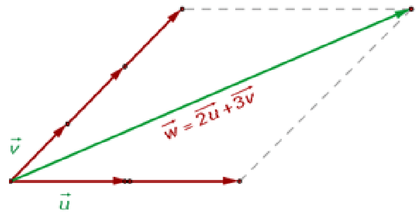
Espacio / Subespacio vectorial - Combinación lineal *Ofimega*

Espacio vectorial: es un conjunto no vacío de vectores, en el que se han definido dos operaciones: la suma $(\vec{u} + \vec{v})$ y el producto por un escalar $(k \cdot \vec{u})$ con sus propiedades. Además $0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$

Subespacio vectorial: Es un subconjunto de un espacio vectorial, que además cumple las condiciones: que al sumar dos vectores $(\vec{u} + \vec{v})$ o multiplicar por un nº $(k \cdot \vec{u})$ y el $\vec{0}$ también pertenece al subespacio.

Una ***combinación lineal** de dos o más vectores* es el vector que se obtiene al sumar esos vectores multiplicados por escalares: $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \cdots$.

Cualquier vector se puede poner como **combinación lineal** de otros que tengan **distinta dirección**. $\vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$ →



Esta **combinación lineal** es **única**.

Vectores linealmente dependientes

Varios vectores libres son **linealmente dependientes** (sistema ligado) si hay una combinación lineal de ellos que es igual al vector $\overrightarrow{\boldsymbol{cero}}$ (sin que sean cero los coeficientes): $a_1\vec{v}_{1+}a_2\vec{v}_{2+} \ldots + a_n\vec{v}_n = \overrightarrow{\mathbf{0}}$

Propiedades

1. Si varios vectores son dependientes, entonces al menos uno de ellos se puede expresar como combinación lineal de los demás: $v_1 = k\overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3}$
   También se cumple el reciproco: si un vector es combinación de los otros → son dependientes.
2. Dos vectores del plano $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente dependientes si son paralelos.
3. Dos vectores libres $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente dependientes si sus componentes son proporcionales:
$$\frac{v1}{u1} = \frac{v2}{u2} = k$$
4. *n* vectores son dependientes si su |*determinante*|= 0

Ejemplo: *Determinar los valores de **k** para que sean linealmente dependientes los vectores:*
$$\vec{u} = (3,\ k\ , -6), \quad \vec{v} = (-2\ ,\ 1,\ k+3), \quad \vec{w} = (1\ , k+2\ ,\ 4)$$
*Escribir $\vec{u}$ como combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{w}$, siendo **k** el valor calculado.*

Los vectores son linealmente dependientes si el determinante que forman es nulo, es decir: **Rango < 3**.

1. Calculamos el determinante e igualamos a cero: $\begin{vmatrix} 3 & k & -6 \\ -2 & 1 & k+3 \\ 1 & k+2 & 4 \end{vmatrix} = k^2 - 4k - 12$
2. Resolvemos la ecuación : ^{2} – 4k - 12 = 0 → k=-2 y k=6
3. Para *k=-2:* los vectores son $\vec{u} = (3, -2, -6)$, $\vec{v} = (-2,1,1)$, $\vec{w} = (1,0,4)$
   Escribimos $\vec{u}$ en función de $\vec{v}$ y $\vec{w}$: (3, -2, -6) = a (-2,1,1) + b(1,0,4) = (-2a+b, a , a+4b)
4. Calculamos los valores de los escalares *a* y *b* igualando coordenadas, obtenemos: *a= -2 , b = -1*
5. Así la combinación lineal buscada es: $\vec{u} = -2\,\vec{v} + \vec{w}$
6. para *k = 6:* Repetir los pasos 4 y 5

Vectores linealmente independientes

- Son *linealmente independientes (sistema libre)*:
  - Si tienen <u>*distinta dirección*</u> y sus componentes <u>no</u> son proporcionales.
  - Si su determinante es distinto de cero. Si ninguno de ellos puede ser escrito con una combinación lineal de los restantes. Si la combinación lineal es cero, es porque sus coeficientes son cero:
    $a_1\vec{v}_{1+}a_2\vec{v}_{2+}\ \ldots + a_n\vec{v}_n = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad a_1 + a_2\ \ldots + a_n = 0$

