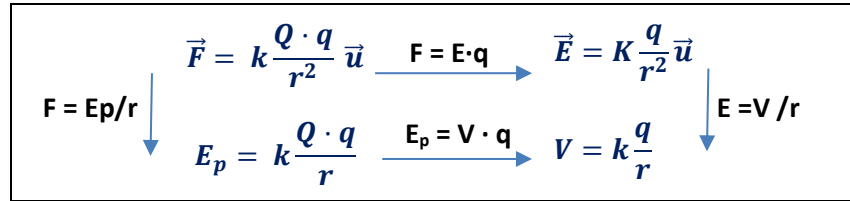


CAMPO ELÉCTRICO

Ley de Coulomb: $\vec{F} = k \frac{Q \cdot q}{r^2} \vec{u}$ *Módulo:* Fuerza de interacción entre dos cargas

Sentido: según el valor de las cargas. Repulsiva del mismo signo.

K Constante de Coulomb = $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}$; Permitividad relativa $\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$; $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$



Campo eléctrico:

- Cuando, se supone, que solamente está presente una carga Q: $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = K \frac{q}{r^2} \vec{u}$
- En función del vector posición: el origen: $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = K \frac{q}{r^3} \vec{r}$
- Si no está en el origen: $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = K \frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3} (\vec{r} - \vec{r}_0)$
- Superposición de cargas: $\vec{E} = \Sigma \vec{E}_i$
- Dipolo eléctrico: Para 2 cargas +Q i -Q separadas una distancia d: $P = Q \cdot d$ (moment dipolar)
- Fuerza d'un Camp elèctric uniforme sobre un dipol: generen un moment $M = P \times E$ (p. vectorial)

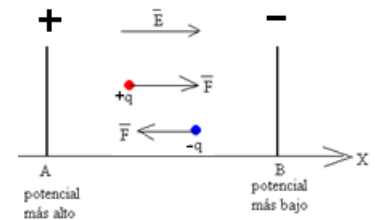
Trabajo y energía potencial

Trabajo fuerzas externas: $W = +\Delta E_p$

Movimiento pequeño: $\rightarrow dW = dE_p = F_{ext}(r) \cdot dl = -F(r) \cdot dl = -q \cdot E \cdot dl$

Movimiento no pequeño: $W = \int F dr = \int E_p dl$

- Trabajo $W > 0$ cuando una carga positiva +q se mueve desde un potencial más alto a otro de potencial más bajo. Una fuerza externa $\rightarrow W_{ext} < 0$



Potencial eléctrico: $V = k \frac{q}{r}$ para $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$; $V/E = r$ es escalar y se mide en volt (V)

- Si la carga no está en el origen: $V = k \frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}$
- V es la energía potencial de una carga positiva imaginaria: $V = \frac{E_p}{q}$ ó $E_p = V \cdot q$
- Diferencia de potencial: $\Delta V = V_B - V_A = \frac{-W_{AB}^{el}}{q_0} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$

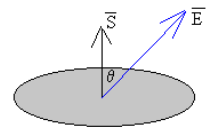
Relación entre el campo y el potencial: $\vec{E}(\vec{r}) = -\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)V(\vec{r}) = -\vec{\nabla}(V(\vec{r}))$

Relación entre la fuerza y campo: $F = q \cdot E$ Dirección misma que el campo, pero sentido según la carga

Flujo del campo eléctrico:

$\Phi = E \cdot S \cdot \cos \phi$ campo (E) por superficie (S) Perpendicular al plano que la contiene.

$$\Phi = \oint_{sup} \vec{E} \cdot d\vec{S} ; \Phi = \frac{Q_{neta}}{\epsilon_0} \rightarrow \boxed{E = \frac{Q_{neta}}{Sup} \cdot \frac{1}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}}$$



Condensador:

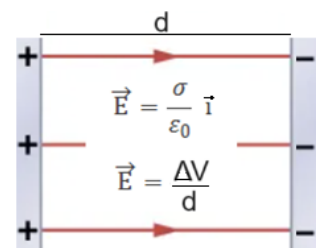
Dos placas paralelas y con igual carga pero de signo contrario.

El campo entre las placas valdrá: $E = \sigma/\epsilon_0$ (σ carga por unidad de superficie)

Su diferencia de potencial: $\Delta V = E \cdot d = \frac{\sigma \cdot d}{\epsilon} = \frac{Q \cdot d}{\epsilon \cdot S}$

Capacidad C (carga entre dif de potencial): $C = \frac{Q}{\Delta V}$

Su energía acumulada: $U = \frac{Q^2}{2C}$



Distribucions homogènia de càrrega

Densidad de carga *lineal*: $\lambda(r)=dq/dl$
 Densidad de carga *superficial*: $\sigma(r)=dq/ds$
 Densidad de carga *volúmica*: $\rho(r)=dq/dv$

$$\vec{E}(\vec{r}_1) = \int_v d\vec{E}(\vec{r}) = k_e \cdot \int_v \frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{r}_1 - \vec{r}|^3} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}) \cdot dv$$

$$V(\vec{r}_1) = \int_v dV(\vec{r}) = k_e \cdot \int_v \frac{\rho(\vec{r}) \cdot dv}{|\vec{r}_1 - \vec{r}|}$$

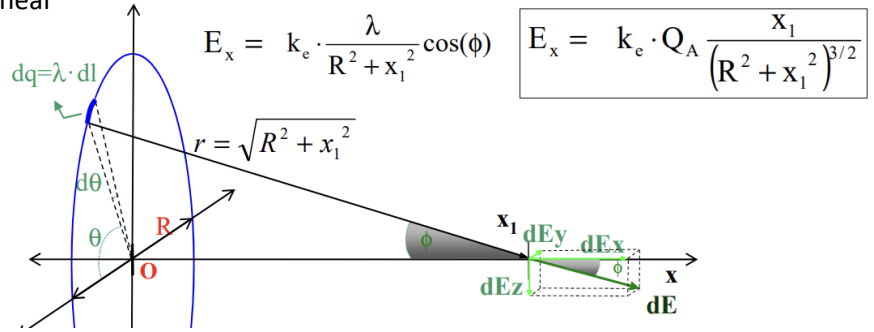
Cargas de puntos: $\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \left(\frac{q_i}{r^2} \right) \hat{r}$

