Función de varias variables

Dominio:

Ejemplo 1: Calcula el dominio de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

Para que exista: $9 - x^2 - y^2 \geq 0 \rightarrow 9 \geq x^2 + y^2$ →si: $9 = x^2 + y^2$ equivale a la ec. de una circunferencia de radio 3 y centro en 0,0 o del tipo: $ax^2+by^2-r^2 = 0$ que es la frontera.

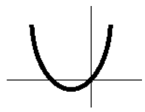
Luego tenemos que probar un punto para saber si el área es interior o exterior.

Ejemplo 2: Calcula el dominio de $g(x, y) = \ln(x + y)$

Para que exista: $x - y > 0 \ \rightarrow y > -x \quad Dom\ (x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y > -x$

Ejemplo 3: Calcula el dominio de $g(x, y) = \frac{1}{x + x^2 - y}$, represéntala gráficamente. Estudia el límite cuando tiende a los puntos pertenecientes de la frontera del dominio.

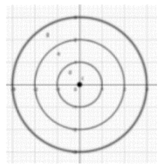
Para que exista: $x + x^2 - y \neq 0 \ \rightarrow y = x + x^2$ es una parábola: $Dom\ (x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y \neq x + x^2$



Límites laterales en la frontera: $\lim\limits_{(x,y)\to\delta+} \frac{1}{0+} = +\infty$; $\lim\limits_{(x,y)\to\delta+} \frac{1}{0-} = -\infty$

Curvas de nivel.

Damos valores a la z para obtener diferentes rodajas en altura.

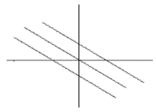


Ejemplo 1: $z = f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$;

como: $x^2 + y^2 = r^2$ es la ec. de una circunferencia ; si z = k: $x^2 + y^2 = 9 - k$

Para *k=1*: $x^2 + y^2 = 9$ → circuf. de radio 3 ; Para *k=2*: $x^2 + y^2 = 8$ → circuf. de radio 2,82

Ejemplo 2: $z = 6 - 3x - 2y$ dibuja las curvas de nivel para k=-6, 0, 6



$y = -\frac{3}{2}x + \frac{k-6}{3}$; si k= 0: $y = -\frac{3}{2}x + 3$; si k=6: $y = -\frac{3}{2}x$

Ejemplo 3: Dada la función $f(x, y) = \sqrt{36 - 9x^4 - 4y^2}$

a) Determinar su dominio b) Determina las curvas de nivel para C=0, C=6 i C=8

a) $Dom\ (x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 36 - 9x^4 - 4y^2 \geq 0$ que corresponde a la elipse: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1$

b) $z = \sqrt{36 - 9x^4 - 4y^2}$ → Para C = 0 : $\sqrt{36 - 9x^4 - 4y^2} = 0 \rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

Para C = 1: $\sqrt{36 - 9x^4 - 4y^2} = 6 \rightarrow 9x^4 - 4y^2 = 0$ → (x,y)=(0,0)

Límites en varias variables.

Límite de un campo escalar:

- Límite en un campo escalar refleja la idea de proximidad en el conjunto R al espacio R^n . Para ello se introduce la definición de *bola abierta* que equivale al concepto de entorno de un punto y de frontera.

  En condiciones normales el cálculo de límites de campos escalares se hace sustituyendo el valor x en la función f (x), pero cuando se producen indeterminaciones es necesario estudiar el límite con más detalle para determinar su naturaleza.

Métodos en las indeterminaciones:

Utilizando factorización:

Ejemplo: Calcular el límite de la función $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-4)} \frac{x+4}{x^2y - xy + x^2 - 4x} = \frac{0}{0} \rightarrow Indet$

Factorizando: $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-4)} \frac{x+4}{x^2y - xy + x^2 - 4x} = \lim\limits_{(x)\to(2)} \frac{\cancel{x+4}}{x(\cancel{x+4})(x-1)} = \lim\limits_{(x)\to(2)} \frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{2}$

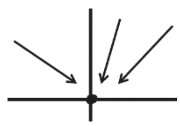
(o podemos sustituir una variable y repetir el límite, si es necesario usar L'Hopital)

Ejemplos propuestos: $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-y^2}{x-y}$ *Sol: 2* ; $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-1)} \frac{x^3+8y^3}{x+2y}$ *Sol: 12*

Existencia del límite en varias variables:

Si los límites laterales son diferentes cuando nos aproximamos por trayectorias diferentes→ el límite no existe.

Ejemplo: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-4y^2}{x^2+2y^2}$



- Si nos aproximamos por la recta *y = x*: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-4x^2}{x^2+2x^2} = -\frac{4}{3}$
- Si nos aproximamos por la recta *y = 2x*: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-16x^2}{x^2+8x^2} = -\frac{16}{9}$

- En general si nos aproximamos por la recta *y = mx*: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-4(mx)^2}{x^2+2(mx)^2} = \frac{-4m^2}{1+2m^2}$ → El valor depende de m. Si da valores diferentes → el límite no existe.

Límites iterados: En un campo escalar de dos variables, cuando (x,y) tiende a (0 0) se definen los límites iterados como:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x) = \lim_{y\to b} \left(\lim_{x\to a} f(x)\right) = \lim_{y\to b} \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)$$

Entonces, si la función f (x, y) tiene límite L, cuando (x,y) tiende a (0 0), ambos límites iterados existen.

Ejemplo: Calcular el límite de la función $z = \frac{5x^2y}{x^2+y^2}$ en los puntos (1,2) y (0,0):

- en (1,2): $\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{5x^2y}{x^2-y^2} = \frac{5\cdot1\cdot2}{1+4} = 2$
- en (0,0) : $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2y}{x^2+y^2} = \frac{0\cdot0\cdot0}{0+0}$ (indeterminación).

Utilizando los límites iterados: $\lim_{x\to0}(\lim_{y\to0} \frac{5x^2y}{x^2+y^2}) = \lim_{x\to0} \frac{0}{x^2+0} = 0$, e igualmente, $\lim_{y\to0}(\lim_{x\to0} \frac{5x^2y}{x^2+y^2}) = 0$

Para poder demostrar que 0 es el valor del límite cuando (x, y) → (0,0) hay que poder encontrar un valor δ > 0 de tal forma que cuando se tenga la acotación (|| x, y) − ||(0,0) < δ

Técnica del paso a polares:

- Si nos acercamos a x,y →(0,0) cambio a polares: *x = r·cos θ ; y = r·sen θ*
- Si nos acercamos a x,y →(a,b) cambio a polares: *x = a + r·cos θ ; y = b + r·sen θ*

Ejemplos:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{r\to0} \frac{5r^3\cos^2(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)}{r^2(\cos^2(\theta)+\mathrm{sen}^2(\theta))} = \lim_{r\to0} 5r\cos^2(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)$$

Teniendo en cuenta que cos(θ) sen(θ) está acotado, se desprende que este límite es 0

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{r\to0} \frac{r^2\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)}{r^2(\cos^2(\theta)+\mathrm{sen}^2(\theta))} = \lim_{r\to0} \cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)$$

Al desaparecer r, si sólo depende de θ y, por lo tanto, este límite no existe.