<u>Ejemplo</u>: Estudiar si son linealmente dependientes o independientes los vectores
$\vec{u} = (2,3,1),\ \vec{v} = (1,0,1),\ \vec{w} = (0,3,-1)$:

Método 1: Determinante de los vectores: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{0} \ \rightarrow \ dependendientes$

Método 2: α (2,3,1) + β(1,0,1) + γ(0,3,-1)=(0,0,0) $\rightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 \\ 3\alpha + 3\gamma = 0 \\ \alpha + \beta - \gamma = 0 \end{cases}$ → La sol no es 0,0,0

Pertenencia

Un vector $\vec{w}$ pertenece al subespacio si es combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, o sea, si existen α, β ∈ R tales que: $\vec{w}$= α · $\vec{u}$ + β · $\vec{v}$

<u>Ejercicio</u>: Hallar x para que el vector (1,x,5) pertenezca al subespacio (1, 2, 3),(1, 1, 1).

Es necesario que: (1, x, 5) = α(1, 2, 3) + β(1, 1, 1) →
y resolviendo el sistema anterior, tenemos
α = 2, β = −1 y x = 3.

1 = α + β
x = 2α + β
5 = 3α + β

Base

Para que tres vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ formen una **base** en R^3, deben:

1º ser vectores lin. Independientes (*tener distinta dirección*)

2º formar un conjunto <u>*generador*</u> (*origen*) y se pueda hacer que un vector $\vec{A} = \alpha\vec{u} + \beta\,\vec{v} + \lambda\vec{w}$

y las coordenadas del vector respecto a la base son: $\vec{A} = (\,\alpha, \beta, \lambda)$

- **Base ortogonal:** Una base es **ortogonal** si los vectores de la base son perpendiculares entre sí.
- **Base ortonormal:** si son perpendiculares entre sí, y además tienen módulo 1.
- **Base canónica**. Formada por los vectores $\hat{\imath} = (1,0,0),\ \hat{\jmath} = (0,1,0),\ \hat{k} = (0,0,1)$

<u>Ejemplo</u>: ¿Para qué valores de a los vectores $\vec{u} = (1,1,1),\ \vec{v} = (1,a,1),\ \vec{w} = (1,1,a)$ forman una base?

- Determinante de los vectores ≠ 0: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 2a + 1 \ \neq \mathbf{0} \ \ \rightarrow \ a \neq 1$
- Si a = 1 , los vectores son linealmente dependientes.
- Si a ≠ 1, los vectores son linealmente independientes y forman una base si a ≠ 1.

***<u>Ejercicio</u>** Encontrar una base y la dimensión del subespacio vectorial de S.*

S ={ (1, 2, −1, 3) , (2, 1, 0, −2) , (0, 1, 2, 1) , (3, 4, 1, 2) }

Método 1: Si al hacer el determinante |S| = 0 → son dependientes

Método 2: Probamos un *sistema generador*: A = {(1, 2, −1, 3),(2, 1, 0, −2),(0, 1, 2, 1),(3, 4, 1, 2)}.

Pero A no es libre ya que: (0, 0, 0, 0) = α1(1, 2, −1, 3) + α2(2, 1, 0, −2) + α3(0, 1, 2, 1) + α4(3, 4, 1, 2)

→ solución α1 = α2 = α3 = −α4 ≠ 0 entonces uno de los vectores (3, 4, 1, 2) es c.l. de los anteriores.

Probamos si es un sistema libre: {(1, 2, −1, 3),(2, 1, 0, −2),(0, 1, 2, 1)}

(0, 0, 0, 0) = β1(1, 2, −1, 3) + β2(2, 1, 0, −2) + β3(0, 1, 2, 1) → β1 = β2 = β3 = 0

Si es *libre* (l.i) y *generador* ($\vec{0}$)→ forma una base y la dimensión de S es 3.

Ejercicio *Probar si forman una base (1,2,3) (2,-1,0) y (1,2,0)*
y las coordenadas en dicha base del vector (2,4,6) .

