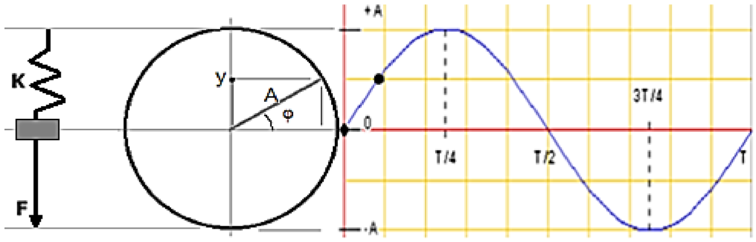
Movimiento vibratorio armónico simple (MVAS)

Cinemática del MVAS:



Del circular:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \rightarrow \varphi = \varphi_o + \omega t$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

$$v = \omega \cdot r \rightarrow \boldsymbol{v} = \pm\boldsymbol{\omega}\sqrt{\boldsymbol{A^2 - y^2}}$$

	Ecuaciones (t)	***Valores máx.** (sin/cos)=1*
Posición vert. (**y**):	$\boldsymbol{y(t) = A \cdot sin(\omega t + \varphi_o)}$	**$Y_{màx}$ = A**
Velocidad (**dy/dt**):	$\boldsymbol{v(t) = A \cdot \omega \cdot cos(\omega t + \varphi_o)} \quad = \pm\omega y$	**$V_{máx}$ = A·ω**
Aceleración (**dv/dt**):	$\boldsymbol{a(t) = -A \cdot \omega^2 \cdot sin(\omega t + \varphi_o)} \quad = -\omega^2 y$	**$a_{máx}$ = ± A·ω²**

Dinámica del MVAS:

F_e = m a → - k·x = - m ω² x → - k = - m ω² → $\boldsymbol{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$ (cuando x = 0 ⇒ F = 0)

Energía del MVAS:

- Cinética: $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \boldsymbol{\frac{1}{2}mA^2\omega^2}\cos^2(\omega t + \varphi_o)$; $\boldsymbol{Ec_{max} = \frac{1}{2}m \cdot (A \cdot \omega)^2}$
- Potencial: $dE_p = mg\Delta h = F_e\,dx \rightarrow E_p = \int k \cdot x\,dx = \boldsymbol{\frac{1}{2}k\,x^2}$; $\boldsymbol{Ep_{max} = \frac{1}{2}k \cdot A^2}$

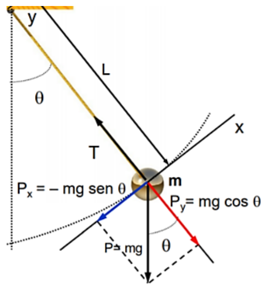
Péndulo simple:

- Fuerzas: Eje y: T – P_y = m·a_n

  Eje x: Px = m a_x ⇒ – mg sen θ = m a_x → a_x = – g sen θ

  despreciando la curvatura:→ a_x = – g· $\cancel{x}$/L = - ω² $\cancel{x}$ → $\boldsymbol{\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}}$ → $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

- Energía: $E = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + mgh \rightarrow \boldsymbol{v = \sqrt{2gh}}$



Mov. Ondulatorio:

Ecuación de onda: Tiene una doble dependencia: del tiempo (t) y de la distancia al origen (x):

$$\boxed{y(t,x) = A\ sen\ (\boldsymbol{\omega t} \pm \boldsymbol{kx} + \phi_0)}$$

Pulsación

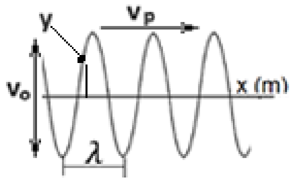
Num. de onda

Fase inicial (rad)

Amplitud

Signo – se propaga *hacia la derecha.*

Signo + se propaga *hacia la izquierda.*



Formas alternativas: $\boldsymbol{y}(t,x) = A\ sen\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right) = \boldsymbol{A\ sen\ 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)}$

K (Número de onda): nº de longitudes de onda que hay en 2π radianes: $k = \frac{\omega}{v} \rightarrow \boldsymbol{k} = \frac{2\pi}{\lambda}$; $\lambda = \frac{2\pi}{k}$

Velocidad y aceleración (de oscilación)

Para una onda que se desplaza hacia la derecha:

$y = A\ sen\ (\omega t - kx + \varphi)$ →

$v = \frac{dy}{dt} = -\ \omega A\ cos\ \ (\omega t - kx + \varphi)$ →

$a = \frac{dv}{dt} = -\ \omega^2 A\ sen\ (\omega t - kx + \varphi)$ →

Velocidad de propagación: $v_p = \lambda \cdot f$

o también:

$x = A\ cos\ (\omega t - kx + \varphi)$

$v = \omega\sqrt{A^2 - y^2}$

$a = -\omega^2 y$

La fase inicial En el instante t = 0 y para x = 0 , tendremos:

$y = A\ sen\ (\omega t - kx + \varphi)$ → $y(0,0) = A\ sen\ (0 + \varphi)$ → $sen\ (\varphi) = \frac{y_0}{A}$

$v = -\ \omega A\ \ cos\ \ (\omega t - kx + \varphi)$ → $v(0,0) = -\ \omega A\ \ cos\ \ (\varphi)$ → $cos\ \ (\varphi) = -\frac{v_0}{\omega\ A}$

Energía asociada a una onda

$E = E_{cin} + E_{pot} = \frac{1}{2}kA^2$; $E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}m4\pi^2f^2A^2 = (2\pi^2 m)f^2A^2$

<u>Ejercicios resueltos:</u>

Escribe la ecuación de un oscilador, sabiendo que se mueve entre dos puntos distantes entre sí 10 cm y que tiene una frecuencia de 20 Hz, con una fase inicial de 45°.

De acuerdo con el enunciado conocemos:

– La amplitud [redacted]

– La frecuencia [redacted].

– La fase inicial [redacted]

Por tanto, la ecuación del movimiento será:

[redacted]

Un oscilador tiene una amplitud de 15 cm y alcanza una velocidad máxima de 8,0 m/s. ¿Cuánto vale la aceleración máxima? ¿Qué velocidad y qué aceleración tiene el oscilador cuando se encuentra a 5,0 cm de la posición de equilibrio?

De las expresiones $v_m = \omega A$; $a_m = \omega^2 A$, obtenemos la relación:

[redacted] $a_m =$ [redacted] $= 427\ m/s^2$

$v =$ [redacted] 7,5 m/s

$a =$ [redacted]0 m/s²

$\omega =$ [redacted] 53 rad/s

Un oscilador vibra de forma que la aceleración máxima es 20,0 veces mayor que la velocidad máxima. ¿Cuánto vale la frecuencia?

[redacted] $v_m = 20,0\ A$.

Comparando [redacted].

De donde: $f =$ [redacted] 3,18 Hz

¿Para qué valores de la elongación coinciden la velocidad y la aceleración de un oscilador?

[redacted]

La frecuencia de oscilación de una masa *m* unida a un resorte es el doble que la de otra masa *m'* unida a otro resorte de las mismas características que el anterior. ¿Qué relación guardan entre sí ambas masas?

[redacted]

los dos resortes tienen la misma constante elástica,

[redacted] 4 m [redacted]

Una masa de 1000 g cuelga de un resorte. Si añadimos a la masa anterior otra de 500 g, el resorte se alarga 2,0 cm. Al retirar la segunda masa, la primera empieza a oscilar. ¿Con qué frecuencia lo hará?

constante elástica [redacted] 245 N/m

frecuencia [redacted] = 2,5 Hz

Una masa de 0,500 kg se cuelga de un muelle de k = 200 N/m para que oscile. Calcula la frecuencia y el periodo.

anterior: $f =$ [redacted] = 3,2 Hz; $T =$ [redacted] 0,3 s

Una partícula vibra de modo que tarda 0,50 s en ir desde un extremo a la posición de equilibrio, distantes entre sí 8,0 cm. Si para t = 0 la elongación de la partícula es 4,0 cm, halla la ecuación que define este movimiento.

periodo $T =$ [redacted] s, $\omega =$ [redacted]

fase inicial, aplicamos, para $t = 0$,

$x =$ [redacted]

$\varphi =$ [redacted]

Una partícula de 0,050 kg vibra con una amplitud de 0,40 m y una frecuencia de 25 Hz.

a) **¿En qué puntos de la trayectoria la energía cinética es el 80 % de la energía total?**

b) **¿En qué puntos la energía cinética y la energía potencial coinciden?**

c) **¿Cuánto vale la energía total?**

a) [redacted] ±0,18 m

b) [redacted] 0,28 m

c) [redacted] = 99 J

Una partícula de 250 g tiene un periodo de vibración de 0,040 s. Calcula la constante recuperadora.