Límite de un campo vectorial.

Existirá el límite de $\vec{f}\,(\vec{x})$ cuando $\vec{x} \to \vec{x}_0$ si existe el límite de cada una de sus componentes (cada componente es un campo escalar).

Continuidad de funciones de varias variables.

Continuidad de campos escalares. Son necesarias tres cosas:

a) La existencia de lim ($f\ (\vec{x})$) =L.

b) Que la función $f\ (\vec{x})$ esté definida en x ∈ D

c) Que ambos valores sean iguales.

Si alguna de las tres condiciones no se cumple la función f (x) es discontinua.
La discontinuidad de una función en un punto puede ser de dos tipos:

1. Discontinuidad esencial. Cuando no existe el límite y no hay nada que hacer.
2. Discontinuidad evitable. Cuando existiendo el límite la función no está definida o su valor no coincide con dicho límite (se puede arreglar).

Ejemplo 1 : La función $f(x,y) = \frac{5x^2y}{x^2+y^2}$ es continua en todo punto excepto en (0,0) donde no está definida pero sí tiene límite. Se trata, por tanto, de una discontinuidad evitable. Por consiguiente, se puede reescribir la función para que sea continua:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{5x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Ejemplo 2: La función $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ es continua en todos los puntos (x, y) ∈ R^2 excepto en el punto (x, y) = (0,0)

Donde no existe el límite cuando x,y →(0,0). Entonces es discontinuidad esencial y no es posible redefinir la función.

Derivadas parciales:

En una función multivariable, como $f(x, y) = x^2y$

Para calcular las derivadas parciales, considerar las otras variables como constantes: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2$

Vector gradiente:

Es el vector conjunto de las derivadas parciales: $\vec{\nabla} = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \ldots\right]$ ó $\vec{\nabla} = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\right]$

Matriz Jacobiana

Es la matriz formada por las derivadas parciales de primer orden. El gradiente sería la matriz fila de la Jacobiana

Ejemplo Determinar la Jacobiana en el punto (1,2) de la función: *f(x,y) = (x^4+3y^2x , $5y^2-2xy+1$)*

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x^3+3y^2 & 6yx \\ -2y & 10y-2x \end{pmatrix} J_f(1,2) = \begin{pmatrix} 4\cdot 1^3 + 3\cdot 2^2 & 6\cdot 2\cdot 1 \\ -2\cdot 2 & 10\cdot 2 - 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{16} & \mathbf{12} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{18} \end{pmatrix}$$

Matriz Hessiana

La matriz Hessiana es una matriz cuadrada compuesta por las segundas derivadas parciales.

Por tanto, siempre será una matriz *cuadrada* y según, el teorema de Schwarz, *simétrica*.

Ejemplo de cómo calcular la matriz Hessiana

Ejemplo Hessiana de 2×2: Calcula la matriz *Hessiana* en el punto (1,0) de la siguiente función:

$$f(x,y) = y^4 + x^3 + 3x^2 + 4y^2 - 4xy - 5y + 8$$

Primero tenemos que calcular las derivadas parciales de primer orden:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 6x - 4y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 + 8y - 4x - 5$$

Luego calculamos todas las derivadas parciales de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x + 6 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 + 8 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -4$$

Ahora ya podemos rellenar la matriz Hessiana a partir de la fórmula para matrices 2×2

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} \qquad H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x+6 & -4 \\ -4 & 12y^2+8 \end{pmatrix}$$

en el punto (1,0) $H_f(1,0) = \begin{pmatrix} 6(1)+6 & -4 \\ -4 & 12(0)^2+8 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{H_f(1,0)} = \begin{pmatrix} \mathbf{12} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{8} \end{pmatrix}$

Plano tangente a una función

Se obtiene de la ecuación punto-pendientes: $\boldsymbol{(z - z_o) = \frac{\delta f}{\delta x}(x - x_o) + \frac{\delta f}{\delta y}(y - y_o)}$

Ejemplo: Hallar la ecuación del plano tangente a: $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy$ *en el punto (-2,3)*

- Punto en z: *z = (-2)2+32 -2(-2)3= 25* → P(-2, 3, 25)
- Pendientes : $\frac{\delta f}{\delta x} = 2x - 2y \rightarrow \frac{\delta f}{\delta x}(-2,3) = -10$; $\frac{\delta f}{\delta y} = 2y - 2x \rightarrow \frac{\delta f}{\delta y}(-2,3) = +10$
- Sustituir en la ecuación: $(z - 25) = -10\,(x+2) + 10\,(y-3)$
- Desarrollar e igualar a cero pare tener la general o implícita: $\boxed{\mathbf{-10x + 10y - z - 25 = 0}}$

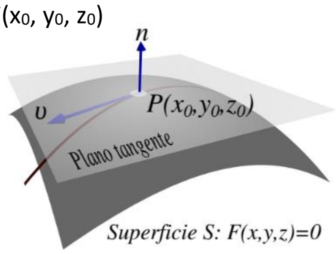
Ejercicio 1: Halle la ecuación del plano tangente a la superficie definida por la función

$f(x,y) = 2x^2 - 3xy + 8y2 + 2x - 4y + 4$ en el punto (2,-1) *Soluc: z= 13x – 26y -18*

Ejercicio 2: Halle la ecuación del plano tangente a la superficie definida por la función

$f(x,y) = sen(2x)cos(3y)$ en el punto (π/3,π/4). Soluc: $z = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{3\sqrt{6}}{4}y - \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\pi\sqrt{2}}{6} + \frac{3\pi\sqrt{6}}{16}$

Recta normal: Recta normal a S en P es la recta que pasa por P y tiene la dirección de $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$



Las ecuaciones paramétricas de la recta normal a S en P:

$$\begin{cases} x = x_o + \partial F(x_o, y_o, z_o)\ \partial x \cdot t \\ y = y_o + \partial F(x_o, y_o, z_o)\ \partial y \cdot t \\ z = z_o + \partial F(x_o, y_o, z_o)\ \partial z \cdot t \end{cases}$$

Ejemplo: Encontrar la ecuación del plano tangente y las paramétricas de la recta normal a la superficie: $x^2 + y^2 - z^2 = 64$ en el punto (8,8,8).

