m}M}{r^2} \rightarrow v_o = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

- ***Velocidad de escape:*** *Equilibrio de energías:*



$$E_{cin} + E_{pot} = 0 \longrightarrow \frac{1}{2}mv_e^2 = G\frac{Mm}{r} \longrightarrow v_e = \sqrt{\frac{2\,GM}{R}}$$

- ***Energía mecánica:***
  - *Energ. mec. de satélite <u>en órbita</u>:* $Em = Ec + Ep = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r} = \frac{1}{2}G\frac{Mm}{r} - G\frac{Mm}{r} \longrightarrow Em = -\frac{1}{2}G\frac{Mm}{r}$
  - *Energía cinética de satelización:* Para poner en orbita a radio r: $Ec_o + Ep_o = Em_o \longrightarrow Es = GM\cdot m\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2r}\right)$
  - *Trabajo para cambio de órbita*: $W = (Ec + Ep)f - (Ec + Ep)i \rightarrow W = \frac{1}{2}GMm\left(\frac{1}{R+hi} - \frac{1}{R+hf}\right)$

Ejercicios 1:

1. ***Órbitas***: Un satélite se encuentra en una órbita circular alrededor de la Tierra y tiene un período de 2 horas. ¿A qué altura de la superficie de la Tierra se encuentra el satélite? (R_T = 6.400 km)

2. ***Órbitas.*** *Calcula la masa del Sol sabiendo que la Tierra gira en torno de él describiendo una órbita de radio $149 \cdot 10^9$ m.*

3. ***Órbitas:*** *Un satélite artificial gira en torno a la Tierra describiendo una órbita de 7.000 km de radio. Calcula la velocidad y el periodo de revolución del satélite suponiendo que la masa de la Tierra es $M_T = 6{,}0 \cdot 10^{24}$ Kg.*

4. ***Órbitas.*** *La nave espacial ApoloVIII estuvo en órbita circular alrededor de la Luna 113 km por encima de su superficie. Calcula: a) El periodo de movimiento b) Las velocidades lineal y angular de la nave. c) La velocidad de escape a la atracción lunar desde esa posición. Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ $M_{Luna} = 7{,}36 \cdot 10^{22}$; Radio $_{Luna}$ = 1740 km.*

5. ***Órbitas***: *El periodo de revolución de Júpiter en su órbita alrededor del Sol es aproximadamente 12 veces mayor que el de la Tierra en su respectiva órbita. Considerando circulares las órbitas de los dos planetas, determina:*
   a) La razón entre los radios de las respectivas órbitas. b) La razón entre las aceleraciones de los dos planetas en sus órbitas.

6. ***Energías:*** *En el movimiento circular de un satélite en torno a la Tierra, determina: a) La expresión de la energía cinética en función de las masas del satélite, de la Tierra y del radio de la órbita. b) La relación que existe entre su energía mecánica y su energía potencial.*

7. ***Energías:*** *Calcula el trabajo necesario para trasladar un satélite terrestre de 500 kg desde una órbita circular de radio $r_0 = 2RT$ hasta otra de radio $r_1 = 3RT$ (R_T = 6.400 km).*

8. ***Energías***: *Se lanza un cuerpo verticalmente hacia arriba desde la superficie de la Tierra con una velocidad de 4.000 m/s. Calcula la altura que alcanzará (R_T = 6.400 km)*

Soluciones:

1.- $$F_G = F_c \Leftrightarrow G\frac{M_T \cdot m_{sat}}{(R+h)^2} = m_{sat} \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot (R+h) \Rightarrow (R+h)^3 = \frac{GM_T}{R^2} \cdot \frac{R^2T^2}{4\pi^2} \Leftrightarrow (R+h)^3 = g_0 \cdot \frac{R^2T^2}{4\pi^2} \Leftrightarrow h = \sqrt[3]{g_0\left(\frac{R \cdot T}{2\pi}\right)^2} - R \approx 1680{,}6\ \text{km}$$

2.- $$F_G = F_c \Leftrightarrow G\frac{M_S \cdot M_T}{d^2} = M_T \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot d \Rightarrow M_S = \frac{4\pi^2 \cdot d^3}{G \cdot T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot (149 \cdot 10^9)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot (365 \cdot 24 \cdot 3600)^2} = 1{,}97 \cdot 10^{30}\ \text{kg.}$$

3.- $$m\frac{v^2}{R} = G\frac{Mm}{R^2} \qquad v = \sqrt{\frac{GM}{R}} = 7{,}6 \cdot 10^3\ \text{m/s} \qquad T = \frac{2\pi R}{v} = 5\,784\ \text{s} = 1{,}6\ \text{h}$$

4.- $$a)\ y\ b) \quad v = \sqrt{\frac{GM_L}{R_L + h}} = 1\,630\ \text{m/s} \qquad \omega = \frac{v}{R_L + h} = \frac{1{,}627 \cdot 10^3\ \text{m/s}}{1{,}853 \cdot 10^3\ \text{m}} = 8{,}8 \cdot 10^{-4}\ \text{m/s} \qquad T = \frac{2\pi\,(R+h)}{v} = 7\,219\ \text{s}$$

5.- $$a) \quad \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3} \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \sqrt[3]{\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2} = \sqrt[3]{12^2} = 5{,}2; \quad b) \quad m\frac{v^2}{R} = G\frac{Mm}{R^2} \quad a_1 = \frac{v_1^2}{R_1} = \frac{GM_s}{R_1^2};\ a_2 = \frac{v_2^2}{R_2} = \frac{GM_s}{R_2^2} \qquad \frac{a_1}{a_2} = \frac{R_2^2}{R_1^2} = \frac{R_2^2}{5{,}2^2\,R_2^2} = \frac{1}{27} = 0{,}04$$

6.- $$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{GMm}{R_0} \qquad E_m = E_c + E_p = -\frac{1}{2}\frac{GMm}{R_0} = \frac{1}{2}E_p$$

7.- ¿
$$\cancel{W = \Delta Ep = -GM_T \cdot m\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) = -GM_T \cdot m\left(\frac{1}{2R_T} - \frac{1}{3R_T}\right) = -\frac{GM_Tm}{R_T}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = -5{,}23 \cdot 10^9}\ \text{J.}$$
$$E_1 = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{2R} = -\frac{R}{4}mg \qquad E_2 = -\frac{GMm}{6R} = -\frac{R}{6}mg \qquad E_2 - E_1 = Rmg\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{12}Rmg = 2{,}6 \cdot 10^9\ \text{J}$$

8.- $$Ec_1 + Ep_1 = Ec_2(=0) + Ep_2 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 + \left(-G\frac{M \cdot m}{R}\right) = \left(-G\frac{M \cdot m}{R+h}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{2}v_1^2 + \left(-G\frac{M}{R}\right) = \left(-G\frac{M}{R+h}\right) \Leftrightarrow h = \frac{2RGM}{2GM - Rv_1^2} - R = \frac{2RGM - 2RGM + R^2v_1^2}{2GM - Rv_1^2} \approx 935{,}7\ \text{km.}$$

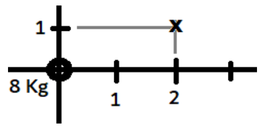
Ejercicios 2: *Soluc. al pie de pagina*

1. *<u>Campos/fuerzas</u>: Sabiendo que la masa de la Tierra es 5,97 ·10^{24} kg y la de la Luna 7,35 ·10 ^{22} kg calcula a qué distancia de la Tierra, en la línea que une la Tierra con la Luna puede considerarse que el campo gravitatorio es nulo. Considera que la distancia desde el centro de la Tierra al centro de la Luna es de 384.000 km.*

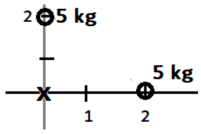
2. *<u>Superposición:</u> Calcula la fuerza gravitatoria que dos cuerpos puntuales de 10 y 20 kg situados respectivamente en los puntos (0,0) y (10,0), sobre un tercer cuerpo de 4 kg situado en el punto (7,5).*

3. *<u>Superposición</u>: En tres vértices de un cuadrado de 5 m de lado se disponen sendas masas de 12 Kg. Determinar el campo gravitatorio en el cuarto vértice. ¿Qué fuerza experimentará una masa de 4 kg situada en dicho vértice?*

4. *<u>Superposición</u>: Una masa de 8 kg está situada en el origen. Calcular:*
   a) Intensidad del campo gravitatorio y potencial gravitatorio en el punto (2,1) m.
   b) Fuerza con que atraería a una masa m de 2 kg, y energía almacenada por dicha masa.
   c) Trabajo realizado por la fuerza gravitatoria al trasladar la masa m desde el punto (2,1) m al punto (1,1) m.



5. *<u>Superposición</u>: Dos masas de 5 kg se encuentran en los puntos (0,2)m y (2,0) m. Calcular:*
   a) Intensidad de campo gravitatorio y potencial gravitatorio en el origen.
   b) Trabajo realizado por la fuerza gravitatoria al trasladar una masa de 1 kg desde el infinito hasta el origen.