Carga lineal: $\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{linea}} \left(\frac{\lambda dl}{r^2} \right) \hat{r}$

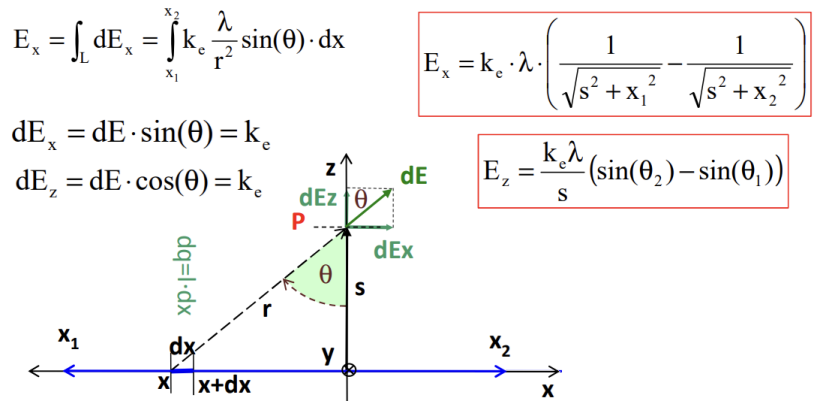
Carga superficial: $\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{superficie}} \left(\frac{\sigma dA}{r^2} \right) \hat{r}$

Volumen de carga: $\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{volumen}} \left(\frac{\rho dV}{r^2} \right) \hat{r}$

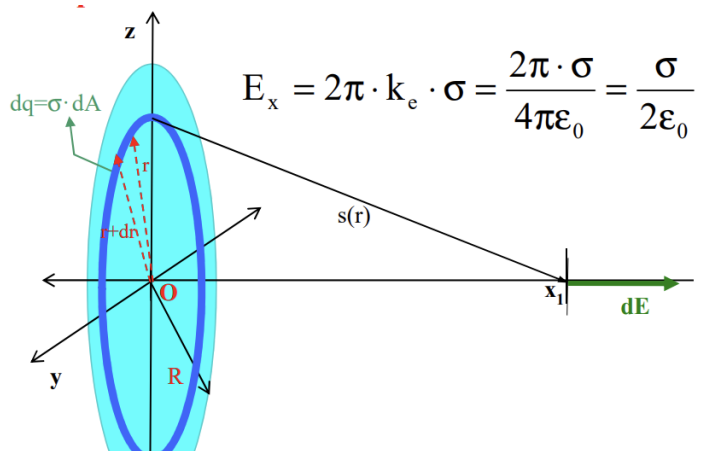
1. Camp generat per una distribució lineal unif. en forma d'anell circular de radi R en punts del seu eix:



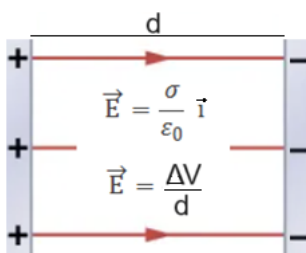
2. Fil rectilini unif. carregat amb densitat λ :



3. Camp generat per un disc carregat amb densitat superficial uniforme σ a l'eix \rightarrow



4. Camp entre dos plans infinits:



Condensadores y flujo:

Superficie gaussiana: $\Phi = \oint_S E \cdot dS = \frac{q}{\epsilon_0}$ $\Phi = \frac{Q_{neta}}{\epsilon_0} \rightarrow \boxed{E = \frac{Q_{neta}}{Sup} \cdot \frac{1}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}}$

- Condensador plano:

Campo uniforme: $\begin{cases} \Phi = \frac{q}{\epsilon_0} \\ \Phi = \oint_S E \cdot dS = 2ES \end{cases} \rightarrow E = \frac{q}{2S\epsilon_0} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$

Capacidad del condensador plano-paralelo: $C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{\epsilon_0 \cdot S}{d}$

Energía del condensador: $W = U = \frac{1}{2} C \cdot V^2$ con dieléctrico: $U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$

- Condensador cilíndrico:

Campo dirección radial desde su eje: $\begin{cases} \Phi = \frac{q}{\epsilon_0} \\ \Phi = \oint_S E \cdot dS = E \cdot 2\pi rL \end{cases} \rightarrow E = \frac{Q}{2\pi rL\epsilon_0}$

Capacidad de un condensador cilíndrico: $C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{2\pi \epsilon_0 x}{\ln(b/a)}$

- Condensador esférico:

Campo dirección radial y módulo constante: $\begin{cases} \Phi = \frac{q}{\epsilon_0} \\ \Phi = \oint_S E \cdot dS = E \cdot 4\pi r^2 \end{cases} \rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$

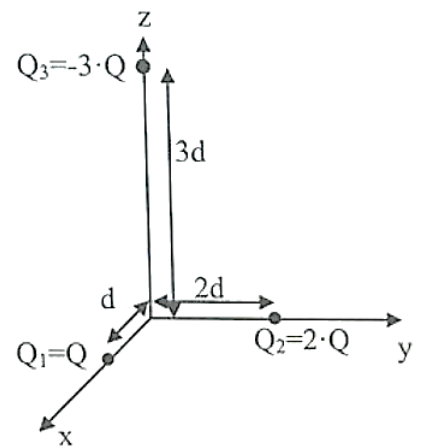
Capacidad: $C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{2\pi \epsilon_0 x}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}$

Ejercicios de campo creado por cargas puntuales

Examen 2018:

Considera un sistema de tres càrregues puntuales com el de la figura.

- Dedueix l'expressió de les tres components del camp elèctric en el punt $r_o = (d, 2d, 0)$.
- Calcula el potencial a l'origen (punt $(0,0,0)$) si $Q = 7 \text{ nC}$ i $d = 12 \text{ mm}$.
- Calcula el treball que fa el camp quan una càrrega de prova $q = 2 \text{ nC}$ es mou des de l'origen fins el punt r_o .