Soluc: $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ → ∇f(x, y, z) = (2x, 2y, -2z) → ∇f(8, 8, 8) = (16, 16, -16)=(a,b,c)

Ec del plano tangente en forma general: ax +by + cz +d =0 →$a(x-x_o)+b(y-y_o)+c(z-z_o)=0$

16(x-8)+16(y-8)-16(z-8)=0 → $\boldsymbol{x + y - z = 0}$

Recta normal: paramétricas: $\begin{cases} x = 8 + 16 \cdot t \\ y = 8 + 16 \cdot t \\ z = 8 + 16 \cdot t \end{cases}$

Derivada direccional

Es la pendiente en la dirección que indique un vector: $D_u = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\ \vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath}\right] \cdot \vec{u}$

o también: $Du = \frac{\partial f}{\partial x}\ \cos\theta\ + \frac{\partial f}{\partial y}\ \text{sen}\ \theta$

Para funciones de tres variables: $D_u = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\ \vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath} + + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\right] \cdot \vec{u}$

Máxima pendiente: coincide con el módulo del vector gradiente en el punto P: $|\overrightarrow{\nabla}| = \sqrt{(\frac{\partial fpx}{\partial x})^2 + (\frac{\partial fpy}{\partial y})^2}$

<u>Propiedades:</u>

Si ∇f(x, y) = 0, entonces Duf(x, y) = 0

Dirección de máximo incremento de f: valor máximo de Duf(x, y) es ||∇f(x, y)||

Dirección de mínimo incremento de f: valor mínimo de Duf(x, y) es −||∇f(x, y)||

<u>Ejemplo 1</u>: Derivada direccional de: $f(x, y) = x^2 - 4xy$ del punto P(1,2) al punto Q(2,-5):

El vector es: $\overrightarrow{PQ} = (2-1)i + (5-2)j = \vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$, su módulo es: $\sqrt{10}$ y su vector unitario es: $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{10}}\vec{\imath} + \frac{3}{\sqrt{10}}\vec{\jmath}$

$\vec{\nabla} = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\ \vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath}\right] = (2x - 4y)i - 4x\ j \rightarrow (en\ el\ punto\ (1{,}2){:}\ \ (-6i - 4j) \rightarrow (-6\vec{\imath} - 4\vec{\jmath}) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\vec{\imath} + \frac{3}{\sqrt{10}}\vec{\jmath}\right) = -5{,}68$

<u>Ejemplo 2:</u> Sea: $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

(a) Encontrar el <u>vector gradiente</u> de f el punto P (4,-3). en

(b) Calcular la <u>derivada direccional</u> de f en la dirección del Vector del punto P(4,-3) al punto Q(1,0)

Sol:

a) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-1/2} \cdot (2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ → En el punto (4,3): $\frac{\partial f}{\partial x}(P) = \frac{4}{\sqrt{16+9}} = \frac{4}{5}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-1/2} \cdot (2y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ → En el punto (4,3): $\frac{\partial f}{\partial y}(P) = \frac{4}{\sqrt{16+9}} = \frac{-3}{5}$

→ Vector gradiente: $\vec{\nabla} = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\ \vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath}\right] = \ (en\ el\ punto\ (4{,}3){:}\ \ (\frac{4}{5}i - \frac{3}{5}j\ )$

b) Vector $\overrightarrow{PQ}$: (1-4, 0+3) = (-3,3). Vector unitario de $\overrightarrow{PQ}$: $u\vec{u} = \frac{-3}{\sqrt{3^2+3^2}}i + \frac{3}{\sqrt{3^2+3^2}}j = \frac{-1}{\sqrt{2}}i + \frac{1}{\sqrt{2}}j$

Derivada direccional: $D_u = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \left(\frac{4}{5}i - \frac{3}{5}j\right) \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}i + \frac{1}{\sqrt{2}}j\right) = \left(\frac{-4}{5\sqrt{2}} + \frac{-3}{5\sqrt{2}}\right) = -\frac{7}{5\sqrt{2}}$

<u>Ejemplo 3</u>: Hallar una *derivada direccional <u>máxima</u>* de $f(x, y) = 3x^2 - 4xy + 2y^2$ en (-2,3):

1º $\vec{\nabla} = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\ \vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath}\right] = (6x - 4y)i - (-4x + 4y)j$ → 2º $\vec{\nabla}(-2{,}3) = -24i + 20j$

3º $|\vec{\nabla}(-2{,}3)| = \sqrt{24^2 + 20^2} = \boldsymbol{4\sqrt{61}}$ y su vector unitario: $\vec{u} = \frac{-24i}{4\sqrt{61}} + \frac{20j}{4\sqrt{61}}$

Forma cuadrática de una matriz

Es un polinomio de <u>2º grado</u> con *n* variables. $a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1n}x_1x_n + \ldots + a_{nn}x_n^2$

<u>Matriz asociada a una forma cuadrática</u>:

Los coeficientes de los cuadrados en el polinomio son los elementos de la diagonal de la matriz asociada.

$$(x_1 \ldots x_n) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \\ x_n \end{pmatrix}$$

El elemento a_{ij} multiplicará a x_i y a x_j, y por la propiedad conmutativa será dos veces por x_ix_j

<u>Ejemplo</u>: Deducir la forma cuadrática asociada a la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} & x & y & z \\ \hline x & 1 & 1 & 2 \\ y & 1 & -1 & 3 \\ z & 2 & 3 & 0 \end{array} = 1x^2 - 1y^2 + 0z^2 + (1+1)xy + (2+2)xz + (3+3)yz = x^2 - y^2 + 2xy + 4xz + 6yz$$

Deducir la matriz asociada a la forma cuadrática a partir del polinomio: bastará <u>dividir por 2</u> el coeficiente asociado a cada x_ix_j y poner el resultado en la fila i, columna y en la fila j, columna i.

$$3x^2 - y^2 + 2z^2 + 5xy - 6xz \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 5/2 & -3 \\ 5/2 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Valores propios y Vectores propios de una matriz

Los vectores propios (o autovectores) son los vectores no nulos de una aplicación lineal que, cuando son transformados, dan lugar a un múltiplo escalar llamado valor propio o autovalor. $Av = \lambda v$

*<u>Para hallar los **valores propios**</u>*: Se calcula la ecuación característica de la matriz resolviendo el determinante y se hallan las raíces del polinomio obtenido. Estas raíces son los valores propios de la matriz.

<u>Ejemplo de cálculo de los valores</u>: Halla los autovalores de la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

En primer lugar, tenemos que hallar la ecuación característica de la matriz. Y, para ello, se debe resolver el siguiente determinante y luego calculamos las raíces del polinomio obtenido igualando a 0:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \qquad \lambda = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{+3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 2 \end{cases}$$

Clasificación de una forma cuadrática

- Q es una forma cuadrática definida positiva si $Q(x) > 0 \quad \forall x \in \Re^n \setminus \{0\}$
- Q es una forma cuadrática definida negativa si $Q(x) < 0 \quad \forall x \in \Re^n \setminus \{0\}$
- Q es una forma cuadrática semidefinida positiva si $Q(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Re^n$
- Q es una forma cuadrática semidefinida negativa si $Q(x) \leq 0 \quad \forall x \in \Re^n$
- Q es una forma cuadrática indefinida si $Q(x_1) < 0 \quad y \quad Q(x_2) > 0$

Ejemplos:

- $3x^2+5x^2+z^2$: definida positiva , puesto que en su expresión sólo aparecen cuadrados con coeficientes positivos.
- $-x^2-2y^2-z^2$: definida negativa , puesto que en su expresión sólo aparecen cuadrados con coeficientes negativos.
- $X^2-2y^2+z^2$: indefinida , los coeficientes son de distinto signo.