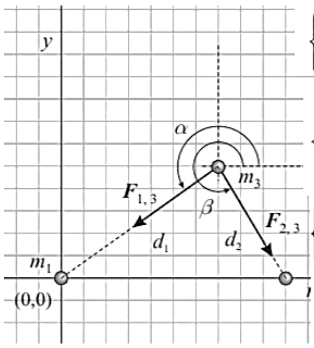


6. *<u>Trabajo</u>: Una esfera de 25 kg está situada en el origen de coordenadas y otra de 15 kg en el punto A(3,0) m. Calcula el trabajo efectuado al trasladar la esfera de 15 kg hasta el punto B(4,0) m*

Soluciones:

Sol 1: Punto en el que se neutralicen las atracciones: $g_T = g_L \rightarrow \frac{M_T}{r1^2} = \frac{M_L}{r2^2}$

Sol 2:



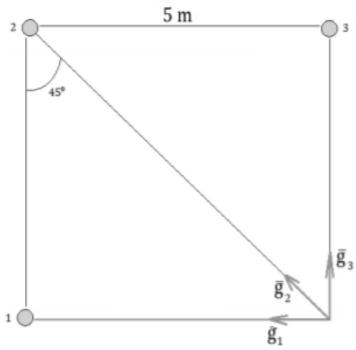
$$\begin{cases} d_1^2 = 7^2 + 5^2 = 74 \\ d_2^2 = 3^2 + 5^2 = 34 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_{1,3} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{10 \cdot 4}{74} = 3{,}6 \cdot 10^{-11} \text{ N} \\ F_{2,3} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{20 \cdot 4}{34} = 15{,}7 \cdot 10^{-11} \text{ N} \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_{1,3} = 3{,}6 \cdot 10^{-11} \cos\alpha \; \boldsymbol{i} + 3{,}6 \cdot 10^{-11} \text{ sen } \alpha \; \boldsymbol{j} \\ F_{2,3} = 15{,}7 \cdot 10^{-11} \cos\beta \; \boldsymbol{i} + 15{,}7 \cdot 10^{-11} \text{ sen}\beta \; \boldsymbol{j} \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_{1,3} = -2{,}9 \cdot 10^{-11} \; \boldsymbol{i} - 2{,}1 \cdot 10^{-11} \; \boldsymbol{j} \quad \text{N} \\ F_{2,3} = 8{,}1 \cdot 10^{-11} \; \boldsymbol{i} - 13{,}5 \cdot 10^{-11} \; \boldsymbol{j} \quad \text{N} \end{cases}$$

Sol 3:



$$r_2 = \sqrt{50} = 7{,}07\,m$$

$$g_1 = g_3 = G\frac{m_1}{r_1^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\frac{12}{5^2} = 3{,}2 \cdot 10^{-11}\,N/kg$$

$$g_2 = G\frac{m_2}{r_1^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\frac{12}{7{,}07^2} = 1{,}6 \cdot 10^{-11}\,N/kg$$

$$g_{2x} = g_2 \cdot \cos 45 = 1{,}13 \cdot 10^{-11}\;N/kg$$
$$g_{2y} = g_2 \cdot \text{sen } 45 = 1{,}13 \cdot 10^{-11}\;N/kg$$

$$\vec{g}_2 = -1{,}13 \cdot 10^{-11}\,\hat{\imath} + 1{,}13 \cdot 10^{-11}\hat{\jmath}$$

$$\vec{g}_T = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \vec{g}_3 = -4{,}33 \cdot 10^{-11}\,\hat{\imath} + 4{,}33 \cdot 10^{-11}\,\hat{\jmath}$$

Sol 4: a) g= - 9,55 ·10-11 *i* - 4,77 ·10-11 *j* N/kg ; V = -2,39 ·10-10 J/kg
b) *F*= - 1,91 ·10-10 *i*- 9,55 ·10-11 *j* N; Ep = -4,78 ·10-10 J ; c) 2,77 ·10-10 J

Sol 5: a) *g* = 8,34 ·10-11 *i* + 8,34 ·10-11 *j* N/kg ; V = -3,34 ·10-10 J/kg b) 3,34 ·10-10 J

Sol 6: $V_A = -G\,m/r = -5{,}6 \cdot 10^{-10}$; $V_B = -G\,m/r = -4{,}2 \cdot 10^{-10}$ → $W = -\Delta Ep = -m_2(VA - VB) = -2{,}1 \cdot 10^{-9}$ J

Ejercicios 3:

1. <u>Keppler</u>: La velocidad orbital de un planeta depende del radio de la órbita que describe en torno al Sol. Calcula la relación que existe entre las velocidades orbitales de la Tierra y Marte, sabiendo que los radios de las órbitas respectivas son: $r_T = 1{,}49 \cdot 10^{11}$ m; $r_M = 2{,}28 \cdot 10^{11}$ m.

2. <u>Eq. Fuerzas</u>: Un satélite se encuentra en una órbita circular alrededor de la Tierra y tiene un periodo de 2 h. ¿A qué altura de la superficie de la Tierra se encuentra el satélite? Datos: $R_T = 6\,370$ km

3. <u>Madrid 99</u>: Se coloca un satélite meteorológico de 1 000 kg en órbita circular a 300 km sobre la superficie terrestre. Determina: a) La velocidad lineal, la aceleración radial y el periodo en la órbita.
b) El trabajo que se requiere para poner en órbita el satélite. Datos: $R_T = 6\,370$ km; $g_0 = 9{,}80$ m/s2.

4. Considera dos satélites de masas iguales en órbitas circulares alrededor de la Tierra. Uno de ellos gira en una órbita de radio r y el otro en una órbita 2r. Contesta razonadamente a las siguientes preguntas:
a) ¿Cuál de los dos se desplaza con mayor velocidad?
b) ¿Cuál de los dos tiene mayor energía potencial?
c) ¿Cuál de ellos tiene mayor energía mecánica?

5. <u>Energías</u>: En un instante t_1 la energía cinética de una partícula es 30 J y su energía potencial 12 J. En un instante posterior t_2, la energía cinética es de 18 J.
a) Si únicamente actúan fuerzas conservativas sobre la partícula, ¿cuál es su energía potencial en el instante t_2?
b) Si la energía potencial en el instante t_2 fuese 6 J, ¿actuarían fuerzas no conservativas sobre la partícula?

6. <u>Energías</u>: Un satélite artificial describe una órbita circular alrededor de la Tierra. La velocidad de escape a la atracción terrestre desde esa órbita es la mitad que la velocidad de escape desde la superficie terrestre.
a) ¿A qué altura se encuentra el satélite?
b) ¿Se trata de un satélite estacionario?

7. <u>Fuerzas</u>: El radio de un planeta es la tercera parte del radio terrestre, y su masa la mitad. Calcula la gravedad en su superficie y la velocidad de escape del planeta en función de sus correspondientes valores terrestres.

8. <u>Energías</u>: Calcula la energía mínima requerida para enviar un vehículo espacial de 5.000 kg desde la Tierra hasta un punto en donde la gravedad sea despreciable. b) Si el viaje dura 20 días, calcula la potencia media que deben desarrollar los motores
($M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ Kg ; $RT = 6.37 \cdot 10^6$ m).

Soluciones:

1 $\frac{GMs \cdot m_T}{R_{oT}^2} = \frac{m_T v_T^2}{R_{oT}} \Rightarrow V_T^2 = \frac{GM_s}{R_{oT}}$ $\quad v_M^2 = \frac{GM_s}{R_{oM}}$ $\frac{v_M^2}{v_T^2} = \frac{R_{oT}}{R_{oM}} = \frac{1{,}49 \cdot 10^{11}}{2{,}28 \cdot 10^{11}} \Rightarrow v_M = 0{,}81\ v_T$	5 *a)* $E_{mo} = E_{mf} \Rightarrow 42\text{ J} = 18\text{ J} + E_p \Rightarrow E_p = 24\text{ J}$ *b)* Si E_p en t_2 6 J $\rightarrow E_{mo} \neq E_{mf}$; 42 J > 18 J + 6 J no se cumple
2 $m\frac{v^2}{R} = G\frac{Mm}{R^2} \rightarrow R = \frac{GM}{v^2}$ $v = \frac{2\pi R}{T}$ $R^3 = \frac{GMT^2}{4\pi^2} \rightarrow R = 7\,900$ km $h = 7\,900$ km $- 6\,400$ km $= 1\,500$ km.	*a)* Energía Mecánica, $\frac12 m v_T^2 + \left(-G\frac{M_T m}{R_T}\right) = 0 \rightarrow v_T = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$ a una altura h $\quad v_h = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T + h}} = \frac12 v_T = \frac12\sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$ $\rightarrow h = 3R_T$ *b)* No, porque el periodo de rotación del satélite es distinto que el de rotación terrestre.
3 $G\frac{Mm}{(R+h)^2} = m\frac{v^2}{R+h} \rightarrow v = \sqrt{\frac{gR^2}{R+h}} = 7\,721{,}3$ m/s $a = \frac{v^2}{R+h} = \frac{5{,}93 \cdot 10^7\text{ m}^2/\text{s}^2}{6{,}67 \cdot 10^6\text{ m}} = 8{,}94\text{ m/s}^2$ $E = E_{M\text{ órbita}} - E_{M\text{ superficie terretre}} = 59{,}41 \cdot 10^9$ J	$g_P = G\frac{M_p}{R_P^2}$ $R_P = \frac13 R_T$ y $M_P = \frac12 M_T$ $g_P = G\frac{M_P}{R_P^2} = G\frac{\frac12 M_T}{\left(\frac13 R_T\right)^2} = \frac92 G\frac{M_T}{R_T^2} = \frac92 g_0$ $v_P = \sqrt{\frac{2GM_P}{R_P}} \rightarrow v_P = \sqrt{\frac{2G\frac12 M_T}{\frac13 R_T}} = \sqrt{\frac{3GM_T}{R_T}} = \sqrt{\frac32}\ v_T$
4 *a)* $\frac{GM_T m}{R_o^2} = m\frac{v_0^2}{R_o} \Rightarrow v_o = \sqrt{\frac{GM_T}{R_o}}$ $v_1 = \sqrt{\frac{GM_T}{R_{o1}}}$; $v_2 = \sqrt{\frac{GM_T}{2R_{o1}}} \rightarrow v_1 = \sqrt{2}\,v_2$ *b)* $E_{p1} = -\frac{GM_T m}{R_o}$ $\quad E_{p2} = -\frac{GM_T m}{2R_o} \rightarrow E_{p1} = 2E_{p2}$ *c)* $E_{m1} = \frac12 m v_1^2 + E_{p1} = \frac12 m(\sqrt2\,v_2)^2 + 2E_{p2} = 2\left(\frac12 m v_1^2 + E_{p2}\right) = E_{m2}$	8 $Ep_0 + Ec_0 = 0 \Leftrightarrow -G\frac{Mm}{R} + \frac12 m v_0^2 = 0 \Leftrightarrow$ $\Delta Ec = \frac12 m v_0^2 = -G\frac{Mm}{R} = -G\frac{M}{R^2} mR = -g_0 mR = -3{,}12 \cdot 10^{11}$ J, $P = \frac{W}{t} = \frac{\Delta Ec}{t} = \frac{3{,}12 \cdot 10^{11}\text{ J}}{20 \cdot 24 \cdot 3600\text{ s}} \approx 181$ kW.