Sol:

Opción A: Probar que en (0, 0, 0) = $\alpha1(1,2,3) + \alpha2(2,-1-0) + \alpha3(1,2,0) \rightarrow \alpha1 = \alpha2 = \alpha3 = 0$

Opción B: El rango de A es el nº de vectores lin. indep. y la dimensión de esa base.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 6 - 3 = 9 \neq \mathbf{0} \quad \rightarrow \ Rang(A) = 3 \rightarrow \text{Dim}=3$$

Probamos si es conjunto generador: (x,y,z) = $\alpha1(1,2,3) + \alpha2(2,-1-0) + \alpha3(1,2,0) \rightarrow$

$\alpha_1 = z/3$
$\alpha_2 = -x + 3y - 5z/3$
$\alpha_3 = x - 2y + z$

b) Coordenadas del vector (2,4,6) en dicha base: (2,4,6) →

$\alpha_1 = 6/3 = \mathbf{2}$
$\alpha_2 = -2 + 3 \cdot 4 - 30/3 = \mathbf{0}$
$\alpha_3 = 2 - 2 \cdot 4 + 6 = \mathbf{0}$

Las nuevas coordenadas son: (2,0,0)

Cómo sacar una base de un subespacio:

Ejemplo:

Sea S ={ (x,y,z) $\in R^3$ */ x+2y + z =0 ; -x + y -z = 0 } .* *(ecuac. de 2 planos y sus vectores normales: 1,2,1 y -1,1,-1)*
Calcula la dimensión, las ec. paramétricas y, a partir de ahí, una base de ese subespacio para que sea de R^3

1º Dim de la base = Rango del sistema = nº de ecuac. Independientes: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ 2 Rango = 2

2º El nº parámetros necesarios = dim de la base – num de ecuaciones: 3 - 2 ecuac = 1

Asignamos z = λ (1 param) y ponemos x e y en función de λ: $\begin{cases} x - 2y = -z = -\lambda \\ -x + y = z = \lambda \end{cases} \rightarrow$

x = -1λ
y = 0λ
z = 1λ

3º (x,y,z) = λ (-1, 0,1) → el vector (-1, 0,1) (sólo es necesario 1 vector o combinación lineal de este)

Ejercicio: *sea A = { (x,y,z)* $\in R^3$ *} generado por u (1,0,1) y (1,1,1)*
Determinar una base, unas ecuaciones paramétricas e implícitas.

1º Comprobamos que son independientes:

1 calculamos el rango a $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \rightarrow$ son lin. Independientes de Dim=2

2º Comprobamos que son generadores:

(x,y,z) = $\alpha(1,0,1) + \beta(1,1,1) \rightarrow$

x = $\alpha+\beta$
y = β
z = $\alpha+\beta$

→ (ec. paramétricas)

3º Para encontrar las implícitas:

Se despeja un parámetro (β) y se sustituye en las otras 2 ecuaciones:

x = α+y
z = α+y

→ **x = z → x – z = 0**

Ejercicio: *sea A = { (x,y,z)* $\in R^3$ */ x – z = 0 } obtener los vectores que forman esta base.*

Nº param = Dimensión – nº ecuaciones = 3 – 1 = 2 necesitamos 2 parámetros

Hacemos: $y = \alpha$ y $z = \beta$ → x - z = 0 → x = β → (x,y,z) = α (0,1,0) + β (1,0,1)

Exercici: Trobeu una base del subespai vectorial de R^3 donat per S = {(x, y, z) ∈ R^3 | 2x − y + z = 0, x + y = 0} i calculeu la seva dimensió.

Exercici: Trobeu una base del subespai vectorial de R^3 donat per

S = { (x, y, z) ∈ R3 | x + y - z = 0 , 3x + 6y - 5z = 0 }

A) Determina la dimensió de S i dona una base B de S.

B) Afegeix a B els vectors que calguin per obtenir una base de R^3

A) Dim de la base = Rango del sistema = nº de ecuac. Independientes: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & -5 \end{vmatrix} \neq 0$ 2 Rango = 2

La base con los 2 vectores independientes es: (x,y,z) = α (1,1,-1) + β (3,6,-5)

Comprobamos que además es conjunto generador: (0,0,0) = α (1,1,-1) + β (3,6,-5) → $\alpha = 0$; $\beta = 0$

B) Hacemos z = λ . Se resuelve el sistema: x – y - λ = 0 ; 3x-6y-5λ = 0 (con z = λ) y da: x =1/3λ ; y = 2/3λ ; z = λ

Por lo que un vector es: (1/3, 2/3, 1) o cualquier combinación lineal de este, como el: (1,2,3)

Exercici 2: Dado el conjunto de vectores en R4: S = {v_1 = (2, 0, 0, 3), v_2 = (−4, −2, 0, 9), v_3 = (5, 1, 0, 0)}

a) Descriu el subespai vectorial generat per S a traves d'un sistema d'equacions.

b) S es una base de R4? (argumenta). Si no ho es, modifica S per construir una base de R 4.