Método de clasificación por los valores propios:

1) Q definida positiva (d.p.): $\lambda_i>0$	2) Q semidefinida positiva (s.d.p.): $\lambda_i>=0$
3) Q definida negativa (d.n.): $\lambda_i<0$	4) Q semidefinida negativa (s.d.n.): $\lambda_i<=0$
5) Q indefinida: $\lambda_i>0$ $\lambda_j>0$	

Ejemplo 2:

$3x^2+3y^2+2z^2-2xy-2yx \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda = 2\,;\ \lambda = 2\,;\ \lambda = 4$

Todos los valores propios $\lambda_i > 0$ → definida positiva.

Optimización

Busca los valores de la función máximos o mínimos. Diversas técnicas:

1. Optimización sin restricciones
2. Optimización con restricciones de igualdad (Lagrange)
3. Optimización con restricciones de desigualdad (Algoritmo Simplex)

Optimización sin restricciones

f tiene un óptimo local si el vector gradiente de todas las derivadas parciales son cero: $\nabla f(x_0) = 0$.
Si el gradiente es cero, sólo puede tratarse de un máximo, un mínimo o un punto de silla.

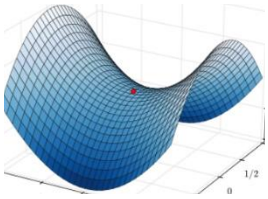
<u>*Ejemplo*</u>: Encuentra el punto óptimo de $f(x) = x^2+y^2+y-1$; $\nabla = \mathbf{0}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0 \rightarrow x = \mathbf{0} \;;\quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y+1 = 0 \rightarrow y = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \Rightarrow M(0,-\frac{1}{2})$$

<u>*Punto de silla*</u>: Punto donde la pendiente es cero, pero no se trata de un extremo local.
La primera derivada es nula, mientras que el signo de la segunda derivada depende de la dirección en que se calcule.

<u>*Ejemplo*</u>: Dada la función: $z = x^2 - y^2$

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x = 0 \longrightarrow x = 0 & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 \text{ mínimo relativo.} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -2y = 0 \longrightarrow y = 0 & \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2 \text{ máximo relativo} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \mathbf{x = 0} \\ \mathbf{y = 0}, \end{array} \text{ es un punto de silla}$$



Determinar el tipo según la matriz Hessiana (matriz de las derivadas segundas)

Caso de dos variables o matriz hessiana 2 x 2:

- Si el Determinante(Hessiana) > 0 → Si $f_{xx} > 0$ → Mínimo ; Si $f_{xx} < 0$ → Máximo
- Si el Determinante(Hessiana) < 0 Punto de silla
- Si el Determinante(Hessiana) = 0 No concluyente

Caso de tres o más variables, matriz hessiana 3 x 3:

- Si todos los Determ. (Hessiana) > 0 → Mínimo local
- Si los determ. tienen signo alterno (comenzando negativo), →Máximo local
- Si no cumple uno de los casos anteriores: No es concluyente

Clasificación de los puntos críticos según el Discriminante:	O según su matriz Hessiana:
• Si D > 0 y $f_{xx}(a,b) > 0$, → (a,b) es un mínimo local. • Si D > 0 y $f_{xx}(a,b) < 0$, → (a,b) es un máximo local. • Si D < 0, → (a,b) es un punto de silla. • Si D=0 → el criterio no es concluyente.	• Hf Definida positiva: mínimo • Hf Definida negativa: máximo • Hf indefinida: punto de silla • Hf semidefinida: No concluyente

<u>*Ejercicio 1*</u>: Clasificar los puntos críticos de ***f(x,y) = 2x² + 2y² - x⁴ - y⁴ + 3.***

1º Derivadas primeras = 0 para obtener los puntos críticos:

$$\left.\begin{array}{l} f_x = 4x - 4x^3 = 0 \\ f_y = 4y - 4y^3 = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 4x(1-x^2) = 0 \\ 4y(1-y^2) = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 0 \text{ ó } (1-x^2) = 0 \\ y = 0 \text{ ó } (1-y^2) = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 0,\ x = 1,\ x = -1 \\ y = 0,\ y = 1,\ y = -1 \end{array}\right\}$$

Combinado estos valores: (0,0), (0,1), (0,-1), (1,0), (-1,0), (1,1), (1,-1), (-1,1), (-1,-1)

2º Calculamos la matriz hessiana, mediante las derivadas parciales de segundo orden: $\begin{pmatrix} 4-12x^2 & 0 \\ 0 & 4-12y^2 \end{pmatrix}$

Su determinante hessiano: $D = (4 - 12x^2)\cdot(4 - 12y^2)$

<u>Punto D(x,y) Tipo de punto crítico</u>

- Punto (0,0) D(0,0) = 16 > 0 y fxx(0,0) = 4 > 0 (0,0) mínimo local
- Punto (0,1) D(0,1) = -32 < 0 (0,1) punto de silla
- Punto (0,-1) D(0,-1) = -32 < 0 (0,-1) punto de silla
- Punto (1,0) D(1,0) = -32 < 0 (1,0) punto de silla
- Punto (-1,0) D(-1,0) = -32 < 0 (-1,0) punto de silla
- Punto (1,1) D(1,1) = 64 > 0 y fxx(1,1) = -8 < 0 (1,1) máximo local
- Punto (1,-1) D(1,-1) = 64 > 0 y fxx(1,-1) = -8 < 0 (-1,1) máximo local
- Punto (-1,1) D(-1,1) = 64 > 0 y fxx(-1,1)= -8 < 0 (-1,1) máximo local

<u>*Ejercicio 2*</u>: Determina y clasifica los puntos críticos de la función ***f(x,y) = x³ + 3xy² - 3y² - 3x² + 11***

$$\left.\begin{array}{l} f_x=3x^2+3y^2-6x=0 \\ f_y=6xy-6y=0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 3x^2+3y^2-6x=0 \\ 6y(x-1)=0 \end{array}\right\} \; y=0 \text{ ó } (x-1)=0 \Longrightarrow y=0 \text{ ó } x=1$$

- Si y=0, sustituimos en la primera ecuación de modo que:

$$\left.3x^2+3\cdot 0^2-6x=0,\; 3x^2-6x=0 \Longrightarrow 3_x(x-2)=0 \Longrightarrow x=0 \text{ ó } x=2\right\} \; (0,0),(2,0)$$

- Si x=1, sustituimos en la primera ecuación de modo que:

$$\left.3\cdot 1^2+3y^2-6\cdot 1=0,\; 3y^2=3 \Longrightarrow y^2=1 \Longrightarrow y=1 \text{ ó } y=-1\right\} \; (1,1),(1,-1)$$

obtenido cuatro puntos críticos (0,0), (2,0), (1,1), (1,-1). la matriz hessiana $H = \begin{pmatrix} 6x-6 & 6y \\ 6y & 6x-6 \end{pmatrix}$

Puntos:

a) (0,0). D(0,0) = 36 > 0 y fxx(0,0) = -6 < 0 → (0,0) es un máximo local.

b) (2,0). D(2,0) = 36 > 0 y fxx(0,0) = 6 > 0 → (2,0) es un mínimo local.

c) (1,1). D(1,1) = -36 < 0 → (1,1) es un punto de silla.

d) (1,-1). D(1,-1) = -36 < 0 → (1,-1) es un punto de silla.