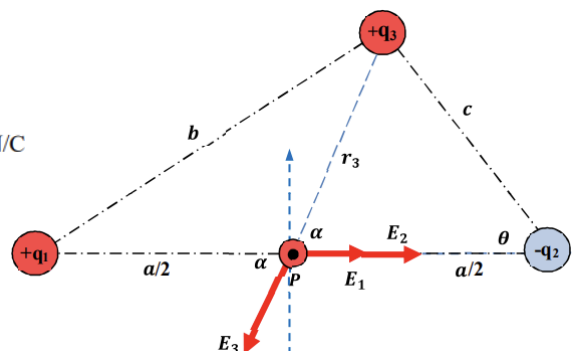


Sol: a) $\vec{E} = \frac{kQ}{d^2} \left[\frac{(0,2,0)}{8} + \frac{2(1,0,0)}{1} + \frac{-3(1,2,-3)}{14^{3/2}} \right]$

b) $V(0,0,0) = 9 \cdot 10^9 \frac{7 \cdot 10^{-9}}{12 \cdot 10^{-3}} = 5250 \text{ V}$ c) $W = -7,3 \mu\text{J}$

Ejercicio 1: Tres cargas puntuales están ubicadas en los vértices de un triángulo tal como se muestra en la figura, donde $q_1 = +10 \mu\text{C}$, $q_2 = -20 \mu\text{C}$, $q_3 = +30 \mu\text{C}$ los lados del triángulo miden $a = 70 \text{ cm}$, $b = 60 \text{ cm}$ y $c = 40 \text{ cm}$. Determinar el campo eléctrico y la dirección del mismo respecto al eje x en el punto P ubicado a la mitad del lado a.

Sol: $\sum E_x = 14,477 \times 10^5 \text{ N/C}$ $E = \sqrt{(E_x)^2 + (E_y)^2} = 23,177 \times 10^5 \text{ N/C}$
 $\sum E_y = -18,099 \times 10^5 \text{ N/C}$ $\tan \theta_1 = \frac{E_y}{E_x} \rightarrow \theta_1 = 51,344^\circ$



Cálculo del campo eléctrico E mediante la ley de Coulomb.

1. Una carga lineal uniforme de densidad $\lambda = 3.5 \text{ nC/m}$ se distribuye desde $x = 0$ a $x = 5 \text{ m}$

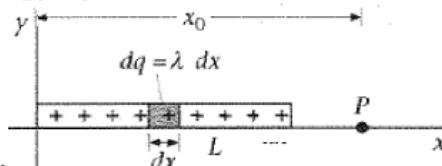
a) ¿Cuál es su carga total?

b) Determinar el campo eléctrico sobre el eje x en $x = 6 \text{ m}$ y en $x = 250 \text{ m}$

c) Determinar el campo en $x = 250 \text{ m}$ usando la aproximación de que se trata de una carga puntual en el origen y comparar el resultado con el obtenido en b.

a) $Q = \lambda * L = 3.5 * 10^{-9} * 5 = 17.5 * 10^{-9} \text{ C}$

b) $dE_x = k * \frac{dq}{(x_0 - x)^2} = k * \frac{\lambda * dx}{(x_0 - x)^2}$



$$E_x = \int_0^L k * \frac{\lambda * dx}{(x_0 - x)^2} = k * \lambda * \left[\frac{1}{x_0 - x} \right]_0^L = k * \lambda * \left(\frac{1}{x_0 - L} - \frac{1}{x_0} \right) = k * \lambda * \left(\frac{L}{(x_0 - L) * x_0} \right)$$

$L = 5 \text{ m} \Rightarrow E_x = k * \lambda * \left(\frac{5}{(x_0 - 5) * x_0} \right)$

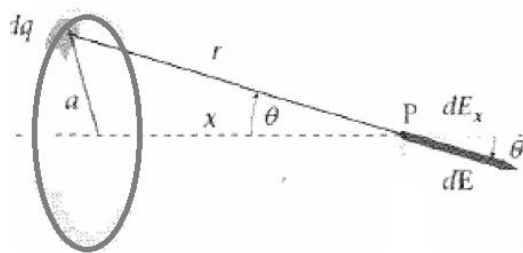
$E_x(6) = 8.99 * 10^9 * 3.5 * 10^{-9} * \left(\frac{5}{(6 - 5) * 6} \right) = 26.2 \text{ N/C}$

$E_x(250) = 8.99 * 10^9 * 3.5 * 10^{-9} * \left(\frac{5}{(250 - 5) * 250} \right) = 2.57 * 10^{-3} \text{ N/C}$

c) Si la carga fuera puntual: $E_x(250) = k * \frac{Q}{r^2} = 8.99 * 10^9 * \frac{17.5 * 10^{-9}}{250^2} = 2.52 * 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{C}}$ $e_r = \frac{0.05 * 10^{-3}}{2.57 * 10^{-3}} * 100 = 2 \%$

2. Una carga de $2,75 \mu\text{C}$ está uniformemente distribuida sobre un anillo de radio $8,5 \text{ cm}$ Determinar el campo eléctrico sobre el eje en a) $1,2 \text{ cm}$. b) $3,6 \text{ cm}$. c) $4,0 \text{ m}$ Desde el centro del anillo.

d) Determinar el campo en $4,0 \text{ m}$ con la aproximación de que el anillo es una carga puntual en el origen y comparar el resultado con el obtenido en (c).



a) $dE_x = k * \frac{dq}{r^2} = k * \frac{dq}{a^2 + x^2} * \cos\theta = \frac{k * dq}{a^2 + x^2} * \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

$dE_x = \frac{k * x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} * dq$

$E_x = \frac{k * x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} * \int_0^Q dq = \frac{k * x * Q}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$

$E_x(0.012) = \frac{8.99 * 10^9 * 0.012 * 2.75 * 10^{-6}}{(0.085^2 + 0.012^2)^{3/2}} = 4.69 * 10^5 \text{ N/C}$

b) $E_x(0.036) = \frac{8.99 * 10^9 * 0.036 * 2.75 * 10^{-6}}{(0.085^2 + 0.036^2)^{3/2}} = 1.13 * 10^6 \text{ N/C}$

c) $E_x(4) = \frac{8.99 * 10^9 * 4 * 2.75 * 10^{-6}}{(0.085^2 + 4^2)^{3/2}} = 1.54 * 10^3 \text{ N/C}$