Matriz de cambio de base:

Llamemos **C** a la matriz R^3 en base canónica representada por los vectores unitarios $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

▸ *Cambio de la base **B** a canónica **C*** (B → C)*:*

Ejem: B = (1,-1,1), (0,1,1), (0,0,2)} a la base canónica C = {(1,0,1),(0,1,0 , (0,0,1)}: B → C

<u>Método 1</u>: Poner la base de destino en función de unos parámetros que multiplican a la base canónica:

$(1,0,1) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \lambda(0,0,1)$

$(0,1,0) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \lambda(0,0,1)$

$(0,0,1) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \lambda(0,0,1)$

<u>Método2</u>: La matriz de cambio de base coincide con poner sus vectores en vertical: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

▸ *De la base canónica **C** a una nueva base **B***: Mat de C → B:

*De **C** = {(1,0,0),(0,1,0 , (0,0,1)} a la base en R^3: B = (1,-1,1), (0,1,1), (0,0,2)}* $M_{C,B}$

<u>Método 1</u>: Buscamos las coordenadas de cada vector de la base canónica respecto a la base B:

$(1,0,0) = \alpha(1,-1,1) + \beta(0,1,1)+ \lambda(0,0,2)$; $(0,1,0) = \alpha(1,-1,1) + \beta(0,1,1)+ \lambda(0,0,2)$; $(0,0,1) = \alpha(1,-1,1) + \beta(0,1,1)+ \lambda(0,0,2)$→

$(1,0,0)= (\alpha,-\alpha, \alpha) + (0,\beta,\beta) + (0,0,2\lambda) \rightarrow \alpha=1 ; \beta=1 ; \lambda=2$

$(0,1,0) = (\alpha,-\alpha, \alpha) + (0,\beta,\beta) + (0,0,2\lambda) \rightarrow \alpha=0 ; \beta=1 ; \lambda=1$ → ponemos en vertical: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(0,0,1) = (\alpha,-\alpha, \alpha) + (0,\beta,\beta) + (0,0,2\lambda) \rightarrow \alpha=0 ; \beta=0 ; \lambda=-1$

<u>Método 2</u>: Ponemos la matriz B en canónica y hacemos la matriz inversa B^{-1}:

Matriz inversa de sus vectores puestos en vertical: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

▸ *De la base **B** en R^3 a otra no canónica **B’*** (B → B’)*:*

Truco: (B → B’) = (C → B’) · (B→C)

1º poner B’ (destino) en columnas y hacer la inversa: (C → B’)

2º poner la B (origen) en columnas para pasar a canónica: (B→C)

3º multiplicar: (C → B’)·(B→C)

▸ *Cambio de base en endomorfismos: $(B')^{-1} \cdot C \cdot B'$*

<u>Ejemplo</u>: Cambiar de la base definida por los vectores: (3,1) , (2,-1) a la base definida por: (2, 4) , (-5,3)

1º Calculamos $(B')^{-1}$: $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{adj(A)^t}{|A|} = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

2º Calculamos (B) : $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

3º Multiplicamos: $(B')^{-1} \cdot B$: $\frac{1}{26}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -4 & -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 14 & 5 \\ -10 & -10 \end{pmatrix}$ ← Matriz cambio base o de transición

Convertir la original: (C → B’)·(B→C)= *$[(B')^{-1} \cdot B] \cdot B'$:* $\frac{1}{26}\begin{pmatrix} 14 & 5 \\ -10 & -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

Matriz Núcleo e Imagen:

- Los vectores del núcleo son aquellos cuya imagen vale 0: **A·X = 0**
  (sistema homogéneo con matriz de coeficientes = **A**)
- La imagen de un vector se obtiene multiplicando por la matriz asociada *A*: **Y = A·X**