Teorema local-global

- Si *f* es convexa y x_0 mínimo local → x_0 mínimo global
- Si *f* es cóncava y x_0 máximo local → x_0 máximo global

<u>*Ejercicio URV Ing*</u>: Sea la función $\boldsymbol{f(x,y) = x^3 - xy^2 - 3x^2 + y^2}$

a) Máxima pendiente en (0,1) b) Derivada direccional en la dirección del vector (3i+4j)

c) Punto críticos y clasificar

Elasticidad:

Ejemplo: Calcular las elasticidades precio y cruzada de la demanda con la siguiente información:

$Qa = 250 + 0.3P_b - 5(P_a)^2$ cuando el precio Pb = 50€ y precio Pa = 6 €

1º: determino el valor de Qa = 250 +0.3(50)-5(6)² = 85 €

2º calculo las elasticidad en Pb:

$$EP_b = \frac{\partial Q_a}{\partial P_b} * \frac{P_b}{Q_a} = 0.3\left(\frac{50}{85}\right) = \frac{15}{85} = \boxed{0.17}$$

Cuando el precio del bien b sube un 1% al demanda del bien "a" aumenta un 0.17%, son bienes sustitutos

3º calculo las elasticidad en Pa:

$$EP_a = \frac{\partial Q_a}{\partial P_a} * \frac{P_a}{Q_a} = -10P_a\left(\frac{6}{85}\right) = -10(6)\left(\frac{6}{85}\right) = -\frac{360}{85} = -4.23$$

Cuando el precio del bien "a" sube un 1% la demanda del bien "a" disminuye en 4.23% es una demanda elástica

Optimización con restricciones de igualdad (Método Lagrange)

Hay una función objetivo y unas restricciones. El método se basa en incorporar las restricciones *G(x,y)* a la función *f(x,y)* usando una variable más que es el multiplicador de Lagrange λ, quedando la función: $L(x,\lambda) = f(x) + \lambda(b - g(x))$

Con el sistema: $\begin{cases} \nabla(f(x,y) - \lambda g(x,y)) = 0 \\ G(x,y) = 0 \end{cases}$ obtenemos los extremos intersección de ambas o frontera.

Teorema sensibilitat: El multiplicador de Lagrange mesura la tassa de variació de la funció objectiu en el punt.

Ejemplo: Hallar los extremos de la función $f(x,y) = x+2y$ con la condición $x^2+y^2 = 5$:

1º Hallamos la función de Lagrange (función - λ·condición): $F(x,y,\lambda) = x+2y + \lambda(x^2+y^2-5)$

2º Hallamos los puntos críticos (en función de λ) $\nabla(F(x,y) - \lambda G(x,y)) = 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \\ x^2+y^2-5=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1+2\lambda x = 0 \\ 2+2\lambda y = 0 \\ x^2+y^2-5=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2\lambda} \\ y = \frac{-2}{2\lambda} \\ \left(-\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{-1}{\lambda}\right)^2 - 5 = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \pm\frac{1}{2}$$

Si $\lambda = 1/2$: Punto $(-1,-2)$

Si $\lambda = -1/2$: Punto $(1,2)$

3º Hallamos las matrices hessiana $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2\lambda$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2\lambda$, $H(-1,-2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (def. pos.). $H(1,2) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ (def. neg.)

4º En (-1,-2): Definida positiva porque Det(H_{2x2}) es + y la *Fxx* + → mínimo local condicionado

En (1 , 2): Definida negativa porque Det (H_{2x2}) es + y la *Fxx* — → máximo local condicionado

Ejercicio 1:

$$\left.\begin{array}{l} \min\ x^2+y^2 \\ x+y=3 \end{array}\right\} L(x,y;\lambda) = x^2+y^2+\lambda(3-x-y) \quad \begin{array}{l} \nabla_{\bar{x}} L(x,y;\lambda) = (2x-\lambda, 2y-\lambda) = (0,0) \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = 3-x-y=0 \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x-\lambda=0 \\ 2y-\lambda=0 \\ x+y=3 \end{array}\right\} \Rightarrow x=\frac{3}{2},\ y=\frac{3}{2},\ \lambda=3$$

Det(Hessiana): $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$; Fxx= 3 – 3 = 0 → Definida positiva → Mínimo condicionado en $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$

Ejercicio 2:

$$\left.\begin{array}{l} opt\ xy \\ x+y=1 \end{array}\right\} L(x,y;\lambda) = xy+\lambda(1-x-y) \quad \left.\begin{array}{l} \nabla_{\bar{x}} L(x,y;\lambda) = (y-\lambda,\ x-\lambda) = (0,0) \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = 1-x-y=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y-\lambda=0 \\ x-\lambda=0 \\ x+y=1 \end{array} \quad x = ½, y=½\ \lambda=½$$

Condición suficiente: $H_{\bar{x}} L(x,y;\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ indefinida $\nabla g(x,y) = (1,1)$ $(1,1)\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \Delta x + \Delta y = 0 \quad \Delta y = -\Delta x$

Entonces, $(\Delta x, -\Delta x)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta x \\ -\Delta x \end{pmatrix} = 2(\Delta x)(-\Delta x) = -2(\Delta x)^2 < 0$ $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ máximo condicionado o restringido

Ejercicio 3: ***f(x,y)= x^2+y^2*** *con restricción en* ***3x + 2y = 7***

1º L(x,y,z) = f(x,y) - λ(3x+2y-7) = x^2+y^2 + 3λx +2λy-7λ

2º f'x= 2x+3λ=0 → x= -3λ/2

f'y=2y+2λ=0 → y= -λ

f'λ = 3x +2y -7=0 → 3(-3λ/2)+2(-λ)-7=0 → Punto(21/13 , 14/13) ; λ=-14/21

f'' = fxx + fyy + 2 fxy si es >0 Mínimo local ; si es <0 Máximo local

f''xx= 2 f''yy=2 → f''= 2+2+0 = 4 → Mínimo local

Criterio Hessiano orlado (D): Si D>0 máximo local, si (D) <0 Mínimo local si (D)=0 No decide

Examen URV: Troba els extrems de la funció $f(x, y) = x^2 y^2 - 4x^2 - y^2$ en la regió $S = \{(x; y) \in R^2: x^2 + y^2 \leq 9\}$

- En el interior: ∇f = 0 → encontramos los puntos críticos: A(0; 0), B(1; 2), C(−1; 2), D(1; −2), E(−1; −2)
- En la frontera: $L(x, y, \lambda) = x^2 y^2 - 4x^2 - y^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 9)$
  $\nabla(f(x,y) - \lambda g(x,y)) = 0$ obtenemos los puntos: F(0; 3), G(0; −3), H(3; 0), I(−3; 0) y con λ = 2 : *J* $(\sqrt{3},\sqrt{6})$
- De las Hessianas obtenemos los valores: 0 ; -9 ; -36 ; 0
  A partir de la tabla vemos que el valor máximo se alcanza en los vértices A, J, K, L, M, (por simetría) mientras que el valor mínimo se alcanza en los vértices H e I.