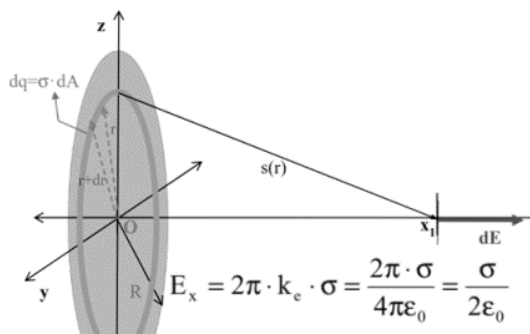
d) Si la carga fuera puntual:

$E_x(4) = k * \frac{Q}{r^2} = 8.99 * 10^9 * \frac{2.75 * 10^{-6}}{4^2} = 1.55 * 10^3 \frac{\text{N}}{\text{C}}$

$e_r = \frac{0.01}{1.54} * 100 = 0.7 \%$

3. Un disco de radio $2,5 \text{ cm}$ es portador de una densidad de carga superficial uniforme de $3,6 \mu\text{C/m}^2$ Utilizando aproximaciones razonables, determinar el campo eléctrico sobre el eje a distancia de:

a) $0,01 \text{ cm}$. b) $0,04 \text{ cm}$. c) 5 m . d) 5 cm .



$E_x = 2\pi * k_e * \sigma = \frac{2\pi * \sigma}{4\pi\epsilon_0} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$

a) $dE_x = \frac{k * dq}{a^2 + x^2} * \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{k * 2 * \pi * a * da * \sigma * x}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$

$E_x = \int_0^R \frac{k * 2 * \pi * a * \sigma * x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} * da = k * 2 * \pi * x * \int_0^R \frac{a}{(a^2 + x^2)^{3/2}} * da$

$E_x = -2 * k * x * \pi * \sigma * \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + x^2}} - \frac{1}{x} \right)$

$E_x = 2 * k * \pi * \sigma * \left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right)$

$E_x(0.0001) = 2 * 8.99 * 10^9 * \pi * 3.6 * 10^{-6} * \left(1 - \frac{10^{-4}}{\sqrt{0.025^2 + 0.0001^2}} \right)$

$E_x(0.0001) = 2.03 * 10^5 \text{ N/C}$

b) $E_x(0.0004) = 2 * 8.99 * 10^9 * \pi * 3.6 * 10^{-6} * \left(1 - \frac{4 * 10^{-4}}{\sqrt{0.025^2 + 0.0004^2}} \right) = 2.00 * 10^5 \text{ N/C}$

c) $E_x(5) = 2 * 8.99 * 10^9 * \pi * 3.6 * 10^{-6} * \left(1 - \frac{5}{\sqrt{0.025^2 + 5^2}} \right) = 2.54 \text{ N/C}$

d) $E_x(0.05) = 2 * 8.99 * 10^9 * \pi * 3.6 * 10^{-6} * \left(1 - \frac{5 * 10^{-2}}{\sqrt{0.025^2 + 0.05^2}} \right) = 2.15 * 10^4 \text{ N/C}$

4. Con el disco cargado del problema 4, calcular exactamente el campo eléctrico sobre el eje a distancia de
 a) 0,04 cm. b) 5 m y comparar los resultados con los correspondientes a las partes (b) y (c) del problema (4).

Calculado el exacto en el problema 4, calculamos aquí el aproximado si la carga fuera puntual:

a) $E_x(0.04) = k * \frac{Q}{r^2} = 8.99 * 10^9 * \frac{3.6 * 10^{-6} * \pi * 0.025^2}{0.04^2} = 3.97 * 10^5 \frac{N}{C}$
 $e_r = \frac{1.97}{3.97} * 100 = 50 \% \text{ La aproximación no es correcta.}$
 b) $E_x(5) = k * \frac{Q}{r^2} = 8.99 * 10^9 * \frac{3.6 * 10^{-6} * \pi * 0.025^2}{5^2} = 2.54 \frac{N}{C}$
 En este caso la aproximación es correcta.

5. Un disco de radio a se encuentra sobre el plano yz con su eje a lo largo del eje x y es portador de una densidad de carga superficial uniforme σ . Determinar el valor de x para el cual $E_x = \frac{1}{2} * \frac{\sigma}{2\epsilon}$

De acuerdo con lo obtenido en el problema 4:

$$E_x = 2 * \frac{1}{4 * \pi * \epsilon} * \pi * \sigma * \left(1 - \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right) = \frac{1}{2} * \frac{\sigma}{2\epsilon}$$

$$\left(1 - \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2 + x^2} = \frac{1}{4}; 4 * x^2 = a^2 + x^2; 3 * x^2 = a^2; x = \pm \frac{a}{\sqrt{3}}$$

6. Una carga lineal uniforme se extiende desde $x = -2,5 \text{ cm}$ a $x = 2,5 \text{ cm}$ posee una densidad de carga lineal $\lambda = 6,0 \text{ nC/m}$ a) Determinar la carga total. Hallar el campo eléctrico sobre el eje y en b) $y = 4 \text{ cm}$ c) $y = 12 \text{ cm}$ d) $y = 4,5 \text{ m}$ e) Determinar el campo en $y = 4,5 \text{ m}$ suponiendo que la carga es puntual y comparar el resultado con el obtenido en (d).

a) $Q = \lambda * L = 6.0 * 10^{-6} * 0.05 = 0.3 * 10^{-9} \text{ C}$

$$dE_y = k * \frac{\lambda * dx}{r^2} * \cos\theta = k * \frac{\lambda * dx}{r^2} * \frac{y}{r} = k * \frac{\lambda * dx}{r^2} * \frac{y}{r} = 2 * k * \lambda * y * \int_0^{L/2} \frac{dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