Ejercicios 4.

1. Marte tiene dos satélites, llamados Fobos y Deimos, cuyas órbitas tienen radios de 9 400 y 23 000 km, respectivamente. Fobos tarda 7,7 h en dar una vuelta alrededor del planeta. Aplicando las leyes de Kepler, halla el periodo de Deimos.

2. La masa de la Tierra es $6,0 \cdot 10^{24}$ kg y la masa de la Luna $7,2 \cdot 10^{22}$ kg. Si la fuerza gravitatoria entre ellas es $1,9 \cdot 10^{20}$ N, ¿qué distancia hay entre el centro de la Tierra y el centro de la Luna?

3. Resuelve las siguientes cuestiones:
a) Expresa la aceleración de la gravedad en la superficie de un planeta en función de la masa de este, de su radio y de la constante de gravitación universal G.
b) Si la aceleración de la gravedad sobre la superficie terrestre vale 9,81 ms−2, calcula la aceleración de la gravedad a una altura sobre la superficie terrestre igual al radio de la Tierra.

4. Se lanza un cuerpo verticalmente hacia arriba desde la superficie de la Tierra con una velocidad de 4 000 m/s. Calcula la altura máxima que alcanzará. (Dato: R_T = 6 400 km.)

5. Calcula el trabajo necesario para trasladar un satélite terrestre de 500 kg desde una órbita circular de radio $r_0 = 2\,R_T$ hasta otra de radio $r_1 = 3\,R_T$. Datos: R_T = 6,4 · 106 m; g_0 = 9,8 m/s

6. Un cierto planeta esférico tiene una masa M = $1,25 \cdot 10^{23}$ kg y un radio r = $1,5 \cdot 10^{6}$ m. Desde su superficie se lanza verticalmente hacia arriba un objeto, el cual alcanza una altura máxima de r/2. Despreciando el rozamiento, determina: a) La velocidad con que fue lanzado el objeto. b) La aceleración de la gravedad en el punto más alto alcanzado por el objeto. Dato: G = $6,67 \cdot 10_{-11}$ N m^2kg^{-2}

7. Un asteroide está situado en una órbita circular alrededor de una estrella y tiene una energía total de −1010 J. Determina: a) La relación que existe entre las energías potencial y cinética del asteroide. b) Los valores de ambas energías potencial y cinética.

8. El periodo de revolución de Júpiter en su órbita alrededor del Sol es aproximadamente 12 veces mayor que el de la Tierra en su respectiva órbita. Considerando circulares las órbitas de los dos planetas, determina: a) La razón entre los radios de las respectivas órbitas. b) La razón entre las aceleraciones de los dos planetas en sus órbitas.

Soluciones:

De la Tercera Ley de Kepler $T_1 = \sqrt{\frac{T_2^2 r_1^3}{r_2^3}} = \sqrt{\frac{(7,7\ \text{h})^2 \cdot (23\,000\ \text{km})^3}{(9\,400\ \text{km})^3}} = 29,4\ \text{h}$	$E_1 = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GMm}{2R} = -\frac{R}{4} mg$ $E_2 = -\frac{GMm}{6R} = -\frac{R}{6} mg$ Trabajo $E_2 - E_1 = Rmg\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) = 2,6 \cdot 10^9\ \text{J}$
$r = \sqrt{\frac{GMm}{F}} = 3,9 \cdot 10^8\ \text{m}$	a) $E_{mo} = E_{mf} \Rightarrow \frac{1}{2} mv^2 - \frac{GM_pm}{R_p} = -\frac{GM_pm}{R_p + h} \rightarrow v^2 = \frac{2GM_p}{3R_p}$ para $h = \frac{R_p}{2} \rightarrow v^2 = 3,7 \cdot 10^6\ \text{m}^2 \rightarrow v = \sqrt{3,7 \cdot 10^6} = 1,925 \cdot 10^3$ b) $\frac{4 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \cdot 1,25 \cdot 10^{23}\ \text{kg}}{9 \cdot 1,5^2 \cdot 10^{12}\ \text{m}^2} = 1,65\ \text{m/s}^2$
a) $mg = G\frac{Mm}{R^2} \rightarrow g = \frac{GM}{R^2}$ b) $g_o = \frac{GM}{R_T^2} = 9,81\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ $g_h = \frac{GM}{(R_T + h)^2} = \frac{GM}{4R_T^2} = \frac{1}{4} g_o = 2,45$	$E_p = -\frac{GMm}{R} = \frac{mv^2}{R_o} \rightarrow E_p = -2\,E_c$ $Ec + Ep = -10^{-10} J \qquad E_c - 2E_c = -10^{-10}\ J$ $E_c = 10^{-10} J\ ;\ E_p = -2E_c = -2 \cdot 10^{-10}\ J$
$\frac{1}{2} mv^2 - G\frac{Mm}{R_T} = -G\frac{Mm}{R_T + h} \rightarrow \frac{1}{2} v^2 = \frac{GM}{R_T} \cdot \frac{h}{R_T + h}$ en función de la gravedad, $g = \frac{GM}{R_T^2}$ $\frac{1}{2} v^2 = R_T g \frac{h}{R_T + h} \rightarrow h = \frac{0,5\, v^2 R_T}{R_T g - 0,5\, v^2} = 9,4 \cdot 10^5\ \text{m}$	a) $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3} \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2} = \sqrt[3]{12^2} = 5,2; \rightarrow R_1 = 5,2\,R_2$ b) $m\frac{v^2}{R} = G\frac{Mm}{R^2} \qquad a_1 = \frac{v_1^2}{R_1} = \frac{GM_s}{R_1^2}; \qquad a_2 = \frac{v_2^2}{R_2} = \frac{GM_s}{R_2^2}$ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{R_2^2}{R_1^2} = \frac{R_2^2}{5,22\,R_2^2} = \frac{1}{27} = 0,04 \qquad a_1 = 0,04\,a_2$

Problemes MG-H

14. *Forces*: La massa de la Lluna és aproximadament de $7{,}3\cdot10^{22}$ kg, i el radi de $1{,}7\cdot10^{6}$ m. Dada: G = $6{,}67\cdot10^{-11}$ N·m2/kg2

a) Quina distància recorre un cos en 1 s, en caiguda lliure a la Lluna, si el deixem anar des d'un punt proper a la superfície?

b) Quin és el període d'oscil·lació a la superfície lunar d'un pèndol que a la Terra oscil. la amb un període d'1 s?

c) Quins pesos hauríem d'utilitzar a la superfície lunar per equilibrar la massa d'un cos en el plat d'una balança, si aquest equilibri s'aconsegueix a la Terra amb pesos de 23,15 g?

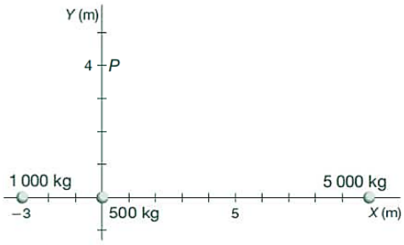
15. *Forces*: Si la densitat de la Terra es tripliqués sense variar el radi, quin seria el valor de g a la superfície de la Terra?

18. *Forces*: Calculeu la força gravitacional que la Terra exerceix sobre un astronauta de 75 kg que està reparant el telescopi espacial *Hubble* a una altura de 600 km. Compareu aquest valor amb el seu pes a la superfície de la Terra. *Dades: R_T = 6 380 km; g_0 = 9,8 m/s^2.*

21. a) Calculeu el camp gravitatori creat en el punt P per la distribució de masses representada en la figura.

b) Quina força, en mòdul, rep una massa de 5 kg situada en el punt P?

c) Esbrineu intuïtivament en quins intervals de l'eix X no es pot anul·lar la intensitat de camp gravitatori.