Si Núcleo de *f*: $R^3 \to R^{3'}$ conjunto cuya imagen ***f(x) = 0*** *; si f es inyectiva: dim(Ker(f) = 0*
Si Imagen de *f*: $R^3 \to R^{3'}$ conjunto cuya *Im() → f(x)* *; si f es sobreyectiva: dim(im(f)) = 3*
Fórmula que relaciona las dimensiones de ambos subespacios: *dim (V) = dim ((Ker(f) + dim (f))*
Si f tiene matriz asociada A de orden m x n, entonces: dim(Im(f)) = rg(a) ; dim(Ker(f)) = n – rg(A)

Cálculo del núcleo o kernel

Conjunto de todos los vectores que, al ser multiplicados por la matriz, resultan en el vector cero.
En otras palabras, son las soluciones de la ecuación matricial: **A · X = 0** *(te lleva al origen)*

Ejemplo 1:
Considera la aplicación lineal f: R^3 definida por *f(x, y, z) = (x + y, x + z, y - z)* , obtener una base del núcleo *Ker*(f).

1º Mejor con la matriz asociada en la base canónica (vertical) e igualamos a 0 el sistema: →

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

2º Reducimos por Gauss $\begin{cases} x + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$

3º Como es sistema indeterminado, hacemos z = λ

y obtenemos las paramétricas: $\begin{cases} x = -\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ → ***Base del núcleo = {(-1,1,1)}***

Cálculo de la Imagen (Y = A·X)

Si una aplicación lineal : *f: V → V'* y de base B(u_1,u_2,u_3 …) de V → {*f(u_1), f(u_2)*, …} es sistema generador de Im(*f*)
La matriz imagen o rango, representa el espacio generado por las <u>columnas</u> de la matriz. Para calcularla, se puede utilizar la forma <u>escalonada</u> (Gauss) y las filas <u>no nulas</u> forman una base para el espacio imagen.

Ejemplo: La aplicación lineal anterior *f*: R^3 definida por *f(x, y, z) = (x + y, x + z, y - z),* obtener unas ecuaciones cartesianas de la imagen *Im(f).*

1º Mejor con la matriz asociada a *f* en la base canónica (vectores en vertical): $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

2º Reducimos la matriz: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & \mathbf{0} \\ 1 & -1 & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ o hacemos z = λ obtenemos paramétricas → ***Im(f) = {(1,0,1), (0,1,-1)}***

3º Pasamos a paramétricas: (x,y,z) = λ(1,0,1) + μ(0,1,-1) → x = λ ; y= μ ; z = λ - μ

4º Eliminamos parámetros por reducción: y + z = λ ; x = λ → y + z = x
y obtenemos las cartesianas: ***x – y – z = 0***

***Ejemplo** 2: Dada la aplicación lineal R^3 (x,y,z)* → (x+2y+3z, 2x-4y -2z, 3x -2y +z)
Encuentre una base y la dimensión del Núcleo de f y de Imag de f

<u>*Núcleo o Kernel*</u>*:* Vectores (x, y, z) cuya imagen sea el vector nulo $\vec{0}$:

- Ponemos el sistema en modo matricial igualando a cero: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- Resolvemos el sistema y nos dará un sistema compatible indeterminado (ya que es rango 2)
- Ponemos z en función del parámetro λ: z = λ

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ -8y - 8z = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ y = z \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x + 2\lambda + 3\lambda = 0 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = -5\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Nuc(f)** o Ker(f) = {(x,y,z,) = λ(-5,1,1)* ***= (-5,1,1) y la dim (nuc(f)) = 1 porque sólo hay 1 vector

<u>*Imagen de f:*</u>
Reduciendo por Gauss vemos que la matriz asociada A es de rango 2 = Dimensión 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-3F_1]{F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -8 \\ 0 & -8 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces cogemos 2 vectores independientes para hallar la base de *Imf* que se corresponden con las 2 primeras columnas ya q la 3ª columna es la suma de las otras: → *Imf = {(x,y,z) = α (1,2,3) + β(2,-4,-2) =* ***(1,2,3), (2,-4-2)*** *}*

Exercici resolt:

Considera l'aplicació lineal $f : R^3$ | $f(x, y, z) = (-x + y + z \;,\; 2x - 3y - 2z \;,\; -3x + 4y + 3z)$.
(a) Calcula el nucli i la imatge de l'aplicació. Digues si l'aplicació es injectiva i/o exhaustiva
(b) El vector (1, 0, 0) te antiimatges? En cas de tenir-ne, dona'n una.
(c) Considera la base de R 3 definida pels vectors (1, 0, 0), (1, 0, 1) i (0, 1, −1). Calcula la matriu de f en aquesta base.