Métodos para clasificar los puntos críticos en extremos condicionados por el método de Lagrange y su Hessiana:

Sustituimos los puntos críticos en la matriz Hessiana y evaluamos:

Criterio del Hessiano Orlado: El determinante Hessiano Limitado o Hessiano Orlado (D):

- Si D > 0 tiene un máximo local condicionado.
- Si D < 0 tiene un mínimo local condicionado.
- Si D = 0 entonces el criterio no decide

Criterio de los autovalores: Los autovalores de la Hessiana o valores propios proporcionan información sobre la concavidad o convexidad de la función y dan información sobre la naturaleza de los puntos críticos.

- Si todos los autovalores son positivos (def positiva) entonces el punto crítico es un mínimo local.
- Si todos los autovalores son negativos (def. negativa) entonces el punto crítico es un máximo local.
- Si los autovalores tienen signos mixtos (algunos positivos y algunos negativos), es un punto de silla.
- Si al menos un autovalor es cero, clasificación no concluyente por este método y se busca la pendiente mayor es decir: si los autovalores (diagonal principal) = 0 se mira la pendiente en la dirección factible del vector $\vec{v}$.

Pendiente direccional: $\nabla \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow Jac(x,y) \cdot \begin{pmatrix} v1 \\ v2 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow$ obtenemos (v_1 , v_2)

Si: $v^t \cdot Hes(L) \cdot v < 0 \rightarrow$máximo Si: $v^t \cdot Hes(L) \cdot v < 0 \rightarrow$mínimo

Criterio de la cota más alta/baja:

Es sustituir en f en los puntos obtenidos, y próximos. Si el valor es más grande será el máximo, y donde hallemos el menor, el mínimo.

Ejercicio 1 $f(x,y,z) = x + y + z \quad cond: \{xy + xz + yz = 75\}$

$L(x,y,z,\lambda) = x + y + z - \lambda(xy + xz + yz - 75)$

$\nabla f = \lambda \nabla g$ y $g(x,y) = 0$ $\rightarrow \begin{cases} 1-\lambda y-\lambda z=0 \\ 1-\lambda x-\lambda z=0 \\ 1-\lambda x-\lambda y=0 \\ -xy-xz-yz+75=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z=\frac{1}{2\lambda} \\ y=\frac{1}{2\lambda} \\ x=\frac{1}{2\lambda} \\ \lambda=\pm\sqrt{\frac{1}{100}}=\pm\frac{1}{10} \end{cases} \rightarrow$

Para λ=1/10:
Punto Crit.(5,5,5)

Para λ=-1/10:
Punto crit. (-5,-5,-5)

Hessiana: $\begin{pmatrix} 0 & -\lambda & -\lambda \\ -\lambda & 0 & -\lambda \\ -\lambda & -\lambda & 0 \end{pmatrix}$ Sustituyendo en los puntos:

H(5,5,5,1/10) = $\begin{pmatrix} 0 & -1/10 & -1/10 \\ -1/10 & 0 & -1/10 \\ -1/10 & -1/10 & 0 \end{pmatrix}$ →Indefinida ; H(-5,-5,-5,-1:(/10) = $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & 1/10 & 1/10 \\ 1/10 & \mathbf{0} & 1/10 \\ 1/10 & 1/10 & \mathbf{0} \end{pmatrix}$→ *Indefinida*

Como es indefinida, miramos la *pendiente direccional* en $xy + xz + yz$:

Para el punto (5,5,5) con λ=1/10: $f(5,5,5) \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \rightarrow (10,10,10) \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \rightarrow$ 10a + 10b +10c = 0 → a = -b-c

Δv= (-b-c, b, c) → (-b-c, b, c) → $(-b-c,b,c) \cdot HL_{(x,y,z)}\left(5,5,5,\frac{1}{10}\right)\begin{pmatrix} -b-c \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$$\overbrace{(-b-c,b,c)}^{\vec{v}^t} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & 0 & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix} \cdot \overset{\vec{v}}{\begin{pmatrix} -b-c \\ b \\ c \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10}(b+c) & \frac{1}{10}b & \frac{1}{10}c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -b-c \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{5}(b^2+c^2+bc) > 0$$

Como en el punto (5,5,5) → $v^t \cdot Hes(L) \cdot v < 0$ → es un **mínimo** condicionado

Repitiendo en el punto (-5,-5,-5) con λ=-1/10: obtendremos Δv >0 → es un **máximo** condicionado

<u>*Ejercicio 2*</u>: Hallar, si es posible, los extremos de $x+y$ sujeto a la condición $x^2 + y^2 = 1$

Derivadas parciales $\nabla f = \lambda \cdot \nabla g$ y $g(x,y) = 0$ → $\begin{cases} 1 &= \lambda 2x \\ 1 &= \lambda 2y \\ x^2+y^2 &= 1 \end{cases}$ → $P_1(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ y $P_2(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$

Hessiana: $\tilde{D}(x,y,\lambda) = \det \begin{pmatrix} 0 & -2x & -2y \\ -2x & -2\lambda & 0 \\ -2y & 0 & -2\lambda \end{pmatrix} = 8\lambda(x^2+y^2)$

Sustituyendo el punto P1: $\tilde{D}(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = 4\sqrt{2}$ y P2: $\tilde{D}(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = -4\sqrt{2}$

Luego, en P1 f tiene un máximo local condicionado y en P2 un mínimo local condicionado que además resultan absolutos.

<u>*Para encontrar los máximos y mínimos dentro de una región*</u>: Primero hay que substituir los puntos encontrados (x, y) sin λ en la Hessiana para saber el máximo o mínimo en el interior. Segundo hay que sustituir los puntos encontrados (x, y) con λ en la Hessiana para saber cuál es el máximo y mínimo de la frontera. Luego hay que ver comparar qué punto es mayor o menor que el del otro. Si los del interior o los de la frontera.

Exàmen URV Eng: Sigui $f : R^2 \to R$ la funció definida per ***f(x, y) = x² + y² + 2x − 2y + 2.***

(a) Calcula la derivada direccional de f en el punt P = (1, 0) en la direcció del vector (1,-1).

(b) Calcula els punts crítics de f en R 2 i determina la seva naturalesa.

(c) Calcula els extrems de f en el recinte D = {(x, y) ∈ R 2 **: x² + y² ≤ 4**}

Sol: a) $\nabla f = (2x + 2 ,\ 2y - 2)$; en el punt (1, 0): $\nabla f(1,0) = (4, -2)$

Derivada direccional en la direcció de v = (1, −1): $Dfv = (4,-2) \cdot \frac{(1,-1)}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$

b) $\nabla f = 0$ → Punt crític en (-1,1) ; Hessiana: $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} > 0$ → y $F''_{11} = 2$ → (−1, 1) es un mínim relatiu.

c) Pel mètode del multiplicador de *Lagrange*: $\begin{cases} 2x + 2 - 2\lambda x = 0 \\ 2y - 2 - 2\lambda y = 0 \end{cases} \to x = \frac{1}{\lambda - 1}$; $y = \frac{1}{1-\lambda}$

Substituint a l'equació: $0 = \left(\frac{1}{\lambda-1}\right)^2 + \left(\frac{1}{1-\lambda}\right)^2 + 2\frac{1}{\lambda-1} - 2\frac{1}{1-\lambda} + 2 \to \begin{cases} \lambda = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \lambda = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