26. *Energies*: Tenim una massa de 10 kg en repòs sobre la superfície terrestre.
Quin treball cal fer per pujar-la fins a una altura de 10 m? I fins a una distància de 630 km?
Dades: G = $6{,}67\cdot10^{-11}$ $R_T = 6{,}37\cdot10^{6}$m $M_T = 5{,}98\cdot10^{24}$ kg

P6. Un astronauta pesa 700 N a la Terra. En arribar al planeta Venus es pesa. Si descomptem el pes de l'equip i els accessoris, el seu pes és de 633,6 N. Si el radi del planeta Venus és $6{,}052\cdot10^{6}$ m, calculeu la massa d'aquest planeta. *Dada: g_0 = 9,8 m/s^2.*

P7. El període de revolució de la Lluna al voltant de la Terra és de 27,32 dies, amb un radi de $3{,}844\cdot10^{8}$ m. Calculeu la intensitat de camp gravitatori a la superfície de la Terra. *Dada: $R_T = 6{,}4\cdot10^{6}$ km*

P10. Determineu la intensitat de camp g de la Terra a dos radis terrestres (2 RT) de distància tenint en compte que la g_0 en la superfície de la Terra és 9,8 m/s^2 .

P12. Llancem un cos de massa 8 kg des de la superfície de la Lluna amb una velocitat inicial de 20 m/s. Calculeu l'alçada màxima, el temps d'anada i tornada i l'energia cinètica quan ha pujat 100 m. Dades: $M_{LL} = 7{,}34\cdot10^{22}$ kg; $R_{LL} = 1{,}74\cdot10^{6}$

Solucions:

14 a) $g = G\dfrac{M}{R^2} = 1{,}68\ \text{m/s}^2 \rightarrow x = \dfrac{1}{2}gt^2 = 0{,}84\ \text{m}$ **b)** $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}} \rightarrow \dfrac{T_L}{T_T} = \sqrt{\dfrac{g_T}{g_L}} = 2{,}41$. Si $T_T = 1$ s, $T_L = 2{,}41$ s **c)** 23,15 g.

15 $g = G\dfrac{3\rho_0 V_T}{R_T^2} = 3G\dfrac{M_T}{R_T^2} = 3g_0 = 3\cdot9{,}8 = 29{,}4\ \text{m/s}^2$

18 $g = G\dfrac{M_T}{r^2} = G\dfrac{M_T}{r^2}\cdot\dfrac{R_T^2}{R_T^2} = g_0\cdot\dfrac{R_T^2}{(R_T+h)^2} = 8{,}19\ \text{m/s}^2 \rightarrow \dfrac{p}{p_0} = \dfrac{mg}{mg_0} = \dfrac{g}{g_0} = \dfrac{8{,}19}{9{,}8} = 0{,}836$

21 a) $\vec{g} = -\Sigma G\dfrac{M_i}{r_i^2}\vec{u}_i = -G\left(\dfrac{500}{4^2}\vec{j} + \dfrac{1000}{5^2}\cdot\dfrac{(3\vec{i}+4\vec{j})}{5} + \dfrac{5000}{(\sqrt{116})^2}\cdot\dfrac{(-10\vec{i}+4\vec{j})}{\sqrt{116}}\right) = (1{,}07\cdot10^{-9}\vec{i} - 5{,}29\cdot10^{-9}\vec{j})\ \text{m/s}^2$

b) $g = \sqrt{(1{,}07\cdot10^{-9})^2 + (-5{,}29\cdot10^{-9})^2} = 5{,}40\cdot10^{-9}\ \text{m/s}^2 \rightarrow F = mg = 5\cdot5{,}40\cdot10^{-9} = 2{,}70\cdot10^{-8}\ \text{N}$

c) $(-\infty,-3)\cup(10,\infty)$

26 $g = G\dfrac{M_T}{d^2} = 9{,}83 \rightarrow W = mgh = 983\ \text{J}$ o $W = \Delta E_p = -G\dfrac{M_T m}{R_T+h} + G\dfrac{M_T m}{R_T} = GM_T m\left(\dfrac{h}{(R_T+h)R_T}\right) = 983\ \text{J}$ $5.6\cdot10^{7}$ J

P6 $m = \dfrac{p}{g} = 71{,}4\ \text{kg}$ $g_V = \dfrac{p}{m} = 8{,}87\ \text{m/s}^2$ $g = G\dfrac{M_V}{R_V^2} \Rightarrow M_V = \dfrac{gR_V^2}{G} = 4{,}87\cdot10^{24}\ \text{kg}$

P7 $v = \dfrac{2\pi R}{T} = 1023{,}2\text{m/s}$ $\dfrac{m_L v^2}{r} = G\dfrac{m_L M_T}{r^2} \Rightarrow \dfrac{v^2}{r} = G\dfrac{M_T}{r^2}\cdot\dfrac{R_T^2}{R_T^2} = g_0\dfrac{R_T^2}{r^2} \Rightarrow g_0 = \dfrac{v^2 r}{R_T^2} = 9{,}8\ \text{m/s}^2$

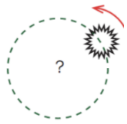
P10 $\dfrac{g_0}{g} = \dfrac{G\dfrac{M_T}{R_T^2}}{G\dfrac{M_T}{(3R_T)^2}} \Rightarrow \dfrac{9{,}8}{g} = \dfrac{9R_T^2}{R_T^2} \Rightarrow g = \dfrac{9{,}8}{9} = 1{,}09\ \text{m/s}^2$

P12 $g = G\dfrac{M}{r^2} = 1{,}62\ \text{m/s}^2$ $v^2 = v_0^2 + 2gx \rightarrow x = 123{,}46\ \text{m}$ $E_c = E_c' + E_p' \rightarrow \dfrac{1}{2}\cdot8\cdot20^2 = E_c' + 8\cdot1{,}62\cdot100 \rightarrow E_c' = 304\ \text{J}$

P13. Si la densitat mitjana de la Terra fos el doble de la que té ara, quin seria el valor de *g* a la superfície de la Terra si la massa no variés?.

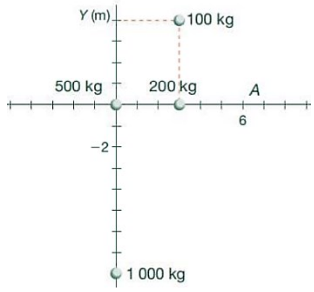
P15. Un cos pesa 49 N a la superfície de la Terra i 5 N en una altura determinada de la superfície. Calculeu la massa del cos i l'altura. Dades: $R_T = 6{,}38{\cdot}10^6$ m; $g_0 = 9{,}8$ m/s^2

P20. Un dels candidats a forat negre més pròxims a la Terra és A0620-00, que està situat a uns 3 500 anys llum. Es calcula que la massa d'aquest forat negre és de 2,2 · 1031 kg. Encara que A0620-00 no és visible, s'ha detectat una estrella que descriu cercles amb un període orbital de 0,33 dies al voltant d'un lloc on no es detecta cap altre astre Dada: G = 6,67 · 10−11 a) Deduïu la fórmula per obtenir el radi d'una òrbita circular a partir de les magnituds proporcionades. Utilitzeu aquesta fórmula per calcular el radi de l'òrbita de l'estrella que es mou al voltant d'A0620-00. b) Calculeu la velocitat lineal i l'acceleració centrípeta de l'estrella i representeu els dos vectors v a i c sobre una figura similar a la d'aquest problema.



P21. El projecte ExoMars és una missió espacial amb la finalitat de buscar vida al planeta Mart. En una primera fase, el 2016, constava d'un satèl·lit, l'ExoMars Trace Gas Orbiter, en òrbita circular al voltant de Mart a 400 km d'altura, i d'un mòdul de descens, el Schiaparelli, que havia d'aterrar en el planeta. Però quan el mòdul de descens estava a 3,7 km d'altura sobre Mart, pràcticament aturat, els sistemes automàtics van interpretar erròniament que ja havia arribat a la superfície. Van aturar els retrocoets i el mòdul es va desprendre del paracaigudes. Com a resultat, el Schiaparelli es va precipitar en caiguda lliure. a) Calculeu el període de l'ExoMars Trace Gas Orbiter. b) Determineu el valor de l'acceleració de la gravetat a la superfície de Mart i la velocitat a la qual la nau va impactar a la superfície. *Dades*: massa Mart = $6{,}42 \cdot 10^{23}$ kg; radi Mart = $3{,}38 \cdot 10^6$ m; G = $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2 kg^{-2}

P23. *Potencial*: Calculeu el potencial i la intensitat de camp gravitatori en el punt A creat per una distribució de masses com la representada a la figura.→



P24. Calculeu quina és l'energia necessària per portar una massa de 40 kg des de la superfície de la Terra fins a: a) 100 m d'altura. b) 1000 km d'altura.
Dades: RT = $6{,}38{\cdot}10^6$ $g_0 = 9{,}81$ m/s^2

P26. Un cos es troba a 500 km d'altura. Si el deixem anar lliurement, amb quina velocitat impacta a la superfície de la Terra, si negligim el fregament amb l'aire?
Dades: RT = $6{,}38{\cdot}10^6$ m ; $g_0 = 9{,}8$ m/s^2

P27. Un cos celeste de radi 1 km i densitat 7,5 g/cm^3 es mou en l'espai interès-tel. lar, on g és zero. Quina és la velocitat d'escapament d'un cos que es troba a la superfície d'aquest cos celeste? *Dada*: G = $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m^2/kg^2

Solucions:

P13 $g_0 = G\frac{M_T}{R_T^2} \to M_T = \frac{4}{3}\pi R_T^3\rho = \frac{4}{3}\pi R^3(2\rho) \Rightarrow R = \frac{R_T}{\sqrt[3]{2}} \to g = G\frac{M_T}{R^2} = G\frac{M_T}{\left(\frac{R_T}{\sqrt[3]{2}}\right)^2} = \sqrt[3]{4}g_0 = 15{,}6 \text{ m/s}^2$

P15 $\frac{g}{g_0} = \frac{{R_T}^2}{(R_T+h)^2}$ $\quad \frac{mg}{mg_0} = \frac{R_T^2}{(R_T+h)^2} \to \frac{P}{P_0} = \frac{R_T^2}{(R_T+h)^2} \to 2{,}13\, R_T$

P20 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2{,}204 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s} \quad G\frac{M_{forat}M_{estel}}{r^2} = M_{estel}\omega^2 r \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{GM_{forat}}{\omega^2}} = 3{,}11\cdot 10^9 \text{ m}$

$v = \omega r = 6{,}85 \cdot 10^5 \text{ m/s} \quad a_N = \omega^2 r = 151{,}07 \text{ m/s}^2$

P21 $m\frac{v^2}{R_M+h} = G\frac{M_M m}{(R_M+h)^2} \Rightarrow v^2 = G\frac{M_M}{R_M+h} \Rightarrow \left(\frac{2\pi(R_M+h)}{T}\right)^2 = G\frac{M_M}{R_M+h} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{(R_M+h)^3}{GM_M}} = 7056 \text{ s} = 1\text{h}57 \text{ min}36\text{s}$

$g = G\frac{M_M}{R_M^2} \Rightarrow g = 6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{6{,}42\cdot 10^{23}}{(3{,}38\cdot 10^6)^2} = 3{,}748 \text{ m/s}^2 \quad v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\cdot 3{,}748 \cdot 3700} = 166 \text{ m/s}$

P23 $V = -G\left(\frac{500}{6} + \frac{200}{3} + \frac{100}{5} + \frac{1000}{10}\right) = -1{,}8\cdot 10^{-8} \text{J/kg}$

$\vec{g} = -G\left(\frac{500}{36}\vec{i} + \frac{200}{9}\vec{i} + \frac{100}{25}\vec{i}\cdot\frac{(3\vec{i}-4\vec{j})}{5} + \frac{1000}{100}\cdot\frac{(6\vec{i}+8\vec{j})}{10}\right) = (-2{,}97\cdot 10^{-9}\vec{i} - 3{,}2\cdot 10^{-10}\vec{j}) \text{ m/s}^2$

P24 ***a)*** $W_{\text{forces externes}} = \Delta E_p = mgh = 40{\cdot}9{,}8{\cdot}10^2 = 3{,}92{\cdot}10^4$ J

b) $W_{\text{forces externes}} = -GM_T m\frac{R_T^2}{R_T^2}\left(\frac{1}{R_T+h} - \frac{1}{R_T}\right) = -g_0 m R_T^2\left(\frac{1}{R_T+h} - \frac{1}{R_T}\right) = 3{,}39\cdot 10^8$ J

P26 $E_p = E'_p + E'_c \to -GM_T m\left(\frac{1}{R_T+h}\right) = -GM_T m\frac{1}{R_T} + \frac{1}{2}mv^2 \to -g_0R_T^2\left(\frac{1}{R_T+h}\right) = -g_0R_T^2\left(\frac{1}{R_T}\right) + \frac{1}{2}v^2 \to v = 3{,}015{\cdot}10^3$ m/s

P27 $m = \rho V = \rho\frac{4}{3}\pi r^3 \to v = \sqrt{\frac{2Gm}{r}} = r\sqrt{\frac{8}{3}G\rho\pi} = 2{,}047$ m/s

P28. *Energies*: Dues masses de 100 kg i 500 kg estan separades una distància de 10 m. Si separem la massa de 500 kg fins a 20 m i la deixem anar lliurement, amb quina velocitat torna a passar pel lloc inicial? →

P29. *Forces*: Calculeu la intensitat de la gravetat a la superfície del planeta Mart, la velocitat d'escapament i el seu període al voltant del Sol. Dades: $M_M = 6{,}4 \cdot 10^{23}$ kg; $R_M = 3{,}32 \cdot 10^6$ m; $R_{S\text{–}M} = 2{,}28 \cdot 10^{11}$ m; $M_S = 1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$

P30. Les relacions aproximades entre les masses i els radis de la Terra i la Lluna són, respectivament, $M_T = 81\ M_L$; $R_T = 3{,}7\ R_L$: Dades: $R_L = 1740$ km; $g_0 = 9{,}8$ m/s^2 a) Quant val l'acceleració de la gravetat a la superfície de la Lluna? b) A quina altura sobre la superfície de la Lluna l'energia potencial gravitatòria d'un cos de massa m és la quarta part del seu valor a la superfície? No considereu els efectes de l'atracció gravitatòria terrestre.

P32. Júpiter és l'objecte més màssic del sistema solar després del Sol. La seva òrbita al voltant del Sol es pot considerar circular, amb un període d'11,86 anys. Determineu: a) La distància de Júpiter al Sol. b) La velocitat de Júpiter en la seva òrbita al voltant del Sol. c) L'energia mecànica total (cinètica i potencial) de Júpiter. *Dades*: massa Júpiter $m = 1{,}9 \cdot 10^{27}$ kg; massa Sol $M = 2{,}0 \cdot 10^{30}$ kg; constant gravitació universal $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N·m^2/kg^2

P33. Tres masses puntuals, $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 2$ kg i $m_3 = 3$ kg, estan situades als vèrtexs d'un triangle equilàter de costat a = 3 m , en una regió de l'espai on no hi ha cap altre camp gravitatori que el creat per les tres masses. Determineu: a) El treball que s'ha fet per portar les masses des de l'infinit fins a la seva configuració actual (correspon a l'energia potencial gravitatòria) b) El potencial gravitatori en el punt mitjà del segment que uneix m1 i m3. c) El mòdul de la força d'atracció gravitatòria que experimenta la massa m_1. *Dada: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N·m^2/kg^2*

P36. En el pla X-Y hi ha un camp gravitatori uniforme d'intensitat 2 g m s = 3, 4 i . a) Donats els punts A (2, -5) i B (-4, 7) en unitats SI, calculeu la diferència de potencial VB - VA. b) Quin treball hem de realitzar per desplaçar una massa de 20 kg des d'A fins a B? c) Determina el potencial en qualsevol punt del pla X-Y si suposem que en l'origen el potencial és zero.

P37. Una esfera massissa de ferro de radi 1 m i amb una densitat de 7,87 g/cm3 està aïllada de qualsevol massa. a) Calculeu els potencials en els punts que disten del centre de l'esfera i que estan en posicions diametralment oposades A = 2 m i B = 5 m. b) Quin treball és necessari per desplaçar una massa de 10 kg des d'A fins a B?

Solucions:

P28 $\Delta E_c + \Delta E_p = 0 \rightarrow \Delta E_c = -\Delta E_p = -\left(-G\frac{100 \cdot 500}{10} + G\frac{100 \cdot 500}{20}\right) = 1{,}6675 \cdot 10^{-7}\ \text{J} \rightarrow 1{,}6675 \cdot 10^{-7} = \frac{1}{2} \cdot 500 \cdot v^2 \rightarrow v = 2{,}6 \cdot 10^{-5}$ m/s

P29 $g = G\frac{M}{R^2} \rightarrow g = 3{,}9\ \text{m/s}^2 \quad v = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = 5{,}07 \cdot 10^3\ \text{m/s} \quad \omega^2 = G\frac{M_{Sol}}{r^3} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_{Sol}}} = 5{,}937 \cdot 10^7\ \text{s} = 1{,}88$ anys

P30 $\frac{g_L}{g_T} = \frac{M_L}{M_T}\left(\frac{R_T}{R_L}\right)^2 \rightarrow g_L = 1{,}66\ \text{m/s}^2 \qquad R_L + h = 4\ R_L \rightarrow h = 3\ R_L = 5\,220$ km

P32 ***a)*** $G\frac{M_{Sol}m}{r^2} = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r \Rightarrow r = 7{,}79 \cdot 10^{11}$ ***b)*** $v = \omega r = \left(\frac{2\pi}{T}\right) r \Rightarrow v = 1{,}3 \cdot 10^4$ ***c)*** $E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r} = -\frac{1}{2}G\frac{Mm}{r} \rightarrow E = -1{,}63 \cdot 10^{35}$ J

P33 ***a)*** $W = -G\left(\frac{m_1 m_3}{a} + \frac{m_1 m_2}{a} + \frac{m_2 m_3}{a}\right)$ $W = -4{,}2 \cdot 10^{-10}$ J ***b)*** $V = -G\left(\frac{m_1}{a/2} + \frac{m_3}{a/2} + \frac{m_2}{a \sin\theta}\right) = -3.97 \cdot 10^{-10}$ J/kg ***c)*** $\vec{F}_T = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} = G\left(\frac{2}{3}, 0\right) + G\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 9{,}7 \cdot 10^{-11}$ N