Solución

a) *Núcleo*: De *los coeficientes de f obtenemos la matriz asociada que igualamos* para que *f(x, y, z) =(0, 0, 0):*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -2 & 0 \\ -3 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El núcleo son los vectores (x, y, z) con **y = 0** y **x = z**.

O haciendo $z=\lambda$: x, y, z = $\lambda,0,\lambda = \lambda$(**1,0,1**) Es decir, el subespacio generador por el vector **(1, 0, 1).**

Imagen: Como el rango de la matriz es 2, el subespacio es de dimensión 2. Cogemos los vectores de las 2 primeras columnas: (−1, 2, -3) i (1, −3, 4) que son las linealmente independentes

→ la imagen de f es el subespacio generado por los vectores (−1, 2, -3) y (1, −3, 4).

- La aplicación no es inyectiva porque tiene núcleo de dimensión 1
- No es exhaustiva porque la dimensión de la imagen es 2, inferior a la dimensión de R^3

b) Anti imágenes de (1, 0, 0): Igualamos la matriz al vector y como el sistema es Incompatible, no tiene solución.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -2 & 0 \\ -3 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

c) *Matriz de cambio de base* de los vectores (1, 0, 0), (1, 0, 1) i (0, 1, −1)

Método con la fórmula $A' = M^{-1} \cdot A \cdot M$: como matriz del cambio de base de B a Canónica es: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Su inversa: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ $A' = M^{-1} \cdot A \cdot M$: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \\ -3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Exercici:

Sigui f endomorfisme de R^3, tal que la seva representació matricial en la base canònica R: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Troba una base del nucli i una base de la imatge de f.
(b) Digues si f es injectiva i /o suprajectiva (exhaustiva). Justifica.
(c) Troba la matriu associada a f en la base B = {(1, 0, 0),(1, 1, 0),(1, 1, 1)}.

Exercici resolt:

Considera l'aplicació lineal $f : R^3$ | $f(x, y, z) = (x - y - z, \;\; -2x + 3y + 2z, \;\; 3x - 4y - 3z)$.
(a) Calcula el nucli i la imatge de l'aplicació. Digues si l'aplicació es injectiva i/o exhaustiva

Nucli: resolent el sistema pel mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El nucli de l'aplicació son els vectors (x, y, z) amb y = 0 i x = z. Es el subespai generat pel vector (1, 0, 1).

Imatge: subespai generat pels vectors (1, −2, 3), (−1, 3, −4) i (3, −4, −3).

Rang de la matriu = 2 = dimensió. Agafem les 2 primeres columnes: (1, −2, 3) i (−1, 3, −4)

que son linealment independents. → Im f es el subespai generat per els vectors (1, −2, 3) i (−1, 3, −4).

L'aplicació no es injectiva perquè dim(nucli) = 1 $\neq$ 0 , i no es exhaustiva perquè la dim. imatge $\neq$ 3 (R3)

Exercicis

Considera el conjunt de vectors S de R^4: S = {v1 = (2, 0, 0, 3), v2 = (−4, −2, 0, 9), v3 = (5, 1, 0, 0)}
(a) Determina si S es linealment dependent o independent.
(b) Descriu el subespai vectorial generat per S a traves d'un sistema d'equacions.
(c) S es una base de R^4? (argumenta). Si no ho es, modifica S per construir una base de R4
(potser caldrà eliminar i /o afegir algun vector; fes el nombre mínim de canvis possible)

Sol: a) el rang de M es 2, i el subespai generat per S te dimensió 2.
Els vectors v1 = (2, 0, 0, 3) i v3 = (5, 1, 0, 0) son un subconjunt de S linealment independent (i per tant, una base)
b) (x, y, z, t) = αv1 + βv3 = α(2, 0, 0, 3) + β(5, 1, 0, 0) = (2α + 5β , β , 0 , 3α)
→ paramètriques: x = 2α + 5β y = β z = 0 t = 3α
→ Implicites, substituïm α i β: x = 5y + 2 3 t z = 0

a) Per construir una base de R 4 necessitem 4 vectors linealment independents. Ja en tenim dos: v1 i v3, doncs necessitem dos mes, podem fer y = α → z = β o podem agafar v4 = (1, 0, 0, 0) i v5 = (0, 0, 1, 0)

Valores propios y polinomio característico.