Podemos usar:

$$x = y * \tan\theta; dx = y * \frac{1}{\cos^2\theta} * d\theta$$

$$E_y = 2 * k * \lambda * y * \int_0^{L/2} \frac{dx}{(y^2 + \tan^2\theta + y^2)^{3/2}} * y * \frac{1}{\cos^2\theta} * d\theta$$

$$E_y = 2 * k * \lambda * y^2 * \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{1}{y^3 * (\tan^2\theta + 1)^{3/2}} * \frac{1}{\cos^2\theta} * d\theta$$

$$E_y = 2 * k * \lambda * y^2 * \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{1}{y^3 * (\frac{1}{\cos^2\theta})^{3/2}} * \frac{1}{\cos^2\theta} * d\theta = 2 * k * \lambda * y^2 * \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{1}{y^3} * \cos\theta * d\theta$$

$$E_y = \frac{2 * k * \lambda}{y} * [\sin\theta]_0^{\frac{L}{2}} = \frac{2 * k * \lambda}{y} * \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right]_0^{\frac{L}{2}}$$

$$E_y = \frac{2 * k * \lambda}{y} * \frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{(\frac{L}{2})^2 + y^2}} = \frac{2 * k * \lambda}{y} * \frac{2 * L}{2 * \sqrt{L^2 + 4 * y^2}}$$

$$E_y = \frac{2 * k * \lambda * L}{y * \sqrt{L^2 + 4 * y^2}}$$

$$E_y(0.04) = \frac{2 * 8.99 * 10^9 * 0.3 * 10^{-9}}{0.04 * \sqrt{0.05^2 + 4 * 0.04^2}} = 1.43 * 10^3 \text{ N/C}$$

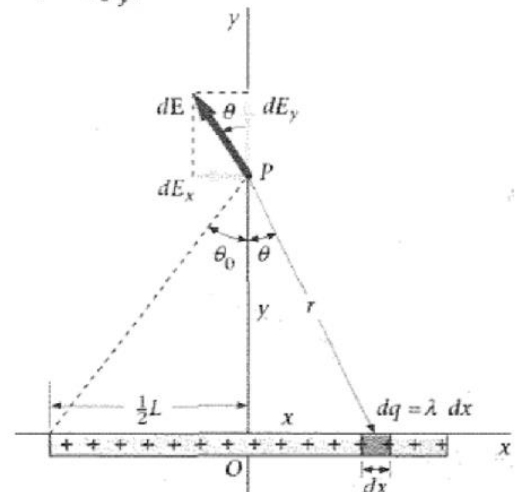
c) $E_y(0.12) = \frac{2 * 8.99 * 10^9 * 6 * 10^{-6} * 0.05}{0.12 * \sqrt{0.05^2 + 4 * 0.12^2}} = 183 \text{ N/C}$

d) $E_y(4.5) = \frac{2 * 8.99 * 10^9 * 6 * 10^{-6} * 0.05}{4.5 * \sqrt{0.05^2 + 4 * 4.5^2}} = 0.133 \text{ N/C}$

e) Para carga puntual:

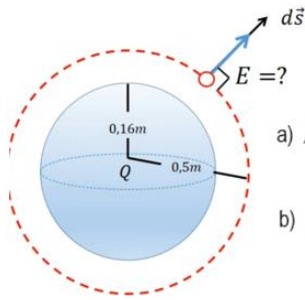
$$E_y(4.5) = k * \frac{Q}{r^2} = 8.99 * 10^9 * \frac{0.3 * 10^{-9}}{4.5^2} = 0.133 \text{ N/C}$$

Los resultados son prácticamente coincidentes.



Ley de Gauss

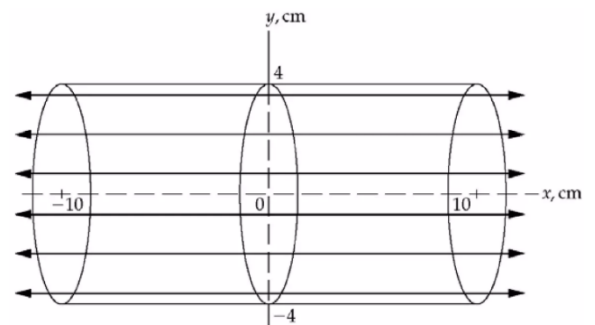
7. Un conductor esférico aislado de 0,16 m de radio tiene una distribución de carga uniforme en todo su volumen de $E = 1150 \text{ N/C}$ a) calcule la carga del conductor b) calcule el campo eléctrico a una distancia de 0,5 m de su centro.



$$\begin{aligned} \text{a) } E \oint_S ds &= \frac{Q_{\text{neta}}}{\epsilon_0} & E 4\pi R^2 &= \frac{Q_{\text{neta}}}{\epsilon_0} & Q_{\text{neta}} &= 4\pi R^2 E \epsilon_0 \Rightarrow Q_{\text{neta}} = 4\pi (0,16\text{m})^2 \cdot 8,854 \times 10^{-12} \text{C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot 1150 \text{ N/C} = 3,276 \times 10^{-9} \text{C} \\ \text{b) } E \oint_S ds &= \frac{Q_{\text{neta}}}{\epsilon_0} & E 4\pi r^2 &= \frac{Q_{\text{neta}}}{\epsilon_0} & E &= \frac{Q_{\text{neta}}}{4\pi r^2 \epsilon_0} = \frac{3,276 \times 10^{-9} \text{C}}{4\pi (0,5\text{m})^2 (8,854 \times 10^{-12} \text{C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)} \quad \boxed{E = 117,775 \text{ N/C}} \end{aligned}$$

8. Un campo eléctrico vale $E = (300 \text{ N/C})\mathbf{i}$ para $x > 0$ y $E = (-300 \text{ N/C})\mathbf{i}$ para $x < 0$. Un cilindro circular recto de 20 cm de longitud y 4 cm de radio tiene su centro en el origen y su eje está situado a lo largo del eje x de modo que una de las caras está a $x = 10 \text{ cm}$ y la otra en $x = -10 \text{ cm}$.