P36 ***a)*** $\Delta V = -\vec{g} \cdot \Delta\vec{r} \Rightarrow \Delta V = -3{,}4\vec{i} \cdot \left(-6\vec{i} + 12\vec{j}\right) = 20{,}4$ J/kg ***b)*** $W = m\Delta V = 408$ J ***c)*** $dV = -\vec{g} \cdot d\vec{r} \Rightarrow V = -\int_0^{\vec{r}} 3{,}4\vec{i} \cdot (dx, dy) = -\int_0^{(x,y)} 3{,}4\vec{i} \cdot (dx, dy) = -\int_0^{(x,y)} 3{,}4 dx = -3{,}4x$

P37 $M = \rho V = \rho \frac{4}{3}\pi R^3 = 3{,}297 \cdot 10^4$ kg

$$V_A = -G\frac{M}{r} = -6.67 \cdot 10^{-11} \frac{3{,}297 \cdot 10^4}{2} = -1{,}1 \cdot 10^{-6}\ \text{J/kg}$$

$$V_B = -6.67 \cdot 10^{-11} \frac{3{,}297 \cdot 10^4}{5} = -4{,}4 \cdot 10^{-7}\ \text{J/kg}$$

$W = m\Delta V = m\left(V_B - V_A\right) = 6{,}6 \cdot 10^{-6}$ J

PAUS 1:

Veure solucions

1. 2019. El 29 de novembre de 2018, el nano satèl·lit CubeCat-1, desenvolupat per estudiants i investigadors de la Universitat Politècnica de Catalunya (UPC), es va llançar a l'espai des de la base espacial de Sriharikota, a la costa est de l'Índia, dins d'un coet de l'agència espacial índia ISRO. El CubeCat-1 té una massa d'1,30 kg i orbita a 530 km de la superfície de la Terra. **a**) Calculeu el període orbital del CubeCat-1 **i** indiqueu el nombre de voltes completes que fa cada dia al voltant de la Terra. **b**) Quin és el pes del nano satèl·lit en la seva òrbita?
Dades: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} $M_{Terra} = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg $R_{Terra} = 6{,}37 \times 10^6$ m

2. 2018. Una vegada més, Einstein tenia raó. Cent anys després d'haver predit l'existència d'ones gravitatòries en la seva teoria general de la relativitat, han estat detectades, i aquesta detecció ha comportat la concessió del Premi Nobel de Física de l'any 2017. Les ones gravitatòries detectades van ser originades per la col·lisió de dos forats negres. Igual que les ones gravitatòries, els forats negres també van ser descrits per la teoria general de la relativitat. Les idees bàsiques relatives als forats negres es poden entendre amb les lleis de Newton.

a) L'any 1783, noranta-sis anys abans del naixement d'Einstein, l'astrònom John Michell (1724-1793) va publicar que un cos esfèric que tingués la mateixa densitat que el Sol i 500 vegades el radi d'aquest tindria una velocitat d'escapament, des de la seva superfície, superior a la velocitat de la llum. Calculeu la massa del cos i aquesta velocitat d'escapament.

b) Calculeu el mòdul de la intensitat del camp gravitatori que el cos de l'apartat anterior crea a la seva pròpia superfície. Quina força (mòdul, direcció i sentit) fa el cos sobre 1µg situat a la seva superfície?

Dades: $G = 6{,}67\times10^{-11}$Nm^{2}kg^{-2}. Massa del Sol, MS =$1{,}99\times10^{30}$ kg. Radi del Sol, RS=$6{,}96\times10^8$m

3. 2018. Orcus (2004 DW), un objecte del Sistema Solar descobert el febrer del 2004, és un dels cossos celestes més grans del cinturó de Kuiper i un dels candidats a ser considerat, en el futur, planeta nan per la Unió Astronòmica Internacional (UAI). Orcus té, aproximadament, una massa de $6{,}41\times10^{20}$kg, un radi de 459km i un període orbital de 248 anys.

a) Calculeu la distància mitjana entre Orcus i el Sol en unitats astronòmiques (UA).

b) Determineu la velocitat d'escapament (deduïu la fórmula tenint en compte l'energia del cos que s'escapa) i la intensitat del camp gravitatori a la seva superfície.

Dades: Radi orbital mitjà de la Terra = 1 UA. Període orbital de la Terra = 1 any $G=6{,}67\times10^{-11}$*Nm2kg*$^{-2.}$

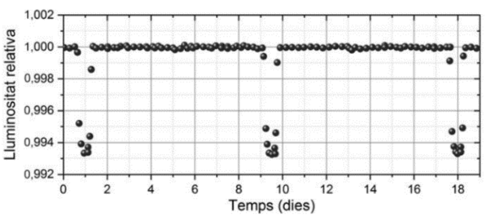
4. 2016. La massa de Saturn crea un camp gravitatori al seu voltant. Un dels seus satèl·lits, Mimas, té una massa de $3{,}80 \times 10^{19}$ kg i descriu una òrbita pràcticament circular al voltant del planeta.
a) Si el període de Mimas al voltant de Saturn és de 22 h 37 min i 5 s, a quina altura per sobre de la superfície de Saturn orbita Mimas? A quina velocitat? b) Quina és l'energia mecànica de Mimas? Què significa el signe del resultat? *Dades:* $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ *N m2 kg*$^{-2}$; $R_{Saturn} = 5{,}73 \times 10^7$ *m* ; $M_{Saturn} = 5{,}69 \times 10^{26}$ *kg*.

5. 2015. Galatea és el quart satèl·lit de Neptú més allunyat del planeta. Va ser descobert per la sonda espacial Voyager 2 l'any 1989. Suposem que l'òrbita que descriu és circular.
a) Calculeu la velocitat lineal orbital de Galatea en el sistema de referència centrat en Neptú i calculeu la massa de Neptú. b) Calculeu el valor de la intensitat de camp gravitatori que Neptú crea a la seva pròpia superfície.
Dades: Període de l'òrbita de Galatea, $T_{Galatea} = 0{,}428$ *dies. Radi de l'òrbita de Galatea:* $R_{Galatea} = 6{,}20 \times 104$ *km Radi de Neptú:* $R_{Neptú} = 2{,}46 \times 10^4$ *km* ; *G = 6,67 × 10–11 N m*^{2} *kg*$^{-2}$

6. 2021 J Gràcies a les valuoses dades sobre les posicions dels astres que Tycho Brahe va recollir al llarg de la seva vida, Johannes Kepler va poder formular les seves famoses tres lleis.
a) Deduïu la tercera llei de Kepler a partir de la segona llei de Newton i de la llei de gravitació universal, suposant que els planetes descriuen moviments circulars uniformes.
b) A partir de les dades de la taula, determineu la massa del Sol (Dada: $G=6{,}67\times10^{-11}$Nm^{2}kg^{-2}.)

Planeta - Radi de l'òrbita (109 m), - Període (anys):
Mercuri: 57; 900; 2408 ; Venus: 108; 20; 6152 ; Terra: 149; 61; 000 ; Mart: 228; 01; 881

7. 2021 Sept. Un dels mètodes emprats per a detectar exoplanetes (planetes extrasolars) és l'observació del trànsit planetari, un fenomen astronòmic que s'esdevé quan un planeta passa per davant de l'estel al voltant del qual orbita i que es percep des de la Terra per la disminució de la llum de l'estel. El gràfic següent mostra la variació de lluminositat provocada pel trànsit d'un planeta que descriu una òrbita circular al voltant d'un estel. Aquest estel té una massa pràcticament idèntica a la massa del Sol. Considereu que la constant de Kepler d'aquest sistema és igual a la del Sistema Solar.
a) Calculeu el període i el radi de l'òrbita.
b) Determineu el mòdul de la velocitat i l'acceleració centrípeta del planeta. *Dada*: Radi orbital mitjà Terra =1,00 ua =$1{,}50\times10^{11}$m.



Solucions PAUS 1:

1.

a) $\vec{F} = m\vec{a}$ $\quad F = G\frac{mM_T}{r^2}$ $\quad a = G\frac{M_T}{r^2}$ $\quad a = \frac{v^2}{r}$ o $a = \omega^2 r$ $\quad v = \frac{2\pi r}{T}$ o $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_T}} = 2\pi\sqrt{\frac{(6{,}9\times10^6)^3}{6{,}67\times10^{-11}\cdot5{,}98\times10^{24}}} = 5700\text{ s} \quad ; \frac{86400}{5700} = 15{,}15,\text{ voltes senceres} = 15$$

b) $g = G\frac{M_T}{r^2} = 8{,}38\text{ m/s}^2$ $\quad Pes = mg = 10{,}9\text{ N}$

2.

$$\left.\begin{array}{l}\rho_{\cos} = \rho_{Sol}\\ R_{\cos} = 500R_{Sol}\end{array}\right\} \frac{M_{\cos}}{\frac{4}{3}\pi R_{\cos}^3} = \frac{M_{Sol}}{\frac{4}{3}\pi R_{Sol}^3} \Rightarrow M_{\cos} = \frac{M_{Sol}500^3R_{Sol}^3}{R_{Sol}^3} \qquad M_{\cos} = 500^3 M_{Sol} = 500^3\times1{,}99\times10^{30} = 2{,}49\times10^{38}kg$$

$$E_m = E_c + E_p = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_{esc}^2 - G\frac{mM_{\cos}}{R_{\cos}} = 0 \qquad \frac{1}{2}mv_{esc}^2 = G\frac{mM_{\cos}}{R_{\cos}} \Rightarrow v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM_{\cos}}{R_{\cos}}} = \sqrt{\frac{2\times6{,}67\times10^{-11}\cdot2{,}49\times10^{38}}{3{,}48\times10^{11}}} = 3{,}09\times10^8 m s^{-1}$$

$$g = G\frac{M_{\cos}}{R_{\cos}^2};\ g = 1{,}37\times10^5 m s^{-2} \qquad F = mg \qquad F = 1{,}00\times10^{-9}\cdot1{,}37\times10^5 = 1{,}37\times10^{-4}N$$

Direcció radial i cap al centre de l'astre.