$k =$ [redacted] /m

Un muelle se alarga 25 cm al colgar de él una masa de 2,0 kg. Calcula la frecuencia y la velocidad máxima de oscilación de la masa, sabiendo que la amplitud del movimiento es 5,0 cm. Dato: g_0 = 9,8 m s⁻².

constante [redacted] 78,4 N/m

frecuencia [redacted] 1 Hz

velocidad máxima es:

[redacted]

Una masa *m* oscila en el extremo de un resorte vertical con una frecuencia de 1000 Hz y una amplitud de 5 cm. Cuando se añade otra masa de 300 g la frecuencia de oscilación es de 0,500 Hz. Determina:

a) **El valor de la masa *m* y de la constante recuperadora del resorte.**

b) **El valor de la amplitud de oscilación en el segundo caso, si la energía mecánica es la misma en los dos casos.**

a) [redacted] 0,5 Hz

[redacted]

b) [redacted] $A_1 = 0,05$ m.

Ejercicios solución al final:

1. Un oscilador de 2 kg tiene una frecuencia de 40 Hz, una amplitud de 3 m y comienza su movimiento en la posición de equilibrio. ¿En qué posición se encuentra cuando su energía potencial es la mitad de su energía cinética?

2. Una partícula oscil·la segons un moviment harmònic simple de 8 cm d'amplitud i 4 s de període. Calcula la seva velocitat i l'acceleració en els casos següents:
a) En el moment en què la partícula passi pel centre de l'oscil·lació.
b) Mig segon després que la partícula hagi passat per un dels extrems de la trajectòria.

MG-Cat.

3. La velocitat i l'acceleració màximes d'un cos que oscil.la verticalment amb l'ajut d'una molla valen, respectivament 1,29 m/s i 13,87 m/s2 . En quins punts es donen aquests valors màxims? Quines són les equacions del moviment, de la velocitat i de l'acceleració d'aquest cos, si es comença a comptar el temps quan l'elongació del cos és la tercera part de l'amplitud?

4. L'agulla d'una màquina de cosir oscil·la entre dos punts separats una distància vertical de 20 mm. Suposant que fa un moviment harmònic simple de freqüència 30 Hz, quina és la seva acceleració màxima en unitats del SI?

5. Un gronxador efectua 5 oscil·lacions en 16 s amb un angle de separació respecte de la vertical de 10º. Si en el gronxador hi ha un nen de massa 25 kg, determineu:
a) La freqüència d'oscil·lació.
b) La longitud del gronxador.
c) L'energia mecànica.

Moviment ondulatori:

6. L'equació d'una ona transversal, en unitats del SI, és: $y = 0,04\ sin\ 2\pi(\frac{t}{2} - \frac{x}{4})$. Determineu el període, la longitud d'ona, la freqüència i la velocitat de fase.

7. Una corda està unida per un extrem a una paret i està lliure per l'altre extrem. Fem vibrar l'extrem lliure harmònicament i es genera una ona transversal, descrita per l'equació $y = 0,04\ sin\ 2\pi(\frac{t}{2} - \frac{x}{4})$, en què l'amplitud es mesura en centímetres mentre que el temps, t, i la distància, x, es mesuren en unitats del SI. Calculeu:
a) La velocitat de vibració d'un punt de la corda que dista 5 m de l'extrem lliure, en l'instant t = 3 s
b) La diferència de fase entre dos punts de la corda que disten 1 m i 3 m de la paret, respectivament, en un mateix instant.
c) Quant tardaria la vibració a arribar a la paret des de l'extrem lliure en què es genera, si la corda tingués una longitud de 10 m?

8. L'equació d'una ona harmònica transversal és (en unitats SI): $y = 0,4\ sin\ 2\pi(\frac{t}{2} - \frac{x}{4})$ Quant valdran l'elongació i la velocitat transversals del punt x = 0 en l'instant t = 6 s?

9. En un medi indeterminat es propaga una ona transversal i plana, representada per l'equació y = 0,20 cos (4 t – x), en unitats del sistema internacional (SI). Calculeu:
a) La velocitat de propagació de l'ona en el medi.
b) El mòdul de l'acceleració màxima de vibració de les partícules del medi.
c) L'acceleració d'una partícula del medi situada a 5 cm del focus emissor quan l'estat de vibració de la partícula és y = −0,10 m.