Per a $\lambda = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$: x = √2 i y = − √2, amb f(√2, − √2) = 8 + 4√2 = 13,6

Per a $\lambda = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$: x = − √2 i y = √2, amb f(− √2, √2) = 8 − 4√2 = 2,34

Com que 13,6 > 2,34 , pel teorema de Weierstrass sabem que:

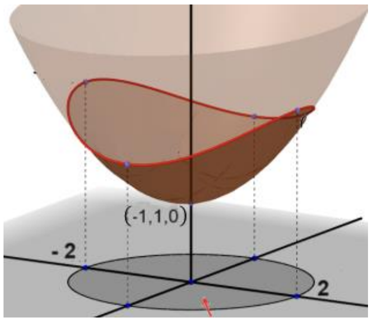
(√2, − √2) es un màxim de f en B
(− √2, √2) es un mínim de f en B

→ Aleshores tenim tres punts que poden ser extrems de f en D

Comparant els valors de f en aquests punts, veiem que:

$f(-1,1) = 0 < 2{,}34$ → és el mínim absolut

$f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 6 + 4\sqrt{2}$ es el màxim absolut



<u>***Ejercicio con 3 variables***</u>: Determinar los extremos de la función $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

sujetos a la restricción $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$.

Sol: Igualando a cero a todas sus derivadas primeras:

$$\begin{cases} L_x(x,y,z,\lambda) &= 2x - 2\lambda x = 0 \\ L_y(x,y,z,\lambda) &= 2y - 2\lambda\frac{y}{4} = 0 \\ L_z(x,y,z,\lambda) &= 2z - 2\lambda\frac{z}{9} = 0 \\ L_\lambda(x,y,z,\lambda) &= -\left(x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} - 1\right) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x(1-\lambda) = 0 & (1) \\ 2y(1 - \frac{\lambda}{4} = 0 & (2) \\ 2z(1 - \frac{\lambda}{9}) = 0 & (3) \\ x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1 & (4) \end{cases}$$

Obtenemos 6 vértices: $P_1(0,0,-3)$ $P_2(0,0,3)$ $P_3(0,-2,0)$ $P_4(0,2,0)$ $P_5(-1,0,0)$

Al estar trabajando en R³ no tenemos a mano una herramienta como el Hessiano Orlado para determinar esto. Entonces sólo resta evaluar a *f* en los puntos obtenidos, y donde obtengamos el valor más grande será el máximo, y donde hallemos el menor el mínimo.

Opción 2: Si $v^t \cdot Hes(L) \cdot v < 0$ →máximo Si $v^t \cdot Hes(L) \cdot v < 0$ →mínimo

Optimització lineal amb restriccions de desigualtat

Cuando tenemos una función objetivo y varias inecuaciones como restricciones. 2 métodos:

Método gráfico:

Ejemplo 1:

$$Max \quad 20x+15y$$
$$s.a.\begin{cases} x+2y \le 80 \\ 3x+2y \le 120 \end{cases}$$
$$x, y \ge 0$$

1º Dibujamos las ecuaciones de la rectas:

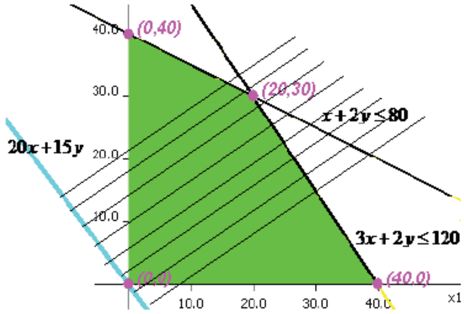
y=-x/2+40 y= -3x/2 + 60

2º Encontramos sus vértices:

Vertexs (a,b): (0,0) (40,0) (20,30) (0,40)

Valor $f(x,y)$: 0 800 850 600

3º Encontramos el máximo en (20,30)



También se puede encontrar el vértice con la derivada direccional que será máxima en la dirección del gradiente: $\nabla f(x_0) = 0$; (20,15) se busca la curva de nivel y se trazan perpendiculares.

L'algoritme del símplex

1. *Fase de iniciación*: Se transforma en la forma estándar o ampliada: Si el problema inicial es de minimización, cambiar de signo la función objetivo. Poner los términos independientes positivos y convertir en igualdades.
2. *Fase de iteración*: Se construye la tabla y se escoge el pivote. Se convierten el resto de los elementos de su columna en ceros.
3. *Fase de detenciones*: Paramos cuando todos los elementos de la última fila son positivos

Ejemplo: Maximizar: $z = x_1+x_2$

Restricciones: $2x_1+x_2 \le 2$

$x_1+x_2 \ge \mathbf{-1}$

$x_1+x_2 \ge 1$

$x_1 \ge 0$

Fase de iniciación			
1º Pasar el problema a máximo: (ya está) 2º: Términos independientes en positivo: $2x_1+x_2 \le 2$ $\mathbf{-x_1 - x_2 \le 1}$ $x_1+x_2 \ge 1$ $x_1 \ge 0$	3º Convertir en igualdad y añadir variables de separación. $2x_1+x_2 +\mathbf{x_3} = 2$ $-x_1 - x_2 +\mathbf{x_4} = 1$ $x_1 + x_2 - \mathbf{x_5} = 1$ $x_1 \ge 0 \;\; x_3, x_4, x_5 \ge 0$	4º Las variables negativas, cambiar para definir positiva $x_2 = x'_2 - x''_2$ $z = x_1+ x'_2 - x''_2$ $2x_1+x'_2 - x''_2 +\mathbf{x_3} = 2$ $-x_1 - x'_2 - x''_2 +\mathbf{x_4} = 1$ $x_1+x'_2 - x''_2 - \mathbf{x_5} = 1$ $x_1 \ge 0 \;\; x_3, x_4, x_5 \ge 0$	5º Para poner en base canónica x_3 y x_4 añadir variable artificial x_6 para tener: 100 010 001 Y estará en la función objetivo con coef. $-\omega$ $z = x_1+ x'_2 - x''_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 - \boldsymbol{\omega x_6}$ $2x_1+x'_2 - x''_2 +\mathbf{x_3} = 2$ $-x_1 - x'_2 - x''_2 +\mathbf{x_4} = 1$ $x_1+x'_2 - x''_2 - x_5 +\mathbf{x_6} = 1$ $x_1, x'_2, x''_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0$

Construimos la tabla:

- La columna Coefic. es la columna de los coeficientes de las variables básicas
- La columna V.B. es la columna de las variables básicas.
- Las b son los términos independientes de cada una de las restricciones.