Valores propios: λ es valor propio (o autovalor) de *A* si: $\boldsymbol{A} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}$; $\vec{v}$ vector de 1 columna (vector propio)
Polinomio característico: Si A es una matriz cuadrada, su polinomio caract. es el determinante: P (λ) = |A − λI|.
Las raíces o soluciones del polinomio (P = 0) son precisamente los valores propios de la matriz.

Ejemplo: Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$*, a) Polinomio característico b) Valores propios c) Matriz inversa*

a) Aplicamos |A − λI|= 0: $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \rightarrow \left| \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \right| = 0$
Por Sarrus: (2 - λ) · (3 - λ) + 1 = 0 → **λ^2 - 5λ + 7 = 0**

b) *Valores propios*: Resolvemos $\lambda^2 - 5\lambda + 7 = 0 \rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-28}}{2}$ = No tiene

c) *Matriz inversa*:
Sustituyendo por matrices: $A^2 - 5A + 7 \cdot I = 0 \rightarrow A(A-5) = -7 \cdot I \rightarrow A^{-1}A(A-5) = -7 \cdot A^{-1}I \rightarrow A^{-1} = -1/7\ (A - 5 \cdot I)$

Diagonalización de matrices:

Dada una matriz cuadrada, es ver si existe otra matriz semejante a ella que sea diagonal.
Dos matrices A y B son semejantes si existe si otra matriz cuadrada P, invertible, tal que: $A = P \cdot B \cdot P^{-1}$
Es equivalente a una base en el endomorfismo.
Condición para que sea diagonalizable: $\dim[\ker(A - \lambda)] = m(\lambda)$

Si una matriz tiene autovalores distintos, entonces tiene autovectores L. Ind. → es diagonalizable

Potencia enésima de una matriz por diagonalización: $A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$; P: matriz de autovectores

Ejemplo diagonalización 2x2: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

1º Polinomio característico: $P(\lambda) = |\mathbf{A - \lambda \cdot I}| \rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow P(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 4$

2º Valores propios: $P(\lambda) = \mathbf{0} \rightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \rightarrow \lambda_1 = \mathbf{4}$; $\lambda_2 = \mathbf{1}$

3º Autovectores:

para $\lambda = 4$: $Ker\ (A - 4I) = (A - 4I)(X) = (0) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2-4 & 1 & 0 \\ 2 & 3-4 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$ SCI

Hacemos $x = \alpha$: $-2\alpha + y = 0 \rightarrow y = 2\alpha$ → **autovector: (1,2)**

para $\lambda = 1$: $Ker\ (A - 1I) = (A - 1I)(X) = (0) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2-1 & 1 & 0 \\ 2 & 3-1 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$ SCI

Hacemos $x = \alpha$: $\alpha + y = 0 \rightarrow y = -\alpha$ → **autovector: (1 ,-1)**

Es *diagonalizable*: porque la repetición de soluciones (multiplicidad =1) = repetición de vectores (mutilpl.=1)
Una propiedad que dice que los autovectores asociados a autovalores distintos son linealm. independientes.

*4º Matriz diagonal **D** (Valores propios en la diagonal):* $D = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ *ó* $D = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{4} \end{pmatrix}$

*5º Matriz de paso **P** (autovectores en vertical):* $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ *ó* $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Debe de cumplir que: $\boldsymbol{A = P \cdot D \cdot P^{-1}}$

Ejemplo diagonalización 3x3:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *Hallar a) Polinomio característico. b) Valores propios c) Matriz diagonal d) Autovectores*

a) *Polinomio característico*: se obtiene del determinante $|\mathbf{A - \lambda \cdot I}| = \mathbf{0}$

1º Restar $\lambda \cdot I$: $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ de A: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