3.

a) $\frac{r_{Terra}^3}{T_{Terra}^2} = \frac{r_{Orcus}^3}{T_{Orcus}^2}$ $\qquad r_{Orcus} = \left(\frac{1^3\cdot248^2}{1^2}\right)^{1/3} = 39{,}5UA$

b) $E = K + U = \frac{1}{2}mv_e^2 - G\frac{M_{Orcus}m}{R_{Orcus}} = 0$ $\qquad \frac{1}{2}mv_e^2 = G\frac{M_{Orcus}m}{R_{Orcus}} \Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2GM_{Orcus}}{R_{Orcus}}} = 4{,}32\times10^2 ms^{-1}$

$$|\vec{g}| = G\frac{M_{Orcus}}{R_{Orcus}^2} = \frac{6{,}67\times10^{-11}\cdot6{,}41\times10^{20}}{(459\times10^3)^2} = 0{,}203ms^{-2}$$

Direcció radial, sentit centre del planeta

4.

a) $G\frac{M_S\,M_M}{r_{\text{òrbita}}^2} = M_M\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r_{\text{òrbita}} \qquad r_{\text{òrbita}} = \sqrt[3]{\frac{G\,M_S\,T^2}{4\pi^2}} = 1{,}85\cdot10^8\text{ m}$

$$h = r_{\text{òrbita}} - R_{\text{Saturn}} = 1{,}28\cdot10^8\text{ m} \qquad v_{\text{orbital}} = \omega\,r_{\text{òrbita}} = \tfrac{2\pi}{T}\,r_{\text{òrbita}} = 1{,}43\cdot10^4\text{ m/s}$$

b) L'energia mecànica de Mimas serà:

$$\left.\begin{array}{l} E_m = E_T = \frac{1}{2}M_M\,v_{\text{orbital}}^2 - \frac{G\,M_S\,M_M}{r_{\text{òrbita}}}\ \boxed{0.2}\\ G\frac{M_S\,M_M}{r_{\text{òrbita}}^2} = M_M\frac{v_{\text{orbital}}^2}{r_{\text{òrbita}}} \Rightarrow v_{\text{orbital}}^2 = \frac{G\,M_S}{r_{\text{òrbita}}}\ \boxed{0.2}\end{array}\right\} \Rightarrow E_m = E_T = -\frac{1}{2}\frac{G\,M_S\,M_M}{r_{\text{òrbita}}} = -3{,}90\cdot10^{27}\text{ J}$$

<u>El signe</u> negatiu significa que el satèl·lit Mimas està girant en una òrbita estable al voltant de Saturn.

5.

a) $v_G = \frac{2\pi R_G}{T_G}$ $\quad T_G = 0.428dies\times\frac{24h}{1dia}\times\frac{60\min}{1h}\times\frac{60s}{1\min} = 3{,}70\times10^4 s$ $\quad v_G = \frac{2\pi\times6{,}20\times10^7}{3{,}70\times10^4} = 1{,}05\times10^4 m/s$

$$F_{gravitatòria} = F_{centrípeta} \Rightarrow G\frac{M_N m_G}{R_G{}^2} = \frac{m_G v_G^2}{R_G} \qquad M_N = \frac{R_G v_G^2}{G} = \frac{6{,}20\times10^7\times(1{,}05\times10^4)^2}{6{,}67\times10^{-11}} = 1{,}02\times10^{26}kg$$

b) $g_N = \frac{GM_N}{R_N{}^2}$ $\quad g_N = 11{,}2m/s^2$ ó (N/kg)

6.

a) Tercera llei de Kepler: quadrat del període orbital és directament proporcional al cub del semieix major de la òrbita.:

$$a_N = \frac{v^2}{r} \text{ o } a_N = \omega^2 r = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r \qquad F = G\frac{mM_{Sol}}{r^2} \qquad a = G\frac{M_{Sol}}{r^2} \qquad G\frac{M_{Sol}}{r^2} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r \qquad T^2 = \frac{(2\pi)^2}{G\,M_{Sol}}r^3 \text{ ó } \frac{r^3}{T^2} = \frac{G\,M_{Sol}}{(2\pi)^2}.$$

b) Fent servir les dades de qualsevol planeta de la taula:... Per exemple, de la terra obtenim:

$$M_{Sol} = \frac{(2\pi)^2}{G}\frac{r^3}{T^2} \qquad M_{Sol} = \frac{(2\pi)^2}{G}\frac{r^3}{T^2} = \frac{(2\pi)^2}{6{,}67\times10^{-11}}\frac{(149{,}6\times10^9)^3}{(365\times24\times3600)^2} = 1{,}99\times10^{30}\text{ kg}$$

7.

$$\frac{r_{orb\ terra}^3}{T_{terra}^2} = \frac{r_{orb\ planeta}^3}{T_{planeta}^2} \Rightarrow r_{orb\ planeta} = r_{orb\ terra}\left(\frac{T_{planeta}}{T_{terra}}\right)^{\frac{2}{3}} = 1{,}22\times10^{10}\text{m} = 8{,}15\times10^{-2}\text{ ua}$$

$$v_{planeta} = \frac{2\pi r_{orb\ planeta}}{T} = 1{,}05\times10^5\text{m/s} \qquad a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{(1{,}05\times10^5)^2}{1{,}22\times10^{10}} = 0{,}895\text{ m/s}^2$$

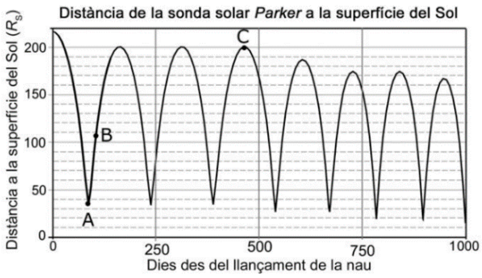
PAUS 2 Veure solucions

1. 2018 3 Un dels exoplanetes amb més possibilitats d'acollir vida és el Ross 128 b. Gira al voltant de l'estrella Ross 128 amb un període orbital de 9,9 dies, en una òrbita pràcticament circular de radi 7,42 × 106 km, i la seva massa és 1,35 vegades la massa de la Terra. a) Calculeu la massa de l'estrella Ross 128. b) Suposant que l'exoplaneta Ross 128 b tingui la mateixa densitat que la Terra, calculeu-ne el radi i el mòdul de la intensitat del camp gravitatori a la seva superfície. Dades: $G = 6,67 \times 10^{-11}$ N m2 kg^{-2} . Massa de la Terra, MT = $5,98 \times 10^{24}$ kg. Radi de la Terra, RT = $6,37 \times 10^{6}$ m.

2 2020 La sonda solar Parker és una nau espacial en òrbita al voltant del Sol que té com a objectiu acostar-se molt a la superfície solar. La gràfica següent mostra com varia la distància de la nau respecte al Sol al llarg dels primers 1000 dies de missió i indica els instants A, B i C. Les unitats emprades per a mesurar la distància a la superfície del Sol són radis solars, RS.

a) Observeu a la gràfica els moments de màxim acostament al Sol de cada òrbita i determineu quantes voltes completes ha fet la nau al voltant del Sol en aquests 1000 dies. Quant mesura l'eix major de l'òrbita entre els moments A i C? (Doneu el resultat en radis solars.)

b) Representeu esquemàticament el Sol i l'òrbita de la nau entre els moments A i C. Indiqueu sobre el dibuix les posicions corresponents a A, B i C. Situeu la nau en la posició B i dibuixeu en aquest instant els vectors velocitat i acceleració de la nau (no cal calcular-ne els mòduls). En quina posició la velocitat de la nau és màxima? Justifiqueu la resposta i indiqueu el principi físic en què us baseu.



3 2020 Sept. La trajectòria de la Terra al voltant del Sol és una el·lipse; aquest fet fa que la distància des de la Terra al Sol no sigui la mateixa en totes les èpoques de l'any. El periheli, la distància més curta entre la Terra i el Sol, és de $1,471\times10^{8}$km. La Terra passa pel periheli durant els primers dies del mes de gener de cada any. La velocitat de la Terra al periheli és de 30,75km/s. L'afeli és la posició més allunyada del Sol. Quan la Terra es troba a l'afeli, la seva velocitat orbital és de 28,76km/s.

a) Dibuixeu una òrbita clarament el·líptica (no cal que sigui l'òrbita real) on s'indiqui la posició del Sol i la de la Terra un dia d'hivern de l'hemisferi nord. Utilitzant arguments basats en l'energia, justifiqueu per què la velocitat de la Terra és mínima a l'afeli. Quina és la distància de la Terra al Sol a l'afeli?

b) Quina intensitat de camp gravitatori genera el Sol a la seva superfície? Quin és el pes d'una massa de 10,0kg a la superfície del Sol? *Dades*: $G=6,67\times10^{-11}$ Nm^{2}kg^{-2}. M Terra=$5,97\times10^{24}$kg. M Sol=$1,99\times10^{30}$kg. R Sol=$6,96\times10^{5}$km.