- a) ¿Cuál es el flujo saliente que atraviesa cada cara?
 b) ¿Cuál es el flujo que atraviesa la superficie curvada del cilindro?
 c) ¿Cuál es el flujo neto saliente que atraviesa toda la superficie cilíndrica?
 d) ¿Cuál es la carga neta en el interior del cilindro?



$$\begin{aligned} \text{a) } \Phi_{\text{derecha}} &= \Phi_{\text{izquierda}} = E \cdot A = 300 \cdot \pi \cdot 0,04^2 = 1,51 \text{ Nm}^2/\text{C} & \text{b) } \Phi_{\text{lateral}} &= 0 \\ \text{c) } \Phi_{\text{total}} &= 2 \cdot 1,51 = 3,02 \text{ Nm}^2/\text{C} \\ \text{d) } \Phi_{\text{total}} &= 4 \cdot \pi \cdot k Q_{\text{dentro}}; Q_{\text{dentro}} = \frac{\Phi_{\text{total}}}{4 \cdot \pi \cdot k} = \frac{3,02}{4 \cdot \pi \cdot 8,99 \cdot 10^9} = 2,67 \cdot 10^{-11} \text{ C} \end{aligned}$$

9. Una corteza esférica de radio 6 cm posee una densidad superficial uniforme de carga $\sigma = 9 \text{ nC/m}^2$
 a) ¿Cuál es la carga total sobre la corteza? Determinar el campo eléctrico en: b) $r = 2 \text{ cm}$ c) $r = 5,9 \text{ cm}$ d) $r = 6,1 \text{ cm}$ e) $r = 10 \text{ cm}$

- a) $Q = \sigma \cdot A = \sigma \cdot 4 \cdot \pi \cdot R^2 = 9 \cdot 10^{-9} \cdot 4 \cdot \pi \cdot 0,06^2 = 4,07 \cdot 10^{-10} \text{ C}$
 b) Para puntos interiores, la carga neta es cero, por tanto, $E = 0$.
 c) Seguimos dentro de la corteza, $E = 0$.
 d) En el exterior de la corteza: Utilizando la ley de Gauss y una esfera de prueba en la zona:

$$E = \frac{4 \cdot \pi \cdot k \cdot Q}{A} = \frac{4 \cdot \pi \cdot k \cdot Q}{4 \cdot \pi \cdot r^2} = k \cdot \frac{Q}{r^2} \quad E(0,061) = 8,99 \cdot 10^9 \cdot \frac{4,07 \cdot 10^{-10}}{0,061^2} = 983 \text{ N/C}$$

$$\text{e) } E(0,10) = 8,99 \cdot 10^9 \cdot \frac{4,07 \cdot 10^{-10}}{0,1^2} = 366 \text{ N/C}$$

10. Una esfera no conductora de radio $R = 0,1 \text{ m}$ posee una carga volúmica uniforme de densidad $\rho = 2,0 \text{ nC/m}^3$. La magnitud del campo eléctrico en $r = 2R$ es 1883 N/C . Determinar la magnitud del campo eléctrico en $r = 0,5R$

Considerando una esfera interior para aplicar el teorema de Gauss:

$$E = \frac{4 \cdot \pi \cdot k \cdot q_{\text{int}}}{A} = \frac{4 \cdot \pi \cdot k \cdot \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3}{4 \cdot \pi \cdot r^2} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot k \cdot \rho \cdot r \quad \Rightarrow E(0,5 \cdot R) = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 8,99 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-9} \cdot 0,5 \cdot 0,1 = 3,77 \text{ N/C}$$

11. Una corteza esférica de radio R_1 posee una carga total q_1 uniformemente distribuida en su superficie. Una segunda corteza esférica mayor de radio R_2 concéntrica con la anterior posee una carga q_2 uniformemente distribuida en su superficie.

- Utilizar la ley de Gauss para hallar el campo eléctrico en las regiones $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$ y $r > R_2$
- ¿Cuál deberá ser el cociente de las cargas q_1/q_2 y su signo relativo para que el campo eléctrico sea cero para $r > R_2$?
- Hacer un esquema de las líneas de fuerza para el caso indicado en la parte (b).

a) $\oint_S E_n \cdot dA = E \cdot A = 4 \cdot \pi \cdot k \cdot Q_{int}$

Considerando una esfera interior como superficie de prueba, la carga interior es nula: $E = 0$; $r < R_1$.

Con una esfera entre las dos cortezas:

$$E \cdot A = 4 \cdot \pi \cdot k \cdot Q_{int} = 4 \cdot \pi \cdot k \cdot q_1$$

$$E = \frac{4 \cdot \pi \cdot k \cdot q_1}{A} = \frac{4 \cdot \pi \cdot k \cdot q_1}{4 \cdot \pi \cdot r^2} = k \cdot \frac{q_1}{r^2}; R_1 < r < R_2$$

Para la esfera exterior a las cortezas:

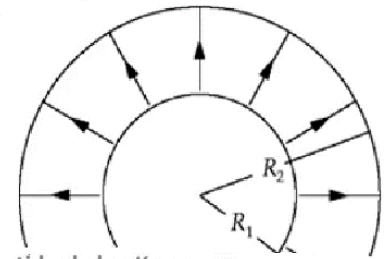
$$E \cdot A = 4 \cdot \pi \cdot k \cdot Q_{int} = 4 \cdot \pi \cdot k \cdot (q_1 + q_2)$$

$$E = \frac{4 \cdot \pi \cdot k \cdot (q_1 + q_2)}{A} = \frac{4 \cdot \pi \cdot k \cdot (q_1 + q_2)}{4 \cdot \pi \cdot r^2} = k \cdot \frac{(q_1 + q_2)}{r^2}; r > R_2$$

b) $\frac{q_1}{q_2} = -1$; han de ser iguales y de signos contrarios.

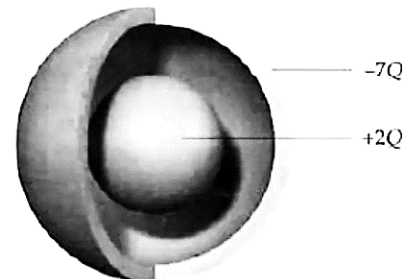
c) Si la carga 1 es positiva: 

Si la carga 1 es negativa el esquema sería análogo cambiando el sentido de las líneas.



12. Consideramos dos esferas conductoras concéntricas (figura). La esfera exterior es hueca y sobre ella se ha depositado una carga $-7Q$. La esfera interior es sólida y sobre ella se ha depositado una carga $+2Q$.