2º Desarrollar el determinante: $|A - \lambda \cdot I| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$ Por Sarrus: $(\mathbf{1} - \boldsymbol{\lambda})(-\boldsymbol{\lambda})(\mathbf{1} - \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0}$

b) *Valores propios*: Resolviendo el polinomio ant.: → $1 - \lambda = 0$; $\lambda = 0$; $\lambda = 1$ → Valores propios: $\boldsymbol{\lambda = 1}$ **;** $\boldsymbol{\lambda = 1}$ **;** $\boldsymbol{\lambda = 0}$
Ojo: si algún valor se repite, existe <u>multiplicidad</u> algebraica y puede q **no** sea diagonalizable.

c) *Matriz diagonal*: Combinaciones posibles con los valores propios en la diagonal principal: (1 , 1, 0)

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ó } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ó } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d) *Autovectores o vectores propios*: $(A - \lambda I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Para $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$: $s(0) = \begin{pmatrix} 1-0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1-0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ z = 0 \end{matrix}$ y = cualquiera → Un vector propio es: (0,1,0)

Para $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{1}$: $s(1) = \begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ $-x - y + 2z = 0$ necesitamos 2 parámetros: $\begin{matrix} x = -y + 2z \\ y = y\ ;\ z = 0 \end{matrix}$

Vector propio general: *(-y+2z , y , z)*. Vectores propios de ejemplo: (1,1,1) o el (0,2,1)

***Exercici**: Sea el endomorfismo f : R3 → R3 | f(x, y, z) = (−2x + 2y − 2z , −x + y − 2z , x − 2y + z)*

a) Encuentre la matriz asociada (A) respecto de la base canónica

b) Encuentre sus valores y vectores propios

c) Calcule A^{100}

a) Como nos dan ecuaciones, se ponen sus coef. en horizontal para obtener la matriz asociada: $\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

b) Desarrollar el determinante: $|A - \lambda \cdot I| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 & -2 \\ -1 & 1-\lambda & -2 \\ 1 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$ (ojo, fallo en un signo)

Resolución *a*: Por Sarrus: $-\boldsymbol{\lambda}^3 + 3\boldsymbol{\lambda} - 2 = 0$ y resolvemos por Ruffini: $\lambda_1 = -1$; $\lambda_2 = -1$; $\lambda_3 = 2$ (comprobar?)

Resolución *b*: menor: $(1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda) \cdot (1+\lambda) \cdot (2-\lambda) \rightarrow \lambda_1 = -1$; $\lambda_2 = -1$; $\lambda_3 = 2$

Autovalores (VAP): Se nos repite el autovalor $\lambda_1 = -1$(doble) y $\lambda_3 = 2$(simple)

Autovectores o VEctores Propios (VEP):

- Para $\boldsymbol{\lambda} = -1$: Como el valor propio $\lambda = -1$ es doble, necesitaremos 2 autovectores

  - Hacer el núcleo: $s(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ → SCI rango 1 ; (si fuese 2 no sería diagonalizable)

  Para que sea diagonalizable: rango = Dim – repeticiones de λ = 1

  la dimensión de cada subespacio propio coincide con la multiplicidad del correspondiente valor propio

  Como el rango es 1 tenemos 2 grados de libertad por lo que necesitamos 2 parámetros (α y β)

  Si $y = \alpha$ y $z = \beta$ → $-x + 2\alpha - 2\beta = 0 \rightarrow x = 2\alpha - 2\beta$

  - Damos valores a α y β: para $\alpha = 0$ y $\beta = 1$: (-2,0,1) ; para $\alpha = 1$ y $\beta = 0$: (2,1,0) Autovectores: (-2,0,1), (2,1,0)

- Para $\boldsymbol{\lambda} = 2$: $s(-1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ → SCI rango 2 ; necesitamos 1 parámetro. Autovector: (1,1,-1)

c) Calcule A^{100} : $\boldsymbol{A^{100} = P \cdot D^{100} \cdot P^{-1}}$ donde *P*: matriz de los autovectores en canónica ; *D*: matriz diagonal de *A*

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \; ; D = \begin{pmatrix} -2+\mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 1+\mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1-\mathbf{2} \end{pmatrix}$$

$$A^{100} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{100} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$