Coefic.	V$_{\text{ar Básicas}}$	x_1	x'_2	x''_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_{indep}
0	x_3	2	1	-1	**1**	0	0	0	2
0	x_4	-1	-1	1	0	**1**	0	0	1
$-\omega$	x_6	1	1	-1	0	0	-1	**1**	1
		$-\omega-1$	$-\omega-1$	$\omega+1$	0	0	ω	0	$-\omega$

Solución inicial: (0,0,0,2,1,0,1) z(0,0,0,2,1,0,1) = $-\omega$

Fase de interacción:

La casilla *pívot* será el menor número negativo de la última fila. Tenemos que hacer el resto de la columna 0
Construimos la nueva tabla dividiendo la fila por el pívot poniendo 0 por encima y debajo del pívot y el resto de lugares con el esquema: pivot·c-b·a /pivot = d

Coefic	$V_{Básicas}$	x_1	x'_2	x''_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
0	x_3	0	-1	1	1	0	2	-2	0
0	x_4	0	0	0	0	1	-1	1	2
-w	x_6	1	1	-1	0	0	-1	1	1
		0	0	0	0	0	-1	1+w	1

Escogemos nuevo pívot y construimos

Coef	V_B	x_1	x'_2	x''_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
0	x_3	0	-1/2	1/2	1/2	0	1	-1	0
0	x_4	0	-1/2	1/2	1/2	1	0	0	2
-w	x_6	1	1/2	-1/2	1/2	0	0	0	1
		0	-1/2	1/2	1/2	0	0	w	1

Exemples

$$Max \quad 36x + 20y - 40z$$
$$s.a.\begin{cases} 3x + y - z \le 10 \\ x + y - z \le 50 \end{cases}$$
$$x, y, z \ge 0$$

⇨

Estandarditzem el programa:

$$Max \quad 36x + 20y - 40z + 0t + 0u$$
$$s.a.\begin{cases} 3x + y - z + t = 10 \\ x + y - z + u = 50 \end{cases}$$
$$x, y, z, t, u \ge 0$$

Emplenem la taula del símplex:

Coef	*v.b.*	*x*	*y*	*z*	*t*	*u*	*B*
0	*t*	*3*	*1*	*-1*	*1*	*0*	*10*
0	*u*	*1*	*1*	*-1*	*0*	*1*	*50*
		-36	*-20*	*40*	*0*	*0*	***0***

Càlcul dels termes $z_j - c_j$:

$$Max \quad \overset{c_1}{36}x + 20y - 40z + 0t + 0u$$

Coef	*v.b.*	*x*	*y*	*z*	*t*	*u*	*B*
0	*t*	*3*	*1*	*-1*	*1*	*0*	*10*
0	*u*	*1*	*1*	*-1*	*0*	*1*	*50*
		-36	*-20*	*40*	*0*	*0*	***0***

x

x

$$z_1 - c_1 = 0 \cdot 3 + 0 \cdot 1 - 36 = -36 \qquad z_2 - c_2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 - 20 = -20$$

$$z_3 - c_3 = 0 \cdot (-1) + 0 \cdot (-1) - (-40) = 40 \qquad z_4 - c_4 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 - 0 = 0$$

El valor z^* és el següent: $z^* = f(0,0,0,10,50)$ la resta de variables amb valor 0.

Coef	*v.b.*	*x*	*y*	*z*	*t*	*u*	*B*
0	*t*	~~*3*~~	~~*1*~~	~~*-1*~~	~~*1*~~	~~*0*~~	*10*
0	*u*	~~*1*~~	~~*1*~~	~~*-1*~~	~~*0*~~	~~*1*~~	*50*
		-36	*-20*	*40*	*0*	*0*	***0***

$$z^* = f(0,0,0,10,50) = 36 \cdot 0 + 20 \cdot 0 - 40 \cdot 0 + 0 \cdot 10 + 0 \cdot 50 = 0$$

$\frac{10}{3}$ quocient mínim: $\frac{10}{3}$

Coef	*v.b.*	*x*	*y*	*z*	*t*	*u*	*B*
0	*t*	$\boxed{3}$	*1*	*-1*	*1*	*0*	$\boxed{10}$
0	*u*	$\boxed{1}$	*1*	*-1*	*0*	*1*	$\boxed{50}$
		$\boxed{-36}$	*-20*	*40*	*0*	*0*	***0***

el pivot serà el 3

menor nombre negatiu

$\frac{50}{1}$

no compleix condició de detenció. tornem a la fase

Coef	v.b.	x	y	z	t	u	B
36	x	3	$\boxed{\frac{1}{3}}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\boxed{\frac{10}{3}}$
0	u	0	$\boxed{\frac{2}{3}}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	$\boxed{\frac{140}{3}}$
		0	$\boxed{-8}$	28	12	0	**120**

↑

Coef	v.b.	x	y	z	t	u	B
20	y	3	1	-1	1	0	10
0	u	-2	0	0	-1	1	40
		24	0	20	20	0	200

òptim $y = 10, u = 40$

el punt (0,10,0) és el màxim global i el valor de la funció en aquest punt és $z^* = 200$.

Exemple 2:

$$Min\ -2x-2y-5z \quad s.a.\begin{cases} x+2y \geq 6 \\ x+y+z \leq 10 \end{cases} \quad x,y,z \geq 0$$

Estandarditzem :

$$Max\ \ 2x+2y+5z+0t+0u-wc \quad s.a.\begin{cases} x+2y-t+c=6 \\ x+y+z+u=10 \end{cases} \quad x,y,z,t,u \geq 0$$

Emplenem la taula del símplex:

Coef	v.b.	x	y	z	t	u	c	B
-w	c	1	2	0	-1	0	1	6
0	u	1	1	1	0	1	0	10
		-w-2	-2w-2	-5	w	0	0	**-6w**

Càlcul dels termes $z_j - c_j$:

$$Max\ \ \underset{c_1}{2}x+2y+5z+0t+0u-wc$$

x

Coef	v.b.	x	y	z	t	u	c	B
-w	c	1	2	0	-1	0	1	6
0	u	1	1	1	0	1	0	10
		-w-2	-2w-2	-5	w	0	**0**	**-6w**

Coef	v.b.	x	y	z	t	u	c	B
-w	c	1	2	0	-1	0	1	6
0	u	1	1	1	0	1	0	10
		-w-2	-2w-2	-5	w	0	0	**-6w**

valor z* $\quad z^* = f(0,0,0,0,10,6) = 2\cdot 0 + 2\cdot 0 + 5\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 10 - w\cdot 6 = -6w$

el pivot serà el 2 $\qquad \frac{6}{2}$ min

Coef	v.b.	x	y	z	t	u	c	B
-w	c	1	$\boxed{2}$	0	-1	0	1	$\boxed{6}$
0	u	1	$\boxed{1}$	1	0	1	0	$\boxed{10}$
		-w-2	$\boxed{-2w-2}$	-5	w	0	0	**-6w**

↑

$\frac{10}{1}$

Coef	*v.b.*	*x*	*y*	*z*	*t*	*u*	*c*	*B*
2	*y*	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	3
0	*u*	$\frac{1}{2}$	0	$\boxed{1}$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\boxed{7}$
		-1	0	$\boxed{-5}$	-1	0	1+w	6

menor nombre negatiu ↑

Coef	v.b.	x	y	z	t	u	c	B
2	y	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	3
5	z	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	7
òptim $y = 3, z = 7$		$\frac{3}{2}$	0	0	$\frac{3}{2}$	5	$-\frac{3}{2}+w$	41

punt (0,3,7) és el mínim global i el valor de la funció en aquest punt és $-z^* = -41$.