- ¿Cómo está distribuida la carga sobre la esfera exterior? Es decir, ¿Cuánta carga hay en la superficie exterior y cuánta en la superficie interior?
- Supongamos que se conecta un alambre entre ambas esferas. Una vez alcanzado el equilibrio electrostático, ¿Cuánta carga total existe sobre la esfera exterior? ¿Cuánta carga hay ahora en la superficie exterior de esta esfera y cuánta carga en su superficie interna? ¿Cambia el campo eléctrico en la superficie de la esfera interna al conectar el cable? ¿Si es así, cómo cambia?
- Supongamos que volvemos a las condiciones iniciales de (a) con $+2Q$ en la esfera interior y $-7Q$ en la exterior. Conectamos ahora la esfera exterior a tierra con un cable y luego lo desconectamos- ¿Qué carga total existirá sobre la esfera exterior? ¿Cuánta carga tendremos sobre la superficie interna de la esfera exterior y cuánta sobre la superficie externa?



a) Al ser la esfera exterior conductora se distribuirán las cargas $-2Q$ en la superficie interior y $-5Q$ en la exterior.

b) Ahora no hay carga en la superficie interior y $-5Q$ en la superficie exterior del caparazón esférico. El campo eléctrico justo fuera de la superficie de la esfera interior cambia de un valor finito a cero.

c) La carga de $-5Q$ se irá por el cable, nos quedan los $-2Q$ en la interior y $-2Q$ en la exterior.

Distribuciones cilíndricas de cargas:

12. Demostrar que el campo eléctrico debido a una corteza cilíndrica uniformemente cargada e infinitamente larga de radio R y que posee una densidad de carga superficial σ , viene dado por $E_r = 0$ cuando $r < R$ de $E_r = \frac{\sigma * R}{\epsilon_0 * r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 * r}$ cuando $r > R$, en donde $\lambda = 2\pi R\sigma$ es la carga por unidad de longitud sobre la corteza.

Usando un cilindro con la cara lateral paralela a la corteza considerada, $r > R$: $2 * \pi * r * L * E = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$

$$E = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0 * 2 * \pi * r * L} = \frac{\sigma * 2 * \pi * R * L}{\epsilon_0 * 2 * \pi * r * L} = \frac{\sigma * R}{\epsilon_0 * r} \quad \text{Para un } r < R, \text{ la carga interior es } 0, \text{ el campo también.}$$

13. Una corteza cilíndrica de longitud 200 m y radio 6 cm posee una densidad de carga superficial uniforme $\sigma = 9 \text{ nc/m}^2$ a) ¿Cuál es la carga total sobre la corteza?
 b) Determinar el campo eléctrico en: b) $r = 2 \text{ cm}$ c) $r = 5,9 \text{ cm}$ d) $r = 6,1 \text{ cm}$ e) $r = 10 \text{ cm}$
 (Utilizar los resultados del problema 42)

a) $Q = \sigma * A = \sigma * 2 * \pi * R * L = 9 * 10^{-9} * 2 * \pi * 0.06 * 200 \quad Q = 6.79 * 10^{-7} \text{ C} \quad \text{b) } Q_{int}=0; E=0. \quad \text{c) Igual que en b.}$

d) $E(r) = \frac{\sigma * R}{\epsilon_0 * r} \quad E(0.061) = \frac{9 * 10^{-9} * 0.06}{8.85 * 10^{-12} * 0.061} = 1000 \text{ N/C} \quad \text{e) } E(0.10) = \frac{9 * 10^{-9} * 0.06}{8.85 * 10^{-12} * 0.10} = 610 \text{ N/C}$

14. Un cilindro no conductor infinitamente largo de radio R posee una densidad de carga volúmica uniforme $\rho(r) = \rho_0$. Demostrar que el campo eléctrico viene dado $E_r = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}, r > R \quad E_r = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R^2} r, r < R$

Aplicando la ley de Gauss a un cilindro con la cara lateral paralela al cilindro cargado tendremos: $2 * \pi * r * L * E = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$

Para $r > R$: $Q_{int} = \rho_0 * V = \rho_0 * \pi * R^2 * L$ $E = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0 * 2 * \pi * r * L} = \frac{\rho_0 * \pi * R^2 * L}{\epsilon_0 * 2 * \pi * r * L} = \frac{\rho_0 * R^2}{\epsilon_0 * 2 * r}$ Para $r < R$: $Q_{int} = \rho_0 * V = \rho_0 * \pi * r^2 * L$ $E = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0 * 2 * \pi * r * L} = \frac{\rho_0 * \pi * r^2 * L}{\epsilon_0 * 2 * \pi * r * L} = \frac{\rho_0 * r^2}{\epsilon_0 * 2 * r} = \frac{\rho_0 * r}{\epsilon_0 * 2}$

15. Un cilindro de longitud 200 m y radio 6 cm posee una densidad de carga volúmica uniforme $\rho = 300 \text{ nc/m}^3$
 a) ¿Cuál es la carga total del cilindro? Utilizar las fórmulas dadas en el problema 44 para determinar el campo eléctrico en un punto equidistante de los extremos en: b) $r = 2 \text{ cm}$ c) $r = 5,9 \text{ cm}$ d) $r = 6,1 \text{ cm}$ e) $r = 10 \text{ cm}$ Comparar los resultados con los del problema 43.

a) $Q = \rho * V = \rho * \pi * R^2 * L = 300 * 10^{-9} * \pi * 0.06^2 * 200 = 6.79 * 10^{-7} \text{ C} \quad \text{b) } E = \frac{\rho_0 * r}{\epsilon_0 * 2} \quad E(0.02) = \frac{300 * 10^{-9} * 0.02}{8.85 * 10^{-12} * 2} = 339 \text{ N/C}$

c) $E(0.059) = \frac{300 * 10^{-9} * 0.059}{8.85 * 10^{-12} * 2} = 1000 \text{ N/C} \quad \text{d) } E(r) = \frac{\rho_0 * R^2}{\epsilon_0 * 2 * r} \quad E(0.061) = \frac{300 * 10^{-9} * 0.06^2}{8.85 * 10^{-12} * 2 * 0.061} = 1000 \text{ N/C} \quad \text{e) } E(0.10) = \frac{300 * 10^{-9} * 0.06^2}{8.85 * 10^{-12} * 2 * 0.10} = 610$

Los resultados en la parte exterior del cilindro son iguales.