4 2021 Jun El 20 de juliol de 1969, la missió nord-americana Apollo 11 va aconseguir que l'ésser humà trepitgés per primera vegada la Lluna.

a) Dibuixeu les línies de camp gravitatori i les superfícies equipotencials al voltant de la Lluna en un pla que la contingui. Indiqueu si el potencial gravitatori augmenta o disminueix quan ens allunyem de la superfície de la Lluna. Justifiqueu la resposta. A quina distància de la superfície de la Lluna començà la maniobra d'allunatge si en aquest punt g=1,306 m/s^2?

b) Quina energia mínima han d'aportar els motors a la nau per a poder escapar-se de la gravetat de la Lluna, partint de la seva superfície? Dades: $G=6,67\times10^{-11}$ Nm2kg^{-2}. $M_{Lluna}=7,35\times10^{22}$kg. $m_{nau}=45,7\times10^{3}$kg. $r_{Lluna}=1,74\times10^{3}$km.

5 2022 Jun a) Un satèl·lit descriu una trajectòria circular de radi R al voltant d'una massa central. El temps que triga a donar-hi una volta sencera és T. Deduïu l'expressió per a calcular la intensitat del camp gravitatori, g, creat per la massa central en els punts de l'òrbita del satèl·lit en funció dels paràmetres R i T. Considereu que la Lluna descriu una òrbita circular al voltant de la Terra amb una distància entre centres de 384×10^{6}m i amb un període de 27,3 dies. Fent ús només d'aquestes dues dades i de l'expressió trobada anteriorment, calculeu la intensitat del camp gravitatori als punts de l'òrbita de la Lluna.

b) Deduïu l'expressió de l'energia cinètica mínima necessària perquè un coet de massa m pugui escapar d'un objecte astronòmic de massa M i radi R. Quantes vegades més gran és l'energia cinètica mínima perquè el coet pugui escapar de la Terra respecte de l'energia mínima que necessita per a escapar de la Lluna? (Només podeu fer servir les dades donades tot seguit.) Dades: $M_{Terra}=81,3\ M_{Lluna}$; $R_{Terra}=3,67\ R_{Lluna}$

6. 2022 sept. El març del 2021 es va llançar el primer nanosatèl·lit de la Generalitat de Catalunya a l'espai. Els nanosatèl·lits tenen com a funció millorar les comunicacions, controlar els cabals dels cursos d'aigua i prevenir incendis. També contribueixen a la recerca i realització de missions espacials més àgils i econòmiques. Aquests nanosatèl·lits acostumen a orbitar a uns 500 km d'altura (distància respecte a la superfície de la Terra).

a) Suposant que l'òrbita d'un d'aquests nanosatèl·lits és circular, a partir de la llei de la gravitació universal deduïu-ne l'expressió de la velocitat orbital en funció del radi orbital. Calculeu també la velocitat i el període orbitals d'aquests nanosatèl·lits. b) Partint de la llei de la conservació de l'energia mecànica (negligiu la força de fregament), deduïu l'expressió de la velocitat de llançament necessària per a posar en òrbita un satèl·lit en funció del radi orbital. Calculeu la velocitat de llançament necessària per a posar en òrbita el nanosatèl·lit a 500 km d'altura.

Dades: $G = 6,67 \times 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} , $M_{Terra} = 5,98 \times 10^{24}$ kg , $R_{Terra} = 6,37 \times 10^{3}$ km.

7. 2023 J: Els dos satèl·lits de Mart, Fobos i Deimos, porten el nom dels fills bessons d'Afrodita i Ares. En la mitologia romana, Ares, déu de la guerra, s'identifica amb Mart. Els dos satèl·lits tenen forma irregular, però els podem aproximar a una esfera de diàmetre 22,2 km per a Fobos i de 12,6 km per a Deimos. Per tant, comparats amb la Lluna, que té un diàmetre de 3 475 km, són petits. El radi orbital mitjà (distància entre els centres dels dos objectes) de Fobos al voltant de Mart és de 9 377 km i el seu període de revolució és de 7 hores, 39 minuts i 14 segons. Sabent que el radi orbital mitjà de Deimos és de 23 460 km, determineu a partir d'aquestes dades: a) La massa de Mart i la intensitat del camp gravitatori que Mart crea a la seva superfície. b) El període de revolució de Deimos al voltant de Mart i la seva energia mecànica. Dades: G = 6,67 × 10–11 MFobos = 1,10 × 10^{16} kg. MDeimos = 2,00 × 10^{15} kg. RMart = 3 390 km.
Nota: Considereu que els dos satèl·lits descriuen una trajectòria circular al voltant de Mart.

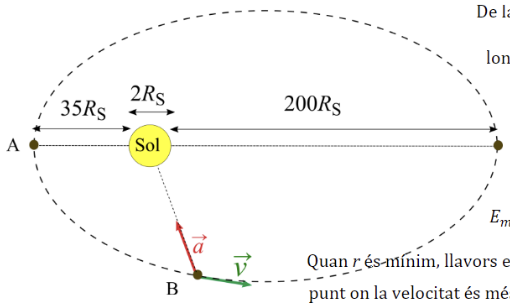
Solucions PAUS 2:

$$F = ma \Rightarrow \frac{GMm}{r^2} = m\omega^2 r \Rightarrow GM = \frac{4\pi^2}{T^2} r^3 \Rightarrow M = 3{,}30\times10^{29}kg$$

$$\rho_{Terra} = \rho_X \Rightarrow \frac{m_{Terra}}{\frac{4}{3}\pi r_{Terra}^3} = \frac{m_X}{\frac{4}{3}\pi r_X^3} \Rightarrow r_X = r_{Terra}\sqrt[3]{1{,}35} = 7{,}04\times10^6 m$$

$$g = \frac{Gm_x}{r_X^2} = 10{,}9 m\cdot s^{-2}$$

1



De la gràfica, s'han completat 7 voltes.

longitud de l'eix major és: $35R_S + 2R_S + 200R_S = 237R_S$

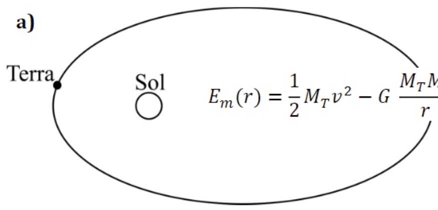
$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM_T}{r} \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = constant + G\frac{mM_T}{r}$$

Quan r és mínim, llavors el terme $G\frac{mM_T}{r}$ i l'energia cinètica són màxims, per tant, el punt on la velocitat és més gran és el punt més proper al Sol, el punt A.

2

3.

a)



$$E_m(r) = \frac{1}{2}M_T v^2 - G\frac{M_T M_S}{r} = constant \Rightarrow v = \sqrt{constant + 2G\frac{M_S}{r}}$$

$$r_a v_a M_T = r_p v_p M_T$$

$$r_a = r_p \frac{v_p}{v_a} = 147{,}1\times10^9 \frac{30.750}{28.760} = 1{,}57\times10^{11}\text{m}$$

Alternativament, $E_m(r_a) = E_m(r_p)$ $\frac{1}{2}M_T v_a^2 - G\frac{M_T M_S}{r_a} = \frac{1}{2}M_T v_p^2 - G\frac{M_T M_S}{r_p} \Rightarrow r_a = 1{,}57\times10^{11}\text{m}$

b) $g_S = G\frac{M_S}{R_S^2} = 274\ \text{m/s}^2$ $Pes = m\,g_S = 274\cdot10{,}0 = 2740\ \text{N}$

línies de camp radials sentit: de l'infinit cap a la lluna. $g = -G\frac{M_{Ll}}{r^2} \Rightarrow r = \sqrt{G\frac{M_{Ll}}{g}} = 1{,}937\times10^6\ \text{m}$ $d = r - R_{Ll} = 1{,}97\times10^5\text{m}$

4.

a) $mg = ma = m\omega^2 R$ $g = R\omega^2 = R\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}R = 2{,}72\times10^{-3}\ \text{m/s}^2$ **b)** $\frac{E_C(\text{Terra})}{E_C(\text{Lluna})} = \frac{G\frac{M_T\cdot m}{R_T}}{G\frac{M_{Ll}\cdot m}{R_{Ll}}} = \frac{M_T}{M_{Ll}}\frac{R_{Ll}}{R_T} = \frac{81{,}3}{3{,}67} = 22{,}1$

5.

a) $G\frac{mM_T}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{G\frac{M_T}{r}} = 7620\ \text{m/s}$ $T = \frac{2\pi r}{v} = 5660\ \text{s}$

b) $E_m(r) = E_c(r) + E_p(r) = -\frac{1}{2}G\frac{M_T m}{r} \Rightarrow \frac{1}{2}v^2 = GM_T\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2r}\right)$ $v = \sqrt{GM_T\left(\frac{2}{R_T} - \frac{1}{r}\right)} = 8200\ \text{m/s}$

6

$$G\frac{M_F M_M}{r^2} = M_F\omega^2 r \Rightarrow M_M = \frac{\omega^2 r^3}{G} = 6{,}43\times10^{23}\ \text{kg} \quad g = G\frac{M_M}{R_M^2} = 3{,}73\ \text{m/s}^2$$

$$G\frac{M_D M_M}{r^2} = M_D\omega^2 r \Rightarrow \omega = \sqrt{G\frac{M_M}{r^3}} = 5{,}76\times10^{-5}\ \text{rad/s} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 1{,}09\times10^5\ \text{s}$$

7