Soluciones:

1. $\omega = 2\pi f = 80$ rad/s; $E_c = 2E_p$
Si $E_c=2E_p \rightarrow E=1/2\ m\omega^2A^2 = 3E_p \rightarrow E_p=1/6\ m\omega^2A^2$
$\rightarrow x^2= A^2/3 = \sqrt{3}$

2: a) $\omega = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$; Pel centre d'oscil·lació: $\phi=0$
$y = 8 \cdot sin(0) \rightarrow v = 4\pi \cdot cos(0) = \pm 4\pi\ cm/s$
$a = -8 \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin(0) = 0\ cm/s^2$
b) para t=1,5: $v = 4\pi \cdot cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 1,5\right) = -8,8\ cm/s$
$a = -8 \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot 1,5\right) = -13,95\ cm/s^2$

3. $v_{màx} = A\omega = 1,29$ m/s es dona en el punt d'elongació nul.la, y = 0
$a_{màx} = A\omega^2 = 13,87\ m/s^2$ es dona en el punt y = –A
Amb els valors de $v_{màx}$ i de $a_{màx}$ podem calcular ω i A:
$A\omega^2/ A\omega= 13,87/1,29 \rightarrow \omega = 10,75$ rad/s
$A\cdot\omega= 1,29 \rightarrow A = 1,29/ 10,75= 0,12$ m
Si $t_0 =0$ i $y_o =A/3 \rightarrow \sin\phi=1/3 \rightarrow \phi=0,34$ rad Per tant:
y(t) = 0,12 sin (10,75t + 0,34)
v(t) = 1,29 cos (10,75t + 0,34)
a(t) = -13,87 sin (10,75t + 0,34)

4. A = 10 mm $\omega= 2\pi f = 2\ \pi\ 30$
amàx = ω^2 A → amàx = 355,3 m/s^2

5. a) f =5 osc/ 16 s = 0,31 Hz. b) $\omega = \sqrt{g/l} \rightarrow l = 2,54m$
c) E = $Ep_{màx}$ = mgy = mgl (1 - cos a) = 25·9,8·2,54 (1 - cos 10°) = 9,45 J

6. T = 2 s; f = 1 / T = 0,5 Hz λ = 4 m; v = λf = 2 m/s

7. a) Derivem respecte i hi substituïm x = 5 m i t = 3 s per determinar la velocitat: y(x,t) = 0,04 sin 2 π (t/2 – x/4) →
v(x,t) = 0,04 · π cos 2 π(t/2 – x/4) → v(5,3) = 0,04 · π cos 2 π (3/2 – 5/4) = 0,04 · π cos 2 π/4 = 0,04 · π cos π/2 = = 0,04 · π · 0 = 0 m/s.
b) Desfasament $\Delta\varphi = 2\pi \cdot \Delta x/\lambda \rightarrow \Delta\varphi = 2\pi \cdot (3 – 1)/4 = \pi$ rad
Per tant, els dos punts es troben en oposició de fase.
c) La velocitat de propagació és v = λ/T = 4/2 = 2 m/s. Per tant, el temps Δt que tarda la pertorbació a arribar a l'altre extrem, situat a una distància l = 10 m, és: l = v Δt → Δt = l/2 = 10/2 = 5 s

8. Elongació x = 0 i t = 6 : y= 0, 4 sin π(6/2 – 0) = 0, 4 sin 3π = 0 m
La velocitat: v = dy dt = 0,4/2 πcos (πt/2 - πx/4)
Per tant, a x = 0 a l'instant t = 6 s val: v = -0,2π m/s = -0,63 m/s

9. Per determinar la vel. propagació calculem λ i T, a partir dels valors de k i de ω que llegim a l'equació: k = 2 π/λ= π →
λ = 2 π/k= 2 π/π = 2 m ; ω= 2 π/T= 4π → T = 2 π/ω = 2 π/4π= 0,5 s
Per tant: v = λ/T = 2/0,5 = 4 m/s
b) $a_{màx} = A\ \omega^2 = 0,20 \cdot (4\pi)^2 = 31,6\ m/s^2$
c) y(x,t) = 0,20 cos π (4 t – x) → v(x,t) = – 0,20 · 4 π sinπ(4 t – x)
→ a(x,t) = $-0,20 \cdot (4\pi)^2 \cos\pi(4t – x) = -(4\pi)^2 y = 15,8\ m/s^2$