16. 46. Consideremos dos cortezas cilíndricas concéntricas infinitamente largas. La corteza interior tiene un radio R_1 y posee una densidad de carga superficial uniforme σ_1 mientras que la exterior tiene un radio R_2 una densidad de carga superficial uniforme σ_2 a) Utilizar la ley de Gauss para hallar el campo eléctrico en las regiones $r < R_1$ $R_1 < r < R_2$, y $r > R_2$
 b) ¿Cuál deberá ser el cociente σ_2 / σ_1 y el signo relativo de ambas para que el campo eléctrico sea cero cuando $r > R_2$? ¿Cuál es entonces el campo eléctrico entre las cortezas? c) Hacer un esquema de las líneas de fuerza en el caso indicado en la parte (b).

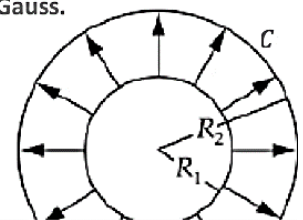
La carga interior del cilindro a considerar será 0, el campo será nulo.

Para $R_1 < r < R_2$: Solamente el cilindro interior tendrá carga interior al aplicar la ley de Gauss.

$$E * 2 * \pi * r * L = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_1 * 2 * \pi * R_1 * L}{\epsilon_0} \quad E = \frac{\sigma_1 * R_1}{\epsilon_0 * r}$$

Para $r > R_2$: $E * 2 * \pi * r * L = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_1 * 2 * \pi * R_1 * L + \sigma_2 * 2 * \pi * R_2 * L}{\epsilon_0} \quad E = \frac{\sigma_1 * R_1 + \sigma_2 * R_2}{\epsilon_0 * r}$

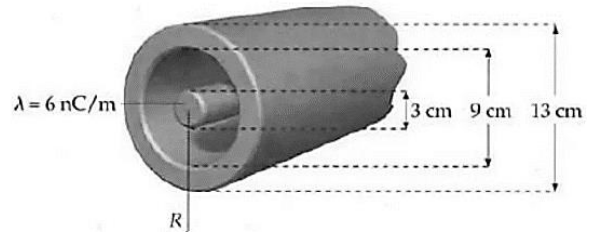
b) $0 = \sigma_1 * R_1 + \sigma_2 * R_2 ; \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = -\frac{R_1}{R_2} \quad \text{El campo entre cortezas: } E = \frac{\sigma_1 * R_1}{\epsilon_0 * r}$



17. La figura muestra una porción de un cable concéntrico infinitamente largo en sección transversal. El conductor interno posee una carga de 6 nC/m; el conductor externo está descargado.

a) Determinar el campo eléctrico para todos los valores de r , en donde r es la distancia desde el eje del sistema cilíndrico.

b) ¿Cuáles son las densidades superficiales de carga sobre las superficies interior y exterior del conductor externo?



a) $r \leq 1,5 \text{ cm} : E = 0$, al ser conductor y estar toda la carga sobre la superficie exterior. $1,5 < r < 4,5 \text{ cm}$:

Considerando superficie esférica, en su cara lateral, tendremos: $2 * \pi * r * L * E = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda * L}{\epsilon_0} = \frac{2 * \pi * R_1 * L * \sigma}{\epsilon_0}$

$$E = \frac{2 * \pi * R_1 * L * \sigma}{\epsilon_0 * 2 * \pi * r * L} = \frac{R_1 * \sigma}{\epsilon_0 * r} = \frac{(\lambda * L)}{2 * \pi * \epsilon_0 * r * L} = \frac{\lambda}{2 * \pi * \epsilon_0 * r} = \frac{2 * k * \lambda}{r}$$

$$E(r < 1,5 \leq 4,5 \text{ cm}) = \frac{2 * 8,99 * 10^9 * 6 * 10^{-9}}{r} = \frac{108}{r}$$

$4,5 \leq r \leq 6,5 \text{ cm} : \text{Estamos en un conductor en equilibrio, } E = 0.$

$6,5 \text{ cm} < r$: En la cara interior del conductor de mayor radio se induce una carga igual y de signo contrario a la del conductor interior, en la cara exterior tendremos una

carga: $Q = 2 * \pi * R_2 * L * \sigma_2$

Utilizando el valor calculado en el apartado (b):

$$E(6,5 \text{ cm} < r) = \frac{R_2 * \sigma_2}{\epsilon_0 * r} = \frac{0,065 * (-2,12 * 10^{-8})}{8,85 * 10^{-12} * r} = -\frac{156}{r}$$

b) La carga interior del conductor externo se carga por inducción con una carga negativa, la superficie exterior se carga con la misma carga, pero positiva:

$$\sigma_1 = \frac{\lambda_1}{2 * \pi * R_1} = \frac{6 * 10^{-9}}{2 * \pi * 0,045} = 2,12 * 10^{-8} \text{ C/m}^2$$

La densidad en la capa exterior será la misma, pero negativa:

$$\sigma_2 = -2,12 * 10^{-8} \text{ C/m}^2$$

18. Una corteza cilíndrica no conductora, gruesa e infinitamente larga, de radio interior a y radio exterior b , posee una densidad de carga volúmica uniforme ρ . Determinar el campo eléctrico en todos sus puntos.

Para $r < a$: $Q_{int} = 0 \quad E = 0.$

Para $a < r < b$: $dQ_{int} = \rho(r) * dV = \rho * 2 * \pi * r * dr * L$

$$Q_{int} = L * 2 * \pi * \rho * \int_a^r r * dr = L * 2 * \pi * \rho * \left(\frac{r^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right) = L * \pi * \rho * (r^2 - a^2)$$

$$E = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0 * 2 * \pi * r * L} = \frac{L * \pi * \rho * (r^2 - a^2)}{\epsilon_0 * 2 * \pi * r * L} = \frac{\rho * (r^2 - a^2)}{2 * \epsilon_0 * r}$$

Para $r > b$: $Q_{int} = L * 2 * \pi * \rho * \int_a^b r * dr = L * 2 * \pi * \rho * \left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right) = L * \pi * \rho * (b^2 - a^2)$

$$E = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0 * 2 * \pi * r * L} = \frac{L * \pi * \rho * (b^2 - a^2)}{\epsilon_0 * 2 * \pi * r * L} = \frac{\rho * (b^2 - a^2)}{2 * \epsilon_0 * r}$$